МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5\arccos(\sin x) = \dfrac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}\left(7^5\right) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
X						

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$ab = \alpha \cdot 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$

$bc = \beta \cdot 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$

$ac = \gamma \cdot 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$

чтобы abc было мин. нужно, чтобы и a, и b, и c было как можно меньше

$(abc)^2 = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot 2^{34} \cdot 3^{43} \cdot 5^{75} = \alpha\beta\gamma \cdot (2^{17})^2 \cdot 3 \cdot (3^{21})^2 \cdot (5^{37})^2 \cdot 5$

$(abc) = \sqrt{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot 3 \cdot 5} \cdot 2^{17} \cdot 3^{21} \cdot 5^{37}$

$\sqrt{\alpha\beta\gamma \cdot 15}$ нат число $\Rightarrow$ $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma$ ~~данный~~

имеет: чет ст. 2

нечет ст 3

нечет ст. 5

$\frac{ab \cdot bc}{ac} = b^2 = \frac{\alpha \cdot \beta}{\gamma} \cdot 2^6 \cdot 3^9 \cdot 5^{-11}$

$b = \sqrt{\frac{\alpha \cdot \beta}{\gamma} \cdot 3 \cdot 5} \cdot 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^{-6}$

$\frac{ab \cdot ac}{bc} = a^2 = \frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta} \cdot 2^8 \cdot 3^{13} \cdot 5^{39} =$

$a = \sqrt{\frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta} \cdot 3 \cdot 5} \cdot 2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^{19}$

Ответ: $abc = 2^{17} \cdot 3^{23} \cdot 5^{39}$

$\Uparrow$

$k_{\min} = 1$

$\alpha = \beta = \gamma = 15$

$c = \sqrt{\frac{\beta \cdot \gamma}{\alpha} \cdot 3 \cdot 5} \cdot 2^{10} \cdot 3^{10} \cdot 5^{23}$

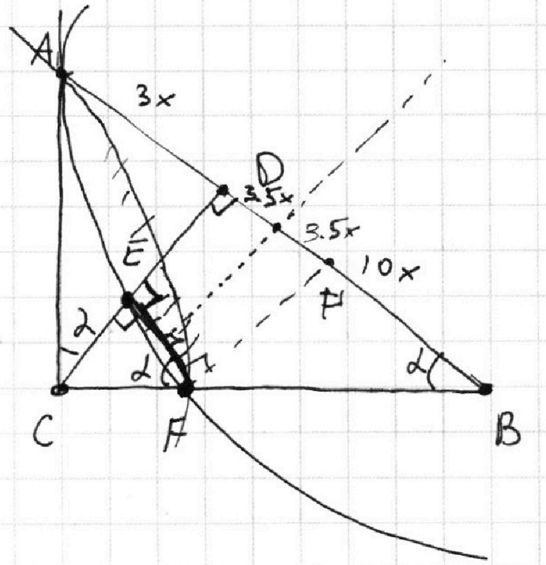
$\Rightarrow$ если $\frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta} = \frac{\beta \cdot \gamma}{\alpha} = \frac{\alpha \cdot \beta}{\gamma} = 15k^2$, то a, b, c = нат.
$k \in \mathbb{N}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



т.к. $AB \parallel EF$, то

$\angle DEF = 90^\circ$

и $\triangle CEF \sim \triangle CDB$

$\triangle ACD$ тоже подобен

тр $\triangle CBD$ =>

$$\frac{3x}{CD} = \frac{CD}{10x}$$

$$CD = \sqrt{30}\,x$$

сер.пер. EF делит

AB пополам. (6.5x) по 2

S_{CEF} – площадь $\triangle CEF$

=> по Т. Пифагора:

$CB = \sqrt{130}\,x$; $AC = \sqrt{39}\,x$

$$S_{CDB} = \left(\frac{DC}{EC}\right)^2 \cdot S_{CEF}$$

$$S_{ADC} = \left(\frac{AD}{DC}\right)^2 \cdot \underbrace{S_{CEF} \cdot \left(\frac{DC}{EC}\right)^2}_{S_{CDB}} = \left(\frac{AD}{EC}\right)^2 \cdot S_{CEF}$$

$$\frac{S_{ADC}}{S_{CEF}} = \left(\frac{AD}{EC}\right)^2$$

Серпер пар-ых хорд совпадают, поэтому

мы, при проецировании EF на AB можем

считать, что $DF' = 7x$ (т.к серпер делит AB на 2р.г.)

$\boxed{EF = 7x}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

по подобию тр:

$$\frac{CE}{EF}=\frac{CD}{DB}$$

$$CE=7x\cdot\frac{\sqrt{30}x}{10x}$$

$$\frac{S_{ADC}}{S_{CEF}}=\left(\frac{3x}{\frac{7}{10}\cdot\sqrt{30}x}\right)^2=\left(\frac{30}{7\sqrt{30}}\right)^2=\frac{30}{49}$$

Ответ: $\frac{S_{ADC}}{S_{CEF}}=\frac{30}{49}$

3. $5\cdot \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2}+x$

$\arccos(\sin x) = \arccos(\cos(\frac{\pi}{2}-x))$

$0 \le \arccos(\cos(\frac{\pi}{2}-x)) \le \pi$

$\left[\begin{array}{l} 0 \le \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k_1 \le \pi \\ 0 \le x - \frac{\pi}{2} + 2\pi k_2 \le \pi \end{array}\right.$ $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$

1)

$5\cdot\left(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k_1\right) = \frac{3\pi}{2}+x$

$\frac{5\pi}{2} - 5x + 10\pi k_1 = \frac{3\pi}{2}+x$

$\pi + 10\pi k_1 = 6x$

$\boxed{\frac{\pi}{6} + \frac{10}{6}\pi k_1 = x}$

$0 \le \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} - \frac{10}{6}\pi k_1 + 2\pi k_1 \le \pi$

$0 \le \frac{1}{3} - \frac{1}{6}k_1 \le 1$

$0 \le 2 - k_1 \le 6$

$-6 \le k_1 - 1 \le 0$

$\boxed{-5 \le k_1 \le 1}$

$x = \frac{\pi}{6} + \frac{10}{6}\pi k_1$,

где $k_1 \in \mathbb{Z} \in [-5; 1]$

2)

$5\left(x - \frac{\pi}{2} + 2\pi k_2\right) = \frac{3\pi}{2}+x$

$5x - \frac{5\pi}{2} + 10\pi k_2 = \frac{3\pi}{2}+x$

$4x = 4\pi - 10\pi k_2$

$\boxed{x = \pi - \frac{10}{4}\pi k_2}$

$0 \le \pi - \frac{10}{4}\pi k_2 - \frac{\pi}{2} + 2\pi k_2 \le \pi$

$0 \le -\frac{1}{2}\pi k_2 + \frac{\pi}{2} \le \pi$

$0 \le -k_2 + 2 \le 2$

$\boxed{0 \le k_2 \le 2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\frac{\pi}{6}+\frac{10}{6}\pi k_1 \\ k_1\in[-5;1] \end{cases} \quad k_1\in\mathbb{Z} \\ \begin{cases} x=\pi-\frac{10}{4}\pi k_2 \\ k_2\in[0;2] \end{cases} \quad k_2\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Ответ:

$x\in\{\frac{11}{6}\pi;\ \frac{\pi}{6};\ -\frac{3}{2}\pi;\ -\frac{19}{6}\pi;\ -\frac{29}{6}\pi;\ -\frac{39}{6}\pi;\ -\frac{49}{6}\pi;$

$\pi;\ -4\pi\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

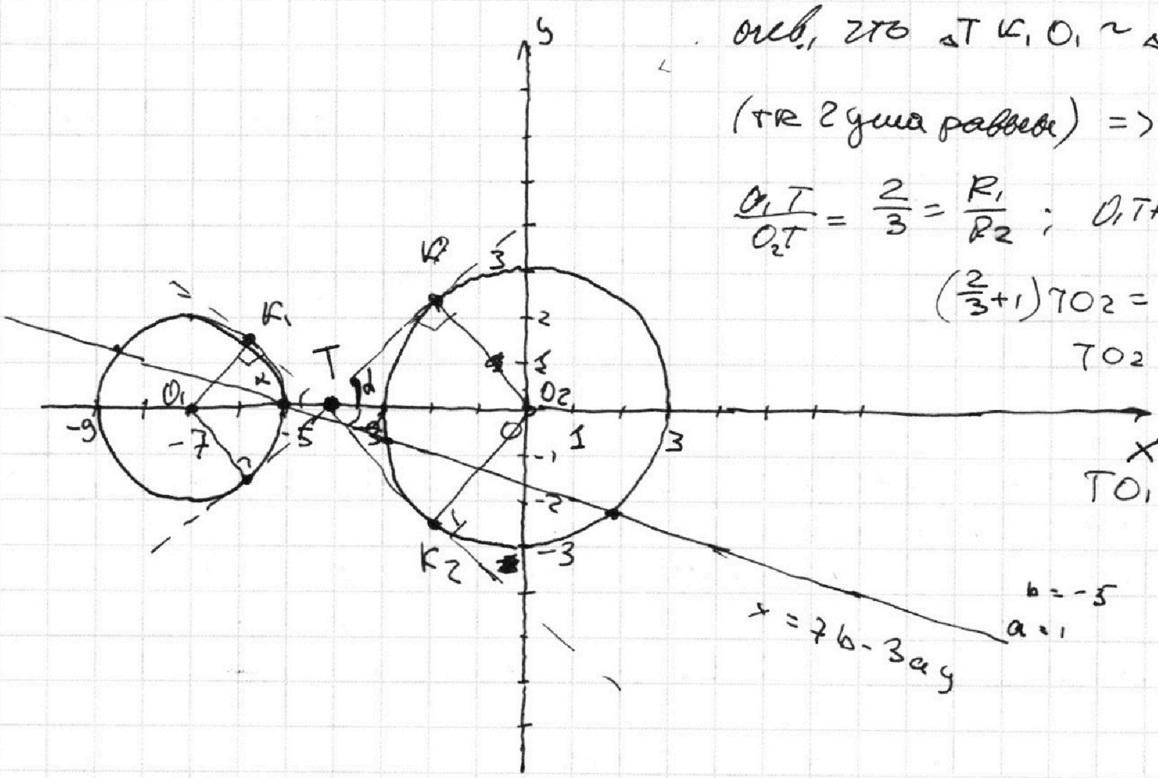
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4.

$$\begin{cases} x+3ay-7b=0 \\ (x^2+14x+y^2+45)(x^2+y^2-9)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=7b-3ay \\ \left[\begin{array}{l} (x+7)^2+y^2=2^2 \leftarrow \text{окр. с } R=2,\ O(-7;0) \\ x^2+y^2=3^2 \leftarrow \text{окр. с } R=3,\ O(0;0) \end{array}\right. \end{cases}$$



очев., что $\triangle TK_1O_1 \sim \triangle TK_2O_2$

(тк 2 угла равны) =>

$\frac{O_1T}{O_2T} = \frac{2}{3} = \frac{R_1}{R_2}$; $O_1T + TO_2 = 7$

$(\frac{2}{3}+1)TO_2 = 7$

$TO_2 = \frac{21}{5}$

$TO_1 = \frac{14}{5}$

$x = 7b - 3ay$ это прямая, которая пересек ось абсцисс в т. $(7b;0)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Нужно найти такие a, чтобы при каком-то b было 4 решения (прямая пересекает обе окружности в 2-х точках, расстояния до прямых меньше радиусов окружностей):

$ax+by+c=0$

$1\cdot x+3a\cdot y-7b=0$

$$\rho_1=\frac{|1\cdot(-7)+3a\cdot(0)-7b|}{\sqrt{1+(3a)^2}}<2$$

$$\rho_2=\frac{|0+0-7b|}{\sqrt{1+(3a)^2}}<3$$

$$\begin{cases}\dfrac{|3a-7(b+1)|}{\sqrt{1+(3a)^2}}<2\\ \dfrac{|7b|}{\sqrt{1+3a^2}}<3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|3a-7(b+1)|<2\sqrt{1+(3a)^2}\\ |7b|<3\sqrt{1+(3a)^2}\end{cases}$$

Можно заметить, что ~~значения a, которые находятся между значениями положения~~ $(-\infty;a_0)\cup(a_0;+\infty)$ нам подходят, где a_0 – параметр при котором существует b, что прямая кас. обеих окр-ей.
касания двух окр. одновременно будут нам подходить (см. рисунок)

Из выше опис-ой системы (помимо рисунка):

$$|3a_0|=|ctg(\alpha)|=\frac{TK_2}{OK_2}=\frac{\sqrt{\cancel{\ }-(TK_2)^2}}{O3}=\frac{\sqrt{\left(\frac{21}{5}\right)^2-3^2}}{3^2}=\frac{2\sqrt{6}}{15}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$|3a_0| = \frac{2\sqrt{6}}{15}$

$|a_0| = \frac{2\sqrt{6}}{45}$ — это крайние значения при которых будут ≥ 2 решений $\Rightarrow$ подсобев $a=1$, $a=0$ (и поняв, что тем макс 2 решения исходя из рисунка для $a=0$, и 4 реш для $a=1$) можно сделать вывод, что удв-ик нас пар-м a: $a \in \left(-\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{45}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{6}}{45}; +\infty\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5.

$\log_7^4(6x) - 2\cdot\log_{6x}7 = \log_{36x^2}343 - 4$

$343 = 7^3 = 49^{\frac{3}{2}}$

$36x^2 \neq 1$

$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x}7 - \frac{3}{2}\cdot\log_{6x}7 + 4 = 0$

$6x \neq 1$

$x > 0$

$\underline{\log_7^4(6x) - \frac{7}{2}\log_{6x}7 + 4 = 0}$

$\log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}7^5 - 4$

$y > 0$

$y \neq 1$

$\log_7^4 y + 6\log_y 7 - \frac{5}{2}\log_y 7 + 4 = 0$

Замена:

$a = \log_7 6x$

$\underline{\log_7^4 y + \frac{7}{2}\log_y 7 + 4 = 0}$

$b = \log_7 y$

$\begin{cases} a^4 - \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{a} + 4 = 0 \\ b^4 + \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{b} + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow 8 + a^4 + b^4 = \frac{7}{2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$

$8 + a^4 + b^4 = \frac{7}{2}\left(\frac{b-a}{ab}\right) \geq \frac{16}{7}$

$\vee$ 0

$\Downarrow$

$a^4 - b^4 = \frac{7}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$

$\frac{b-a}{ab} \geq 0$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} b < a \\ ab < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} b > a \\ ab > 0 \end{cases} \end{array}\right.$

$(a^2 + b^2)(a+b)(a-b) = \frac{7}{2}\,\frac{a+b}{ab}$

$\left[\begin{array}{l} (a+b) = 0 \Rightarrow \log_7 6xy = 0 \Rightarrow 6xy = 1 \quad xy = \frac{1}{6} \\ (a^2+b^2)(a-b) = \frac{7}{2ab} \end{array}\right.$

$2(a^2 + b^2) = \frac{7}{ab(a-b)}$

$\vee$ 0

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} ab < 0 \\ b < a \end{cases} \Rightarrow \frac{7}{ab(a-b)} < 0 \\ \begin{cases} ab > 0 \\ b > a \end{cases} \Rightarrow \frac{7}{ab(a-b)} < 0 \end{array}\right.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Это значит, что у 2020 ур-ий нет решений, тк одна часть больше нуля, а другая меньше $\Rightarrow$ ед-ое значение:

$a+b=0 \Rightarrow xy=\frac{1}{6}$

Ответ: $xy=\frac{1}{6}$

МФТИ

6.

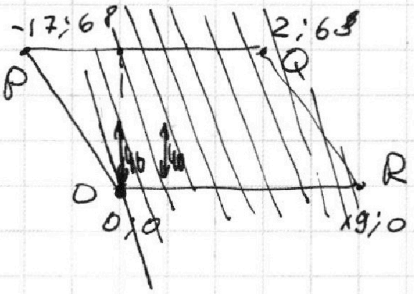
$4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$

$\Updownarrow$

a-параметр

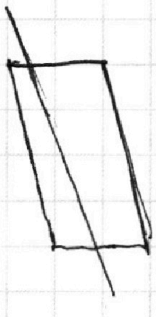
$$\begin{cases} 4x_2 + y_2 = a \\ 4x_1 + y_1 = -(40-a) = a-40 \end{cases}$$

=> эти прямые ∥ пар-мы



!!! прямые параллельна сторонам пар-мма (PO и QR)

т.к. $\frac{68}{-17} = -4$

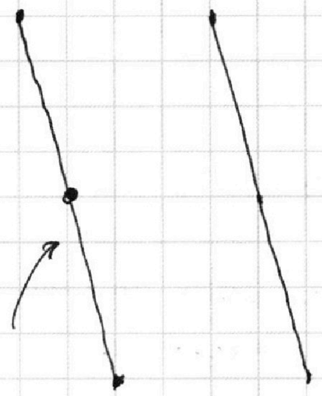


расстояние от прямой до прямой (по гор-ли если смотреть) можно найти: $4(x_2-x_1)+(\cancel{y_2-y_1})^{0} = 40$

$x_2 - x_1 = 10$

рассмотрим 10 таких пар прямых (т.к. крайние положения $x_1(y_1=0)$ $x_2(y_2=0)$ это $x_1=0$ $x_2=10$ и $x_1=9$ $x_2=0$

Для каждой прямой парой существует одинаковое кол-во пар точек x_1y_1 и x_2y_2



посчитаем точки, лежащие на прямой в пределах пар-ма с целочисл. коорд.* это точки

*(для каждого $x \in \mathbb{Z}$ найдется y, принад. к $\mathbb{Z}$)

то на отрезке $0 \le y \le 68$ этих точек у каждой прямой $\frac{68}{4} = 18$ (для $a=0$ это точки: $0;0$; $-1;4$; $-2;8$; ...; $-17;68$)

$\Rightarrow$ для пары прямых кол-во пар точек 18^2

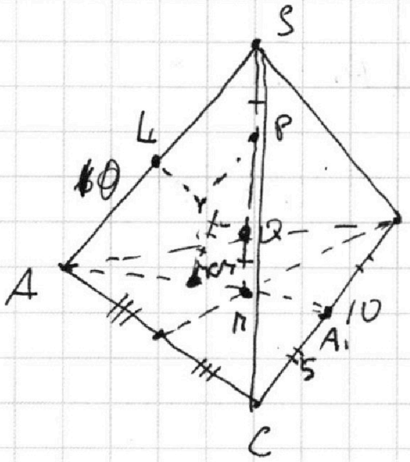
$\Rightarrow$ Ответ: $10 \cdot 18^2 =$ ~~8100~~ $= 3240$

$$\begin{array}{r} 18 \\ \times\ 18 \\ \hline 144 \\ +\ 18 \\ \hline 324 \end{array}$$

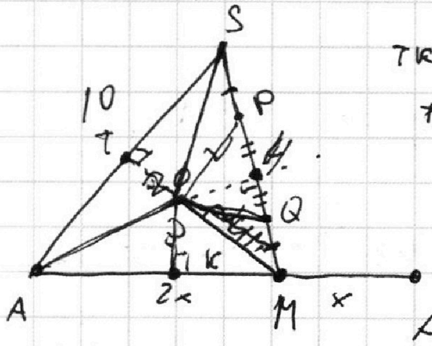
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Рассмотрим плоскость AA_1S



$SH = HM$ тк $PH = HQ$ тк сферы

тк $AT = AK$ (касат.)

по

и $SO = MO$

(тк равн. тр

(высота = медиана)

То $AM = AS = 10$

$\boxed{x=5}$

$S_{ABC} = 60$

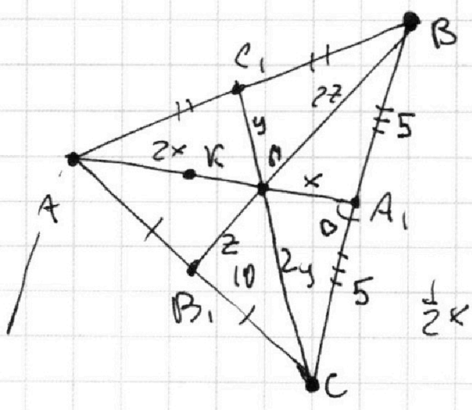
медианы делят друг друга в отр. $2 \kappa 1$

тк сфера касается в т. K, что центр O лежит

в этой плоскости => ~~AS ⊥ ABC~~ тк ~~MS ∈ ASA~~$_1$,

а ~~ASA_1 содержит прямую OM~~

плоскость ABC



Медианы делят

ABC на 6 равновел.

тр => их площадь $S = 10$

$\boxed{x=5}$

$\frac{1}{2}x \sin\beta \cdot 5 = 10$

$x \sin\beta = 4 \Rightarrow \sin\beta = \frac{4}{5}$

$\cos\beta = \frac{3}{5}$

$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 3x \cdot 3y \cdot 3z = \underline{27xyz}$

~~По форм. Герона $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$~~

~~возьмем тр~~

~~сост. 2z, 5, x~~

~~и 2y, 5, x~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\cancel{p_1 = \frac{x}{2} + 2.5 + z}$ $\qquad \cancel{p_1\left(p_1 - \frac{x}{2}\right)(p_1 - 5)(p_1 - 2z) =}$

$\cancel{p_2 = \frac{x}{2} + 2.5 + y}$ $\qquad \cancel{= p_2(p_2 - x)(p_2 - 5)(p_2 - 2y)}$

по т. косинусов: CMA_1

$$(2y)^2 = x^2 + 5^2 - 2 \cdot x \cdot 5 \cdot \cos\beta$$

$$4y^2 = 25 + 25 - 50 \cdot \frac{3}{5}$$

$$4y^2 = 20$$

$$y^2 = 5 \Rightarrow y = \sqrt{5}$$

по т. косинусов BMA_1:

$$(2z)^2 = 5^2 + 5^2 + 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{3}{5}$$

$$(2z)^2 = 50 + 50 \cdot \frac{3}{5}$$

$$4z^2 = 80$$

$$z^2 = 20$$

$$z^2 = 2\sqrt{5}$$

$$xyz = 5 \cdot \sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} = 50$$

$$A_1A \cdot B_1B \cdot C_1C = 27 \cdot 50 = \underline{1350}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

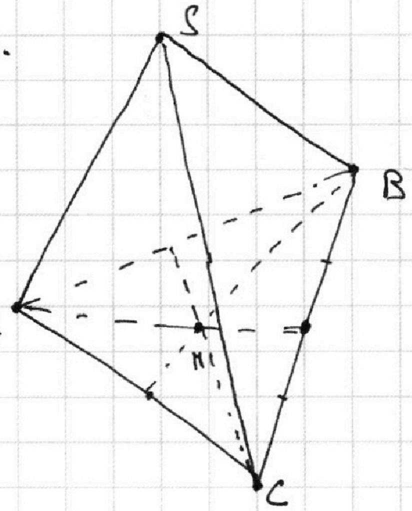
1 2 3 4 5 6 7

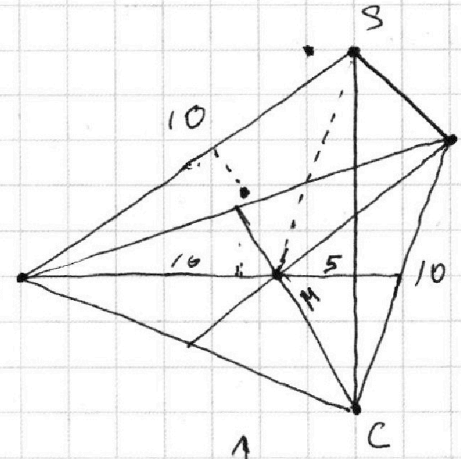
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

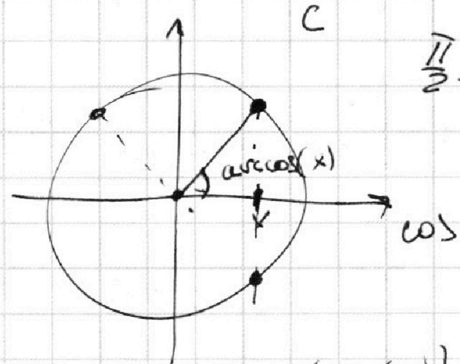
МФТИ

7.

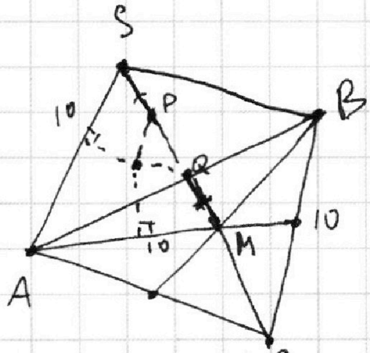
б)







$\frac{\pi}{2}$ - x любое



$\arccos(\cos(\alpha))$ - ?

$\cancel{\pi}$ $\alpha + 2\pi k$

$-\alpha + 2\pi k$

$0 \le \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) \le \pi$

$\frac{\pi}{2} - x$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\log_7 6x = a$

$(a+b)^n$

$\log_7 y = b$

$\frac{7}{2ab} = \frac{7}{(a+b)^2-(a^2+b^2)}$

$a^4 - \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{a} + 4 = 0$

$(a^2+b^2)(a-b) = \frac{7}{(a+b)^2-(a^2+b^2)}$

$b^4 + \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{b} + 4 = 0$

$((a+b)^2-(a^2+b^2))((a^2+b^2)(a-b)) = 7$

$(a^2+b^2)(a-b)(a+b) - \frac{7}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) = 0$

$(a^2+b^2)(a-b) - \frac{7}{2}\frac{1}{ab} = 0$ или $a+b=0$

$a^3 - a^2b + ab^2 - b^3 - \frac{7}{2}\frac{1}{ab} = 0$

$a^4b - a^3b^2 + a^2b^3 - ab^4 = \frac{7}{2}$

a^2

$a^2(a-b) + b^2(a-b)$

$\cancel{(a-b)(a^2+ab+b^2) - ab(}$

$a(a^2+b^2) - b(a^2+b^2)$ $ab(a^2+b^2)(a-b) = \frac{7}{2}$

$ab(a-b)(a^2+b^2) = \frac{7}{2}$

$3^2 5^2$

$\sqrt{15\cdot15\cdot15\cdot15}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

5.

$$\begin{cases} \log_7^4(6x) - 2\log_{6x}7 = \log_{36x^2}343 - 4 \\ \log_7^4(y) + 6\log_y 7 = \log_{y^2}7^5 - 4 \end{cases}$$

$x, y > 0$
$6x, y \neq 1$
$36x^2 \neq 1$

$$\begin{cases} \log_7^4(6x) - 2\log_{6x}7 = \frac{3}{2}\cdot\log_{6x}7 - 4 \\ \log_7^4(y) + 6\cdot\log_y 7 = \frac{5}{2}\log_{y}7 - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_7^4 6x - \frac{7}{2}\log_{6x}7 + 4 = 0 \\ \log_7^4 y + \frac{7}{2}\log_y 7 + 4 = 0 \end{cases}$$

$\frac{1}{\log_7 y} - \frac{1}{\log_7 6x}$

$$\log_7^4 y - \log_7^4 6x + \frac{7}{2}(\log_y 7 + \log_{6x}7) = 0$$

$$(\log_7^2 y + \log_7^2 x)(\log_7 y - \log_7 x)(\log_7 y + \log_7 6x) + \frac{7}{2}\left(\frac{\log_7 6x + \log_7 y}{\log_7 6x\cdot\log_7 y}\right) = 0$$

$$\left((\log_7^2 y + \log_7^2 x)(\log_7 \frac{y}{x}) + \frac{7}{2\log_7 6x\cdot\log_7 y}\right)(\log_7 6xy) = 0$$

1) $\underline{6xy = 1}$ $\Rightarrow xy = \frac{1}{6}$

2) $(\log_7^2 y + \log_7^2 x)\cdot\log_7\frac{y}{x} + \frac{7}{2\log_7 6x\log_7 y} = 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

3.

$$5\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2}+x$$

$$5\cdot\arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right) = \frac{3\pi}{2}+x$$

$$5\cdot\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \frac{3\pi}{2}+x$$

$$\frac{5\pi}{2}-5x = \frac{3\pi}{2}+x$$

$$\pi = 6x$$

$$\boxed{x=\frac{\pi}{6}} \qquad 0\le\frac{\pi}{6}\le\pi$$

~~Ответ: $x=\frac{\pi}{6}$~~

или

$$-5\cdot\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \frac{3\pi}{2}+x$$

$$5x-\frac{5\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}+x$$

$$4x = 4\pi$$

$$\boxed{x=\pi} \qquad 0\le\pi\le\pi$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6} \\ x=\pi \end{array}\right.$

Проверка:

$$5\cdot\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{6}$$

$$5\cdot\frac{\pi}{3} = \frac{9\pi}{6}+\frac{\pi}{6}$$

$$\frac{5\pi}{3} = \frac{10\pi}{6}$$

$1=1$, верно

$\arccos(\cos(\alpha)) = \alpha$,

если $0\le\alpha\le\pi$

иначе $\arccos(\cos(\alpha)) = |\alpha| \cdot \pi$

$$5\cdot\arccos(0) = \frac{3\pi}{2}+\pi$$

$$5\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}+\pi$$

верно

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$ab = \alpha \cdot 2^{7} \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$ $(abc)^{2} = \sqrt{\alpha\beta\cdot\gamma} \cdot 2^{17} \cdot 3^{21.5} \cdot 5^{37.5}$

$bc = \beta \cdot 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$

$ac = \gamma \cdot 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$

$\frac{ab\cdot bc}{ac} = b^2 = \frac{\alpha\cdot\beta\cdot 2^{20}\cdot 3^{26}\cdot 5^{32}}{\gamma\cdot 2^{14}\cdot 3^{17}\cdot 5^{43}} = \frac{\alpha\cdot\beta}{\gamma}\cdot 2^{6}\cdot 3^{9}\cdot 5^{-11}$

$\frac{ab\cdot ac}{bc} = a^2 = \frac{\alpha\cdot\gamma}{\beta}\cdot\frac{2^{21}\cdot 3^{28}\cdot 5^{57}}{2^{13}\cdot 3^{15}\cdot 5^{18}} = \frac{\alpha\cdot\gamma}{\beta} 2^{8}\cdot 3^{13}\cdot 5^{39}$

$\frac{bc\cdot ac}{ab} = c^2 = \frac{\beta\cdot\gamma}{\alpha}\cdot\frac{2^{27}\cdot 3^{32}\cdot 5^{61}}{2^{7}\cdot 3^{11}\cdot 5^{14}} = \frac{\beta\gamma}{\alpha} 2^{20}\cdot 3^{21}\cdot 5^{47}$

$\arccos(\sin\alpha) = x$ $\arccos(\sin x) = \alpha$

$\cos\alpha = \sin x$

$\cos x = \sin\alpha$ $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$

$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$ $36\cdot 6 =$

$180+36$

$\arccos\left(\sqrt{1-\cos^2\alpha}\right)$

$\sqrt{1-x^2}$

$\sin x$ $\cos(\frac{\pi}{2}-x)$ $\sqrt{\frac{441}{25}-9}$

$=$

$\sqrt{\frac{\frac{441-225}{25}}{9}} = \frac{\sqrt{\frac{216}{25}}}{9} = \frac{6\sqrt{6}}{5\cdot 9} = \frac{2\sqrt{6}}{15}$