



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^7 3^{11} 5^{14}$ ,  $bc$  делится на  $2^{13} 3^{15} 5^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{14} 3^{17} 5^{43}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1,3$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .

3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$ .

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-17; 68)$ ,  $Q(2; 68)$  и  $R(19; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что  $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$ .

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 60,  $SA = BC = 10$ .

а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .

б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 3$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab = \alpha \cdot 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$$

$$bc = \beta \cdot 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$$

$$ac = \gamma \cdot 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$$

чтобы abc было  
целым, нужно, чтобы  
и a, и b, и c было  
как можно меньше

$$(abc)^2 = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot 2^{34} \cdot 3^{43} \cdot 5^{75} = \alpha \beta \gamma \cdot (2^{17})^2 \cdot 3 \cdot (3^{21})^2$$

$$(abc) = \sqrt{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot 3 \cdot 5} \cdot 2^{17} \cdot 3^{21} \cdot 5^{37}$$

$\sqrt{\alpha \beta \gamma \cdot 15}$  нат число  $\Rightarrow \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$  квадрат

$$\frac{ab \cdot bc}{ac} = b^2 = \frac{\alpha \cdot \beta}{\gamma} \cdot 2^6 \cdot 3^9 \cdot 5^{-11}$$

имеет: чет ст. 2

нечет ст 3

$$b = \sqrt{\frac{\alpha \cdot \beta}{\gamma} \cdot 3 \cdot 5} \cdot 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^{-6}$$

нечет ст. 5

$$\frac{ab \cdot ac}{bc} = a^2 = \frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta} \cdot 2^8 \cdot 3^{13} \cdot 5^{39}$$

$$a = \sqrt{\frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta} \cdot 3 \cdot 5} \cdot 2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^{19}$$

Ответ:  $abc = 2^{17} \cdot 3^{23} \cdot 5^{39}$

Кому = 1

$\alpha = \beta = \gamma = 15$

$$c = \sqrt{\frac{\beta \cdot \gamma}{\alpha} \cdot 3 \cdot 5} \cdot 2^{10} \cdot 3^{10} \cdot 5^{23}$$

$\Rightarrow$  если  $\frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta} = \frac{\beta \cdot \gamma}{\alpha} = \frac{\alpha \cdot \beta}{\gamma} = 15$  то  $a, b, c = \text{нат.}$

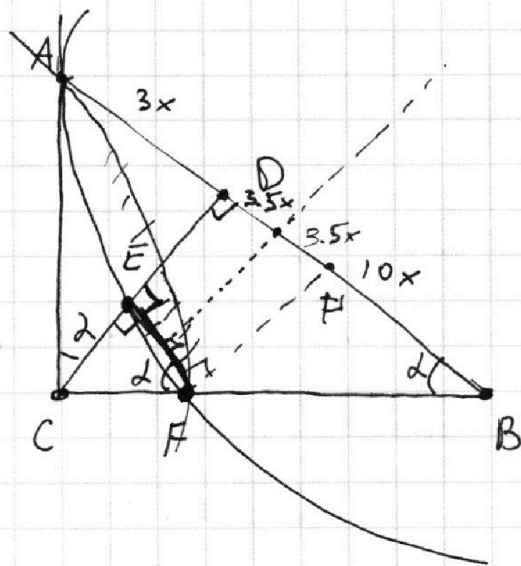
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



т.к.  $AB \parallel EF$ , то

$$\angle DEF = 90^\circ$$

и  $\triangle CEF \sim \triangle CBD$

$\triangle ACD$  — острый угол

т.к.  $\triangle CBD \Rightarrow$

$$\frac{3x}{CD} = \frac{CD}{10x}$$

$$CD = \sqrt{30}x$$

сер. пер.  $EF$  делит

$AB$  пополам.  $(6.5x)$  по 2

$S_{CEF}$  — площадь  $\triangle CEF$

$\Rightarrow$  по т. Пифагора:

$$CB = \sqrt{30}x; AC = \sqrt{39}x$$

$$S_{CDB} = \left(\frac{DC}{EC}\right)^2 \cdot S_{CEF}$$

$$S_{ABC} = \underbrace{\left(\frac{AD}{DC}\right)^2 \cdot S_{CEF} \cdot \left(\frac{DC}{EC}\right)^2}_{S_{CDB}} = \left(\frac{AD}{EC}\right)^2 \cdot S_{CEF}$$

$$\frac{S_{ADC}}{S_{CEF}} = \left(\frac{AD}{EC}\right)^2$$

серии пер-их хорд совпадают, поэтому

иногда, при проецировании  $EF$  на  $AB$  можно

сказать, что  $DF' = 7x$  (т.к. серия делит  $AB$  на 2 р. 2.)

$$\boxed{EF = 7x}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

по подобию  $\triangle$  P:

$$\frac{CE}{EF} = \frac{CP}{AB}$$

$$CE = 7x \cdot \frac{\sqrt{30}x}{10x}$$

$$\frac{S_{APC}}{S_{CEF}} = \left( \frac{3x}{\frac{7}{10} \cdot \sqrt{30}x} \right)^2 = \left( \frac{30}{7\sqrt{36}} \right)^2 = \left( \frac{30}{49} \right)$$

Ответ:  $\frac{S_{APC}}{S_{CEF}} = \frac{30}{49}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3. 5.  $\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$

$$\arccos(\sin x) = \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x))$$

$$0 \leq \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) \leq \pi$$

$$\begin{cases} 0 \leq \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k_1 \leq \pi \\ 0 \leq x - \frac{\pi}{2} + 2\pi k_2 \leq \pi \end{cases}$$

$$k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$$

1)

$$5 \cdot (\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k_1) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5x + 10\pi k_1 = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\pi + 10\pi k_1 = 6x$$

$$\boxed{\frac{\pi}{6} + \frac{10}{6}\pi k_1 = x}$$

$$0 \leq \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} - \frac{10}{6}\pi k_1 + 2\pi k_1 \leq \pi$$

$$0 \leq \frac{1}{3} - \frac{1}{6}k_1 \leq 1$$

$$0 \leq 2 - k_1 \leq 6$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{10}{6}\pi k_1,$$

$$\text{где } k_1 \in \mathbb{Z} \in [-5; 1]$$

$$-6 \leq k_1 - 1 \leq 0$$

$$\boxed{-5 \leq k_1 \leq 1}$$

2)  $5(x - \frac{\pi}{2} + 2\pi k_2) = \frac{3\pi}{2} + x$

$$5x - \frac{5\pi}{2} + 10\pi k_2 = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$4x = 4\pi - 10\pi k_2$$

$$\boxed{x = \pi - \frac{10}{4}\pi k_2}$$

$$0 \leq \pi - \frac{10}{4}\pi k_2 - \frac{\pi}{2} + 2\pi k_2 \leq \pi$$

$$0 \leq -\frac{1}{2}\pi k_2 + \frac{\pi}{2} \leq \pi$$

$$0 \leq -k_2 + 2 \leq 2$$

$$\boxed{0 \leq k_2 \leq 2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



|                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + \frac{10}{6} \pi k_1 \\ k_1 \in [-5; 5] \end{array} \right\} k_1 \in \mathbb{Z}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = \pi - \frac{10}{4} \pi k_2 \\ k_2 \in [0; 2] \end{array} \right\} k_2 \in \mathbb{Z}$$

Ответ:

$$x \in \left\{ \frac{11}{6} \pi; \frac{\pi}{6}; -\frac{3}{2} \pi; -\frac{19}{6} \pi; -\frac{29}{6} \pi; -\frac{39}{6} \pi; -\frac{49}{6} \pi; \right.$$
$$\left. \pi; -4\pi \right\}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4.

за.

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 7b - 3ay \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+7)^2 + y^2 = 2^2 \leftarrow \text{окр. с } R=2, O(-7;0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3^2 \leftarrow \text{окр. с } R=3, O(0;0) \end{cases}$$

мбв, это  $\Delta TK_1O_1 \sim \Delta TK_2O_2$

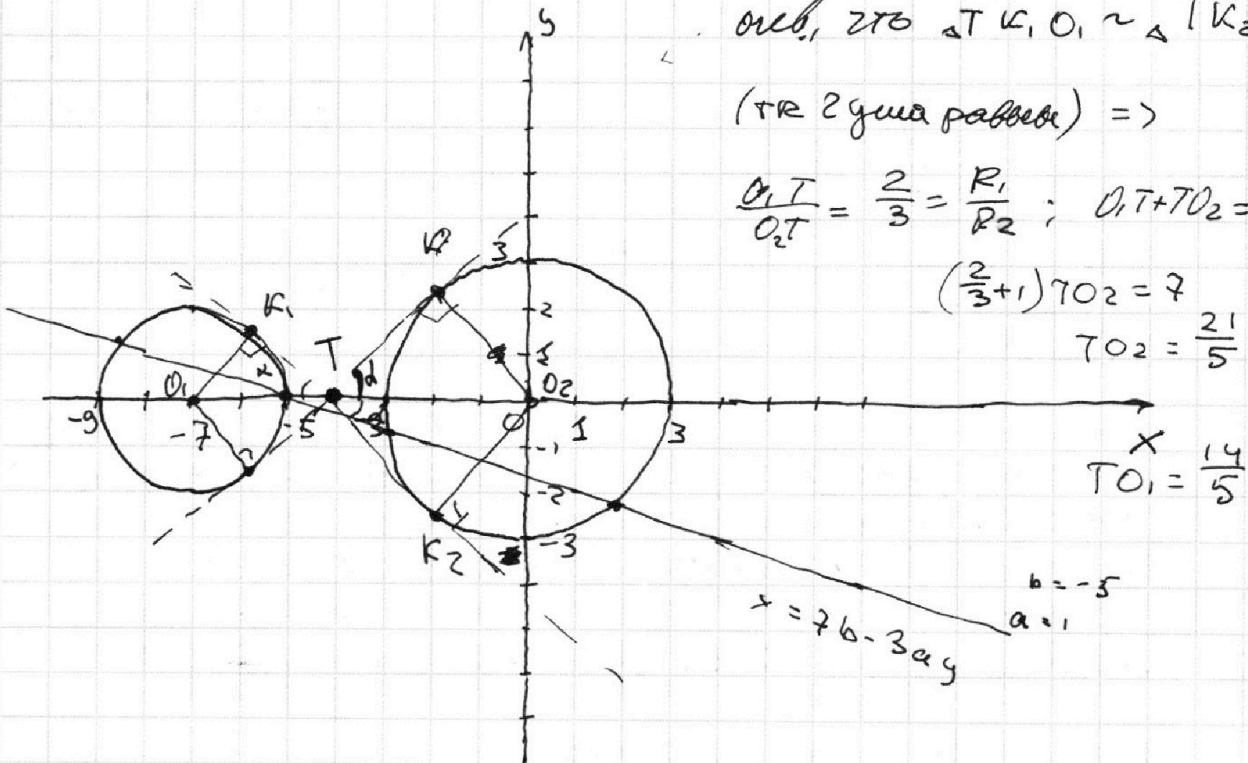
(тр 2 угла равны)  $\Rightarrow$

$$\frac{O_1T}{O_2T} = \frac{2}{3} = \frac{R_1}{R_2}; O_1T + 7O_2 = 7$$

$$\left(\frac{2}{3} + 1\right) 7O_2 = 7$$

$$7O_2 = \frac{21}{5}$$

$$7O_1 = \frac{14}{5}$$



$x = 7b - 3ay$  это прямая, которая пересекает ось абсцисс в т.  $(7b; 0)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Нужно найти такие  $a$ , чтобы каска-то  $b$   
было 4 решения (прямая пересекает обе окружности  
в 2-х точках, расстояния до прямых центра  
радиусов окружностей):

$$P_1 = \frac{|1 \cdot (-7) + 3a \cdot (0) - 7b|}{\sqrt{1 + (3a)^2}} < 2$$

$$ax + by + c = 0$$

$$1 \cdot x + 3a \cdot y - 7b = 0$$

$$P_2 = \frac{|0 + 0 - 7b|}{\sqrt{1 + (3a)^2}} < 3$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{|3a - 7(b+1)|}{\sqrt{1 + (3a)^2}} < 2 \\ \frac{|7b|}{\sqrt{1 + (3a)^2}} < 3 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |3a - 7(b+1)| < 2\sqrt{1 + (3a)^2} \\ |7b| < 3\sqrt{1 + (3a)^2} \end{array} \right.$$

$(-\infty; a_0) \cup (a_0; +\infty)$  или когда

Можно заметить, что ~~значения  $a$ , которая~~  
где  $a_0$  - параметр при котором кас. Значения  
каждой из ~~меток~~ значений ~~или~~  
 $b$ , что прямая кас. обеих окр.-ей.  
касания двух окр. одновременно будут или  
возможны (см. рисунок)

Из выше опис-ой системы (опомо рисунка):

$$|3a_0| = |\operatorname{ctg}(\alpha)| = \frac{TK_2}{OK_2} = \frac{\sqrt{R^2 - (TK_2)^2}}{OK_2} = \frac{\sqrt{\left(\frac{21}{5}\right)^2 - 3^2}}{3^2} = \frac{2\sqrt{6}}{15}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$|3a_d| = \frac{2\sqrt{6}}{15}$$

$$|a_0| = \frac{2\sqrt{6}}{45}$$

← это крайние значения  
при которых будут  $\geq 2$  решений  $\Rightarrow$  подставив  $a=1$

$a=0$  (и помня, что там тоже 2 решения

несколько из решения для  $a=0$ , и 4 реш для  $a=1$ )

можно сделать вывод, что у нас

нар-н  $a$ :  $a \in (-\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{45}) \cup (\frac{2\sqrt{6}}{45}; +\infty)$

---



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5.  $\log_7^4(6x) - 2 \cdot \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4$

$343 = 7^3 =$   
 $= 49^{\frac{3}{2}}$   
 $36x^2 \neq 1$

$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \frac{3}{2} \cdot \log_{6x} 7 + 4 = 0$   $6x \neq 1$   
 $x > 0$

$\log_7^4(6x) - \frac{7}{2} \log_{6x} 7 + 4 = 0$

$\log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} 7^5 - 4$   $y > 0$   
 $y \neq 1$

$\log_7^4 y + 6 \log_y 7 - \frac{5}{2} \log_y 7 + 4 = 0$  Замена:  
 $a = \log_7 6x$

$\log_7^4 y + \frac{7}{2} \log_y 7 + 4 = 0$   $b = \log_7 y$

$\left\{ \begin{array}{l} a^4 - \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{a} + 4 = 0 \\ b^4 + \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{b} + 4 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \delta + a^4 + b^4 = \frac{7}{2} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$   
 $\delta + a^4 + b^4 = \frac{7}{2} \left( \frac{b-a}{ab} \right) \geq \frac{16}{7}$

$\Downarrow$   
 $a^4 - b^4 = \frac{7}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$

$(a^2 + b^2)(a+b)(a-b) = \frac{7}{2} \frac{a+b}{ab}$

$(a+b) = 0 \Rightarrow \log_7 6xy = 0 \Rightarrow 6xy = 1$   $(xy = \frac{1}{6})$   
 $(a^2 + b^2)(a-b) = \frac{7}{2ab}$

$2(a^2 + b^2) = \frac{7}{ab(a-b)}$   
 $\forall \neq 0$

$\left\{ \begin{array}{l} ab < 0 \\ b < a \end{array} \right. \Rightarrow \frac{7}{ab(a-b)} < 0$   
 $\left\{ \begin{array}{l} ab > 0 \\ b > a \end{array} \right. \Rightarrow \frac{7}{ab(a-b)} < 0$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Это значит, что у второго групп нет  
решения, тк одна группа больше нуля,  
а другая меньше  $\Rightarrow$  их-ое значение:

$$a+b=0 \Rightarrow xy = \frac{1}{6}$$

Ответ:  $xy = \frac{1}{6}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6.

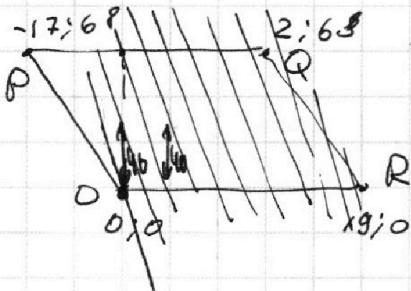
$$4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$$



$a$ -параметр

$$\left\{ \begin{array}{l} 4x_2 + y_2 = a \\ 4x_1 + y_1 = -(40-a) = a-40 \end{array} \right.$$

$\Rightarrow$  эти прямые  $\parallel$   
кар-ны



!!!

градусов параллельности  
сторонами кар-ны  
(PO и QR)

$$TK \frac{68}{-17} = -4$$



расстояние от прямой до прямой  
(по кар-ни если смотреть) можно

найти:  $4(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 40$

$$x_2 - x_1 = 10$$



рассмотрим 10 точек на кар-нах

(те крайние положения  $x_1(y_1=0)$  и  $x_2(y_2=0)$ )

это  $x_1=0$   $x_2=10$  и  $x_1=9$   $x_2=0$

для каждой прямой кар-на существует единственное

кар-но пар точек  $x_1, y_1$  и  $x_2, y_2$



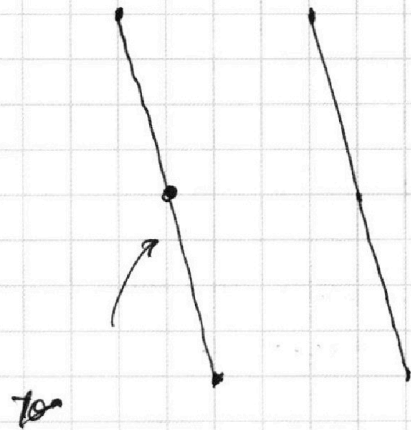
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



когда-то точки, лежащие  
на прямой в целых  
пар-ля с целыми.

коорд.  $x$  это точки

$\neq$  (для каждого  $x \in \mathbb{Z}$

на отрезке  $0 \leq y \leq 8$

найдется  $y$ , прич.  $y \in \mathbb{Z}$ )

это  $x$  точка  $y$  на прямой  $\mathbb{Z}$

прямой  $\frac{68}{4} = 17$  / для  $a=0$  это точка.

$$\left\{ \begin{array}{l} 0:0 \\ -2:4 \\ -2:8 \\ -17:68 \end{array} \right.$$

$\Rightarrow$  для пары прямых кон-во пар точек  $17^2$

$\Rightarrow$  ответ:  $10 \cdot 17^2 = \del{10 \cdot 17^2}$

$= 3240$

$$\begin{array}{r} 18 \\ \times 18 \\ \hline 144 \\ \times 18 \\ \hline 324 \end{array}$$



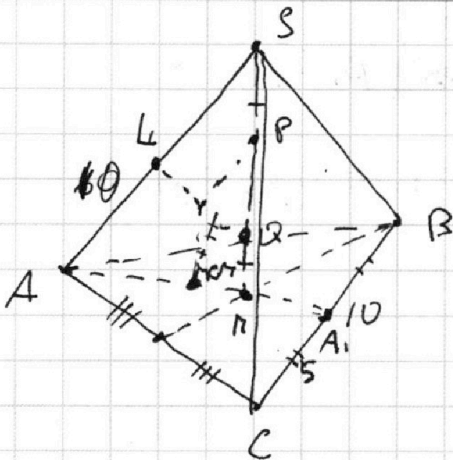
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

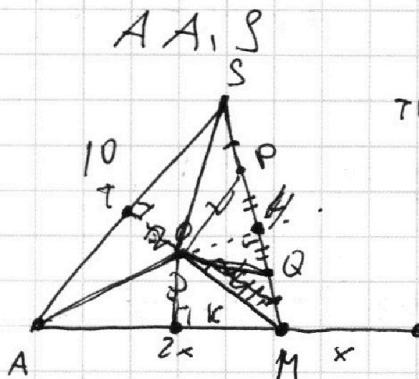
- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Рассмотрим плоскость



$SK = NM = TK = PK = MQ$   
 TK — радиус  
 $TK \perp AT = AK$  (касат.)

$TK \perp OS = MO$   
 (TK радиус, TP — высота = медиана)

$\frac{TO}{AM} = \frac{AS}{10}$   
 $x = 5$

$S_{ABC} = 60$

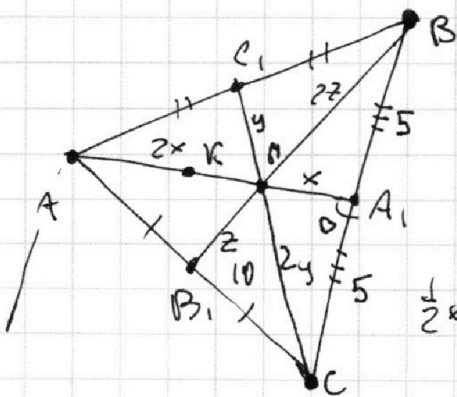
медиана делит угол угла на 2 угла  $2x$

TK — середина касается в т. K, TO — центр O касается

в этой плоскости  $\Rightarrow AS \perp ABC$  тк  $MS \in ASA_1$ ,

~~а  $ASA_1$  — медиана от вершины O~~

плоскость  $ABC$



Медианы делят  $ABC$  на 6 равнов.

$TP \Rightarrow ux$  площадь  $S = 10$

$\frac{1}{2} x \sin \beta \cdot 5 = 10$

$x = 5$

$x \sin \beta = 4 \Rightarrow \sin \beta = \frac{4}{5}$   
 $\cos \beta = \frac{3}{5}$

$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 3x \cdot 3y \cdot 3z = 27xyz$

По формуле Герона  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$  ~~взяли TP~~  
 $\cos \beta = \frac{2z}{5}$   
 и  $2y = 5x$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                                   |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{x+2.5+z}{2} & p_1(p_1-\frac{x}{2})(p_1-\frac{5}{2})(p_1-2z) &= \\ p_2 &= \frac{x}{2}+2.5+y & &= p_2(p_2-x)(p_2-5)(p_2-2y) \end{aligned}$$

по т. косинусов:  $\triangle A_1$

$$(2y)^2 = x^2 + 5^2 - 2 \cdot x \cdot 5 \cdot \cos B$$

$$4y^2 = 25 + 25 - 50 \cdot \frac{3}{5}$$

$$4y^2 = 20$$

$$y^2 = 5 \Rightarrow y = \sqrt{5}$$

по т. косинусов  $\triangle B_1 A_1$ :

$$(2z)^2 = 5^2 + 5^2 + 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{3}{5}$$

$$(2z)^2 = 50 + 50 \cdot \frac{3}{5}$$

$$4z^2 = 80$$

$$z^2 = 20$$

$$z^2 = 2\sqrt{5}$$

$$xy z = 5 \cdot \sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} = 50$$

$$A_1 A_1 B_1 B_1 C_1 C_1 = 27 \cdot 50 = \underline{\underline{1350}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

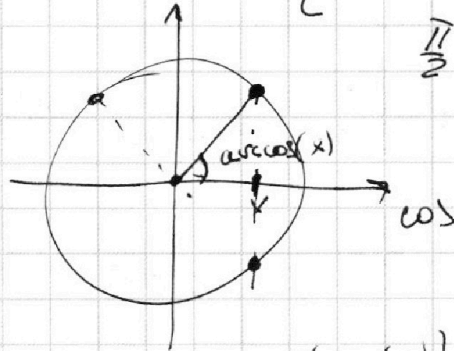
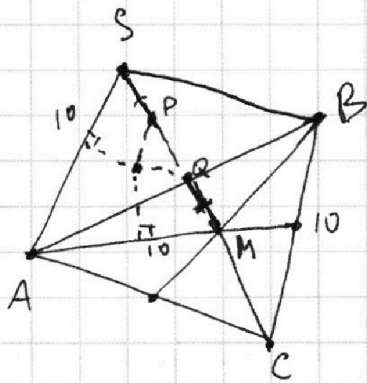
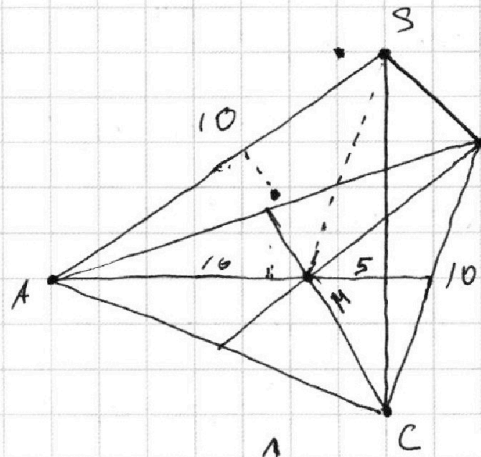
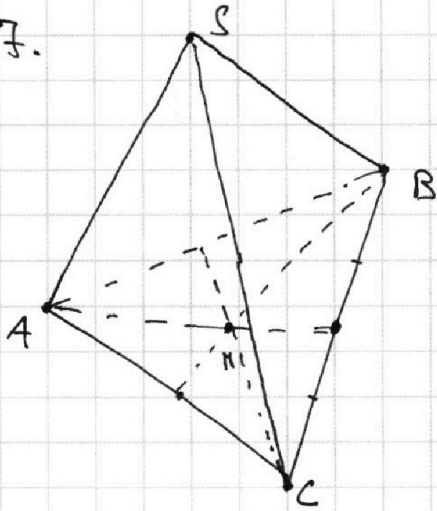
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

7.  
б)



$\frac{\pi}{2} - x$  уравне

$$\arccos(\cos(\alpha)) = ?$$

$$\alpha + 2\pi k$$

$$-\alpha + 2\pi k$$

$$0 \leq \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) \leq \pi$$

$$\frac{\pi}{2} - x$$



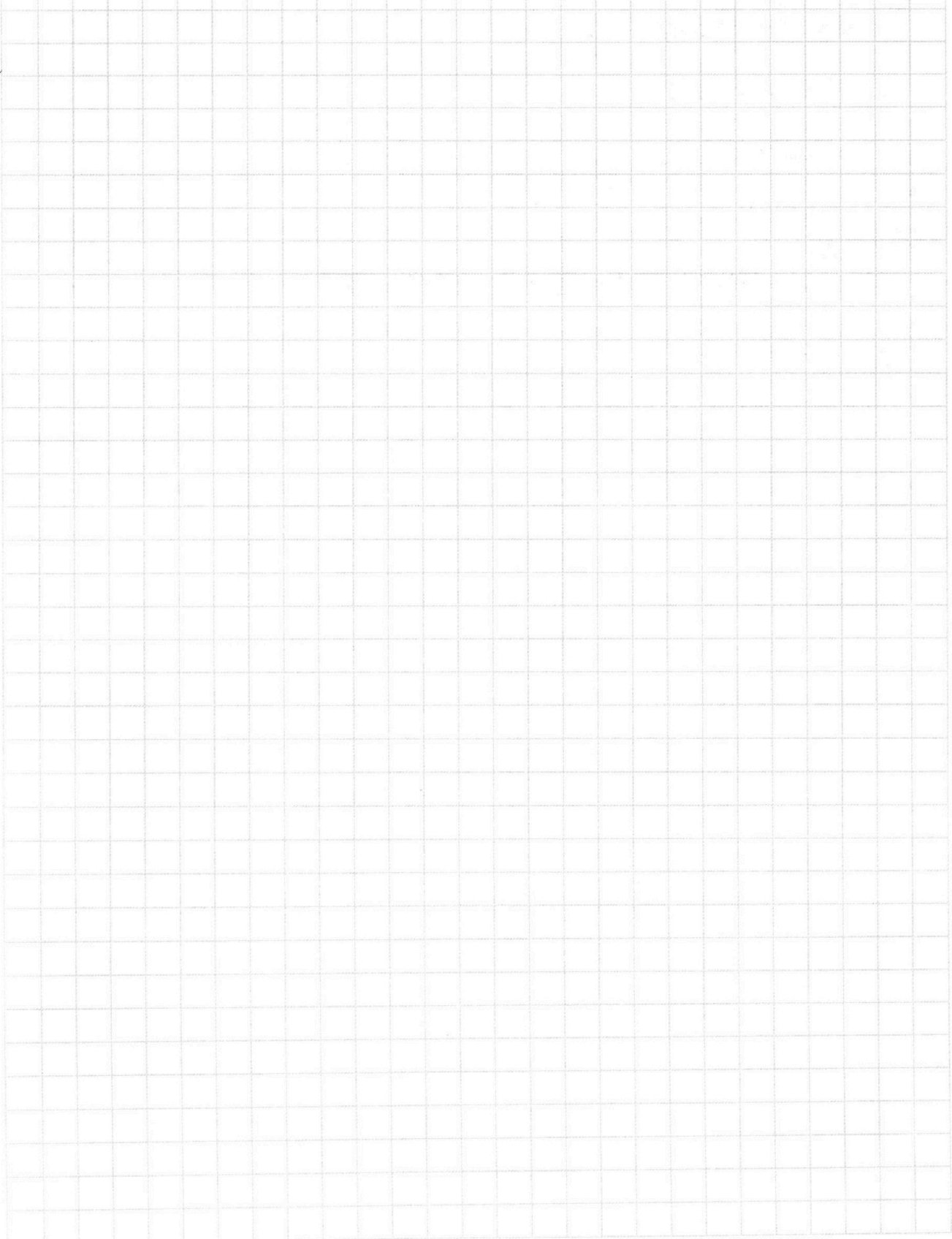
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_7 6x = a$$

$$(a+b)^2$$

$$\log_7 y = b$$

$$\frac{7}{2ab} = \frac{7}{(a+b)^2 - (a^2+b^2)}$$

$$a^4 - \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{a} + 4 = 0$$

$$(a^2+b^2)(a-b) = \frac{7}{(a+b)^2 - (a^2+b^2)}$$

$$b^4 + \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{b} + 4 = 0$$

$$(a+b)^2 - (a^2+b^2) / ((a^2+b^2)(a-b)) = 7$$

$$(a^2+b^2)(a-b)(a+b) - \frac{7}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = 0$$

$$(a^2+b^2)(a-b) - \frac{7}{2} \frac{1}{ab} = 0 \text{ или } a+b=0$$

$$a^3 - a^2b + ab^2 - b^3 - \frac{7}{2} \frac{1}{ab} = 0$$

$$a^4b - a^3b^2 + a^2b^3 - ab^4 = \frac{7}{2}$$

$$a^2b$$

$$a^2(a-b) + b^2(a-b)$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) - ab$$

$$a(a^2+b^2) - b(a^2+b^2) \quad ab(a^2+b^2)(a-b) = \frac{7}{2}$$

$$ab(a-b)(a^2+b^2) = \frac{7}{2}$$

$$3^2 \cdot 5^2$$

$$\sqrt{15 \cdot 15 \cdot 15 \cdot 15}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5.

$$\begin{cases} \log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4 & x, y > 0 \\ \log_7^4(y) + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} 7^5 - 4 & 6x, y \neq 1 \\ & 36x^2 \neq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \frac{3}{2} \log_{6x} 7 - 4 \\ \log_7^4(y) + 6 \log_y 7 = \frac{5}{2} \log_{y^2} 7 - 4 \end{cases}$$

$$\log_7^4 6x - \frac{7}{2} \log_{6x} 7 + 4 = 0$$

$$\log_7^4 y + \frac{7}{2} \log_y 7 + 4 = 0 \quad \frac{1}{\log_7 y} - \frac{1}{\log_7 6x}$$

$$\log_7^4 y - \log_7^4 6x + \frac{7}{2} (\log_y 7 + \log_{6x} 7) = 0$$

$$(\log_7^2 y + \log_7^2 6x) (\log_7 y - \log_7 6x) (\log_7 y + \log_7 6x) + \frac{7}{2} \left( \frac{\log_7 6x \cdot \log_7 y}{\log_7 6x \cdot \log_7 y} \right) = 0$$

$$\left( (\log_7^2 y + \log_7^2 6x) \left( \log_7 \frac{y}{6x} \right) + \frac{7}{2 \log_7 6x \cdot \log_7 y} \right) (\log_7 6x y) = 0$$

1)  $6x y = 1$   $\Rightarrow xy = \frac{1}{6}$

2)  $(\log_7^2 y + \log_7^2 6x) \cdot \log_7 \frac{y}{6x} + \frac{7}{2 \log_7 6x \cdot \log_7 y} = 0$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                                     |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3.  $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$

Проверка:

$$5 \cdot \arccos(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$5 \cdot \arccos(\frac{1}{2}) = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$$

$$5 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{9\pi}{6} + \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{5\pi}{3} = \frac{10\pi}{6}$$

$$1 = 1, \text{ верно}$$

$$5 \cdot (\frac{\pi}{2} - x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5x = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\pi = 6x$$

$$x = \frac{\pi}{6}$$

$$0 \leq \frac{\pi}{6} \leq \pi$$

Ответ:  $x = \frac{\pi}{6}$

$$\arccos(\cos(\alpha)) = \alpha,$$

если  $0 \leq \alpha \leq \pi$

$$\text{иначе } \arccos(\cos(\alpha)) = \frac{3\pi}{2} - \alpha$$

$$5 \cdot \arccos(0) = \frac{3\pi}{2} + \pi$$

$$5 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + \pi$$

верно

или

$$-5 \cdot (\frac{\pi}{2} - x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$5x - \frac{5\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$4x = 4\pi$$

$$x = \pi \quad 0 \leq \pi \leq \pi$$

Ответ:  $x = \frac{\pi}{6}$   
 $x = \pi$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab = \alpha \cdot 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$$

$$(abc)^2 = \alpha \beta \gamma \cdot 2^{17} \cdot 3^{21.5} \cdot 5^{32.5}$$

$$bc = \beta \cdot 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$$

$$ac = \gamma \cdot 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$$

$$\frac{ab \cdot bc}{ac} = b^2 = \frac{\alpha \cdot \beta \cdot 2^{20} \cdot 3^{26} \cdot 5^{32}}{\gamma \cdot 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}} = \frac{\alpha \cdot \beta}{\gamma} \cdot 2^6 \cdot 3^9 \cdot 5^{-11}$$

$$\frac{ab \cdot ac}{bc} = a^2 = \frac{\alpha \cdot \gamma \cdot 2^{21} \cdot 3^{28} \cdot 5^{57}}{\beta \cdot 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}} = \frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta} \cdot 2^8 \cdot 3^{13} \cdot 5^{39}$$

$$\frac{bc \cdot ac}{ab} = c^2 = \frac{\beta \cdot \gamma \cdot 2^{27} \cdot 3^{32} \cdot 5^{61}}{\alpha \cdot 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}} = \alpha \beta \cdot 2^{20} \cdot 3^{21} \cdot 5^{47}$$

$$\arccos(\sin \alpha) = x$$

$$\arccos(\sin \alpha) = \alpha$$

$$\cos \alpha = \sin x$$

$$\cos x = \sin \alpha$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

$$\sin^2 \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \quad 36 \cdot 6 = 180 + 36$$

$$\arccos(\sqrt{1 - \cos^2 \alpha})$$

$$\sin x \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad \sqrt{\frac{441}{25} - 9}$$

$$\sqrt{\frac{441 - 225}{25}} = \sqrt{\frac{216}{25}} = \frac{6\sqrt{6}}{5} = \frac{2\sqrt{6}}{15}$$