



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-17; 68)$, $Q(2; 68)$ и $R(19; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab = \alpha \cdot 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$$

$$bc = \beta \cdot 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$$

$$ac = \gamma \cdot 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$$

чтобы abc было
целым, нужно, чтобы
и a, и b, и c было
как можно меньше

$$(abc)^2 = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot 2^{34} \cdot 3^{43} \cdot 5^{75} = \alpha \beta \gamma \cdot (2^{17})^2 \cdot 3 \cdot (3^{21})^2$$

$$(abc) = \sqrt{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot 3 \cdot 5} \cdot 2^{17} \cdot 3^{21} \cdot 5^{37}$$

$$\sqrt{\alpha \beta \gamma \cdot 15} \text{ нат число} \Rightarrow \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \text{ квадрат}$$

$$\frac{ab \cdot bc}{ac} = b^2 = \frac{\alpha \cdot \beta}{\gamma} \cdot 2^6 \cdot 3^9 \cdot 5^{-11}$$

имеет: чет ст. 2

натур ст 3

натур ст. 5

$$b = \sqrt{\frac{\alpha \cdot \beta}{\gamma} \cdot 3 \cdot 5} \cdot 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^{-6}$$

$$\frac{ab \cdot ac}{bc} = a^2 = \frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta} \cdot 2^8 \cdot 3^{13} \cdot 5^{39}$$

$$a = \sqrt{\frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta} \cdot 3 \cdot 5} \cdot 2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^{19}$$

$$c = \sqrt{\frac{\beta \cdot \gamma}{\alpha} \cdot 3 \cdot 5} \cdot 2^{10} \cdot 3^{10} \cdot 5^{23}$$

Ответ: $abc = 2^{17} \cdot 3^{23} \cdot 5^{39}$

Кому = 1

$$\alpha = \beta = \gamma = 15$$

$$\Rightarrow \text{если } \frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta} = \frac{\beta \cdot \gamma}{\alpha} = \frac{\alpha \cdot \beta}{\gamma} = 15 \text{ то } a, b, c = \text{нат.}$$

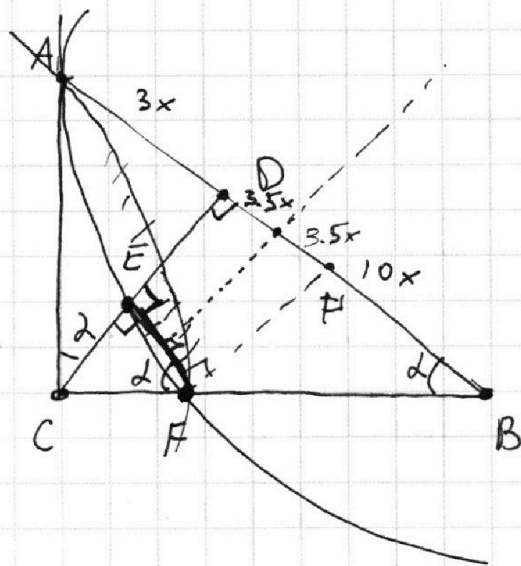
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



т.к. $AB \parallel EF$, то

$$\angle DEF = 90^\circ$$

и $\triangle CEF \sim \triangle CBD$

$\triangle ACD$ — острый угол

т.к. $\triangle CBD \Rightarrow$

$$\frac{3x}{CD} = \frac{CD}{10x}$$

$$CD = \sqrt{30}x$$

сер. пер. EF делит

AB пополам. $(6.5x)$ по 2

S_{CEF} — площадь $\triangle CEF$

\Rightarrow по т. Пифагора:

$$CB = \sqrt{130}x; AC = \sqrt{39}x$$

$$S_{CDB} = \left(\frac{DC}{EC}\right)^2 \cdot S_{CEF}$$

$$S_{ABC} = \underbrace{\left(\frac{AD}{DC}\right)^2 \cdot S_{CEF} \cdot \left(\frac{DC}{EC}\right)^2}_{S_{CDB}} = \left(\frac{AD}{EC}\right)^2 \cdot S_{CEF}$$

$$\frac{S_{ADC}}{S_{CEF}} = \left(\frac{AD}{EC}\right)^2$$

серии сер. пер. хорд совпадают, поэтому

иногда, при проецировании EF на AB можно

сказать, что $DF' = 7x$ (т.к. серия делит AB на 2 р. 2.)

$$\boxed{EF = 7x}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

по подобию \triangle P:

$$\frac{CE}{EF} = \frac{CP}{AB}$$

$$CE = 7x \cdot \frac{\sqrt{30}x}{10x}$$

$$\frac{S_{APC}}{S_{CEF}} = \left(\frac{3x}{\frac{7}{10} \cdot \sqrt{30}x} \right)^2 = \left(\frac{30}{7\sqrt{36}} \right)^2 = \left(\frac{30}{49} \right)$$

Ответ: $\frac{S_{APC}}{S_{CEF}} = \frac{30}{49}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3. 5. $\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$

$$\arccos(\sin x) = \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x))$$

~~Вспомогательная:~~

$$0 \leq \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) \leq \pi$$

$$\begin{cases} 0 \leq \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k_1 \leq \pi \\ 0 \leq x - \frac{\pi}{2} + 2\pi k_2 \leq \pi \end{cases}$$

$$k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$$

1)

$$5 \cdot (\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k_1) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5x + 10\pi k_1 = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\pi + 10\pi k_1 = 6x$$

$$\boxed{\frac{\pi}{6} + \frac{10}{6}\pi k_1 = x}$$

$$0 \leq \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} - \frac{10}{6}\pi k_1 + 2\pi k_1 \leq \pi$$

$$0 \leq \frac{1}{3} - \frac{1}{6}k_1 \leq 1$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{10}{6}\pi k_1,$$

$$0 \leq 2 - k_1 \leq 6$$

$$\text{тогда } k_1 \in \mathbb{Z} \in [-5; 1]$$

$$-6 \leq k_1 - 1 \leq 0$$

$$\boxed{-5 \leq k_1 \leq 1}$$

2) $5(x - \frac{\pi}{2} + 2\pi k_2) = \frac{3\pi}{2} + x$

$$5x - \frac{5\pi}{2} + 10\pi k_2 = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$0 \leq \pi - \frac{10}{4}\pi k_2 - \frac{\pi}{2} + 2\pi k_2 \leq \pi$$

$$0 \leq -\frac{1}{2}\pi k_2 + \frac{\pi}{2} \leq \pi$$

$$4x = 4\pi - 10\pi k_2$$

$$0 \leq -k_2 + 2 \leq 2$$

$$\boxed{x = \pi - \frac{10}{4}\pi k_2}$$

$$\boxed{0 \leq k_2 \leq 2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + \frac{10}{6} \pi k_1 \\ k_1 \in [-5; 5] \end{array} \right\} k_1 \in \mathbb{Z}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = \pi - \frac{10}{4} \pi k_2 \\ k_2 \in [0; 2] \end{array} \right\} k_2 \in \mathbb{Z}$$

Ответ:

$$x \in \left\{ \frac{11}{6} \pi; \frac{\pi}{6}; -\frac{3}{2} \pi; -\frac{19}{6} \pi; -\frac{29}{6} \pi; -\frac{39}{6} \pi; -\frac{49}{6} \pi; \right.$$
$$\left. \pi; -4\pi \right\}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4.

За.

$$x + 3ay - 7b = 0$$

$$(x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0$$

$$x = 7b - 3ay$$

$$(x+7)^2 + y^2 = 2^2 \leftarrow \text{окр. с } R=2, O(-7;0)$$

$$x^2 + y^2 = 3^2 \leftarrow \text{окр. с } R=3, O(0;0)$$

мбв, это $\Delta TK_1O_1 \sim \Delta TK_2O_2$

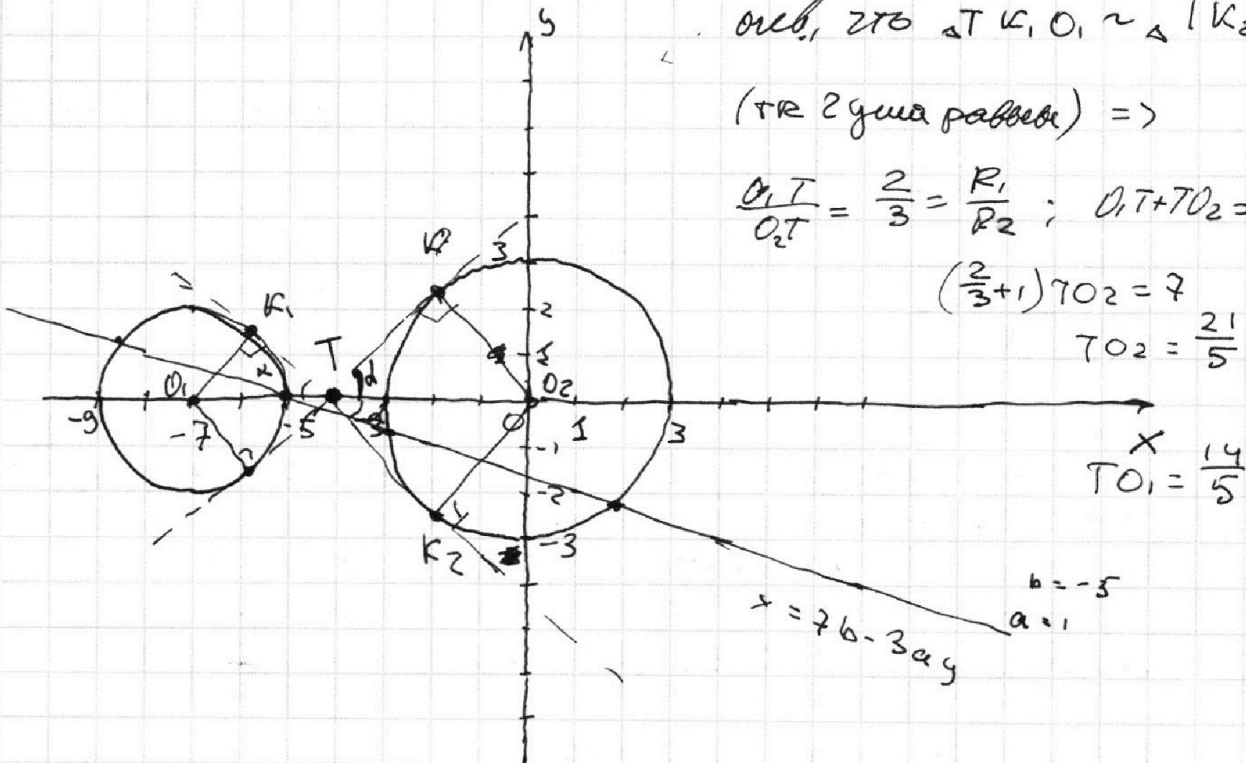
(тр 2 угла равны) \Rightarrow

$$\frac{O_1T}{O_2T} = \frac{2}{3} = \frac{R_1}{R_2}; O_1T + O_2T = 7$$

$$\left(\frac{2}{3} + 1\right) O_2T = 7$$

$$O_2T = \frac{21}{5}$$

$$O_1T = \frac{14}{5}$$



$x = 7b - 3ay$ это прямая, которая пересекает ось абсцисс в т. $(7b; 0)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Нужно найти такие a , чтобы каскалы-то b
было 4 решения (прямая пересекает обе окружности
в 2-х точках, расстояния до прямых центра
радиусов окружностей):

$$P_1 = \frac{|1 \cdot (-7) + 3a \cdot (0) - 7b|}{\sqrt{1 + (3a)^2}} < 2$$

$$ax + by + c = 0$$

$$1 \cdot x + 3a \cdot y - 7b = 0$$

$$P_2 = \frac{|0 + 0 - 7b|}{\sqrt{1 + (3a)^2}} < 3$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{|3a - 7(b+1)|}{\sqrt{1 + (3a)^2}} < 2 \\ \frac{|7b|}{\sqrt{1 + (3a)^2}} < 3 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |3a - 7(b+1)| < 2\sqrt{1 + (3a)^2} \\ |7b| < 3\sqrt{1 + (3a)^2} \end{array} \right.$$

$(-\infty; a_0) \cup (a_0; +\infty)$ или когда

Можно заметить, что ~~значения~~ a , которая
где a_0 - параметр при котором каскалы
каскалы ~~между~~ значениями a_0
 b , что прямая кас. обеих окр.-ей.
каскалы друг окр. одновременно будут или
походей (см. рисунок)

Из выше опис-ой системы (опомо рисунка):

$$|3a_0| = |\text{ctg}(\alpha)| = \frac{TK_2}{OK_2} = \frac{\sqrt{R^2 - (TK_2)^2}}{OK_2} = \frac{\sqrt{\left(\frac{21}{5}\right)^2 - 3^2}}{3^2} = \frac{2\sqrt{6}}{15}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$|3a_d| = \frac{2\sqrt{6}}{15}$$

$$|a_0| = \frac{2\sqrt{6}}{45}$$

← это крайние значения
при которых будут ≥ 2 решений \Rightarrow подставив $a=1$

$a=0$ (и помня, что там может 2 решения

несколько из решения для $a=0$, и 4 реш для $a=1$)

можно сделать вывод, что у нас

пар-н a : $a \in (-\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{45}) \cup (\frac{2\sqrt{6}}{45}; +\infty)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5.

$$\log_7^4(6x) - 2 \cdot \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4$$

$$\begin{aligned} 343 &= 7^3 = \\ &= 49^{\frac{3}{2}} \\ 36x^2 &\neq 1 \end{aligned}$$

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \frac{3}{2} \cdot \log_{6x} 7 + 4 = 0 \quad \begin{aligned} 6x &\neq 1 \\ x &> 0 \end{aligned}$$

$$\log_7^4(6x) - \frac{7}{2} \log_{6x} 7 + 4 = 0$$

$$\log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} 7^5 - 4 \quad \begin{aligned} y &> 0 \\ y &\neq 1 \end{aligned}$$

$$\log_7^4 y + 6 \log_y 7 - \frac{5}{2} \log_y 7 + 4 = 0 \quad \begin{aligned} \text{Заменим:} \\ a &= \log_7 6x \\ b &= \log_7 y \end{aligned}$$

$$\log_7^4 y + \frac{7}{2} \log_y 7 + 4 = 0 \quad b = \log_7 y$$

$$\left\{ \begin{aligned} a^4 + \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{a} + 4 = 0 \\ b^4 + \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{b} + 4 = 0 \end{aligned} \right. \Rightarrow \delta + a^4 + b^4 = \frac{7}{2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

$$\delta + a^4 + b^4 = \frac{7}{2} \left(\frac{b-a}{ab} \right) \geq \frac{16}{7}$$

$$a^4 - b^4 = \frac{7}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

$$(a^2 + b^2)(a+b)(a-b) = \frac{7}{2} \frac{a+b}{ab}$$

$$(a+b) = 0 \Rightarrow \log_7 6xy = 0 \Rightarrow 6xy = 1 \quad \left(xy = \frac{1}{6} \right)$$

$$(a^2 + b^2)(a-b) = \frac{7}{2ab}$$

$$2(a^2 + b^2) = \frac{7}{ab(a-b)}$$

$\forall a, b \neq 0$

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} &ab < 0 \\ &b < a \end{aligned} \right\} &\Rightarrow \frac{7}{ab(a-b)} < 0 \\ \left. \begin{aligned} &ab > 0 \\ &b > a \end{aligned} \right\} &\Rightarrow \frac{7}{ab(a-b)} < 0 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Это значит, что у второго групп нет
решения, тк одна группа больше нуля,
а другая меньше \Rightarrow их-ое значение:

$$a+b=0 \Rightarrow xy = \frac{1}{6}$$

Ответ: $xy = \frac{1}{6}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6.

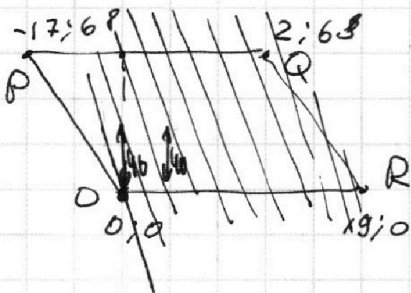
$$4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$$



a -параметр

$$\left\{ \begin{array}{l} 4x_2 + y_2 = a \\ 4x_1 + y_1 = -(40-a) = a-40 \end{array} \right.$$

\Rightarrow эти прямые \parallel
кар-ны



!!!
...

градусов параллельности
сторонами кар-ны
(PO и QR)

$$\text{т.к. } \frac{68}{-17} = -4$$



расстояние от прямой до прямой
(по кар-ни если смотреть) можно

найти: $4(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 40$

$$x_2 - x_1 = 10$$



рассмотрим 10 точек на кар-нах

(т.к. крайние положения $x_1(y_1=0)$ и $x_2(y_2=0)$)

это $x_1=0$ $x_2=10$ и $x_1=9$ $x_2=0$

для каждой прямой на кар-нах существует единственное

кар-но пар точек x_1, y_1 и x_2, y_2



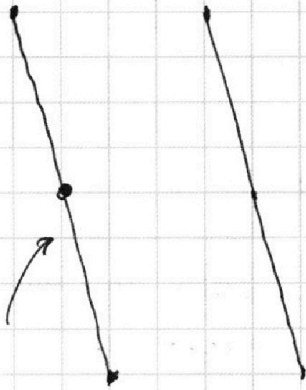
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



то

на отрезке $0 \leq y \leq 8$

эта точка y на прямой $18x$

прямой $\frac{68}{4} = 17$ / для $a=0$ это точка.

\Rightarrow для пары прямых каю-то пар точек 18^2

\Rightarrow ответ: $10 \cdot 18^2 =$ ~~3240~~

3240

$$\begin{array}{r} 18 \\ \times 18 \\ \hline 144 \\ 180 \\ \hline 324 \end{array}$$

когда-то точки, лежащие на прямой в пределах пар-ции с целыми.

коорд. x это точки

\neq (для каждого $x \in \mathbb{Z}$

найдем y , принадлежа \mathbb{Z})

$$\left\{ \begin{array}{l} 0:0 \\ -2:4 \\ -2:8 \\ -17:68 \end{array} \right.$$

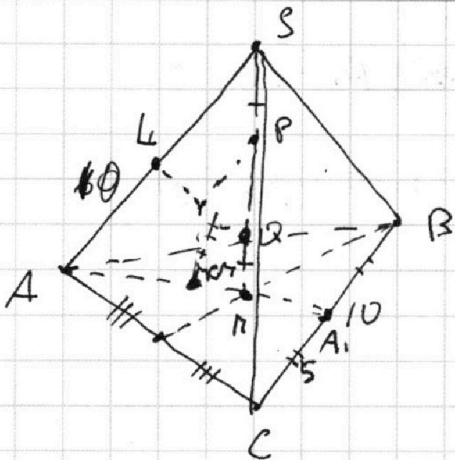
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

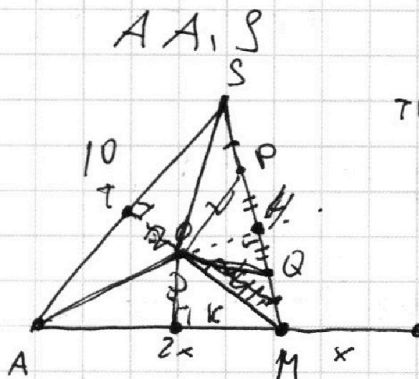
- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Рассмотрим плоскость



$SH = HM = TK = PK = MQ$
 TK — середина
 $TK \perp AT = AK$ (касат.)

$TK \perp SO = MO$
 (TK — радиус, TP — высота = медиана)

$\frac{TO \cdot AM = AS^2 = 10}{x=5}$

$S_{ABC} = 60$

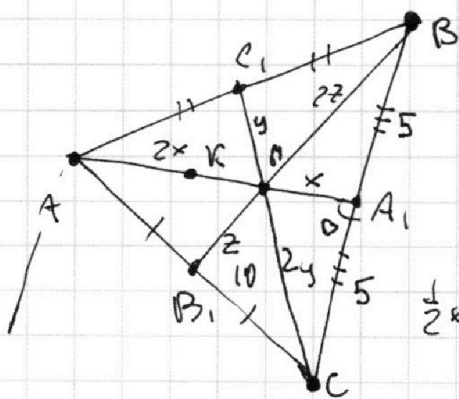
медиана делит угол угла на 2 угла $2x$

TK — середина касается в т. K, TO — центр O касается

в этой плоскости $\Rightarrow AS \perp ABC$ тк $MS \in ASA_1$

~~а ASA_1 — плоскость, содержащая ось симметрии OM~~

плоскость ABC



Медианы делят

ABC на 6 равнов.

$TP \Rightarrow ux$ площадь $S = 10$

$\frac{1}{2} x \sin \beta \cdot 5 = 10$

$x=5$

$x \sin \beta = 4 \Rightarrow \sin \beta = \frac{4}{5}$
 $\cos \beta = \frac{3}{5}$

$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 3x \cdot 3y \cdot 3z = 27xyz$

По формуле Герона $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ ведущим TP
 $\cos \beta = \frac{2z}{5}, x$
 и $2y, 5, x$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{x+2.5+z}{2} & p_1(p_1-\frac{x}{2})(p_1-\frac{5}{2})(p_1-2z) &= \\ p_2 &= \frac{x+2.5+y}{2} & &= p_2(p_2-x)(p_2-5)(p_2-2y) \end{aligned}$$

по т. косинусов: $\triangle A_1$

$$(2y)^2 = x^2 + 5^2 - 2 \cdot x \cdot 5 \cdot \cos B$$

$$4y^2 = 25 + 25 - 50 \cdot \frac{3}{5}$$

$$4y^2 = 20$$

$$y^2 = 5 \Rightarrow y = \sqrt{5}$$

по т. косинусов $\triangle B_1 A_1$:

$$(2z)^2 = 5^2 + 5^2 + 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{3}{5}$$

$$(2z)^2 = 50 + 50 \cdot \frac{3}{5}$$

$$4z^2 = 80$$

$$z^2 = 20$$

$$z^2 = 2\sqrt{5}$$

$$x y z = 5 \cdot \sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} = 50$$

$$A_1 A_1 B_1 B_1 C_1 C_1 = 27 \cdot 50 = \underline{\underline{1350}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

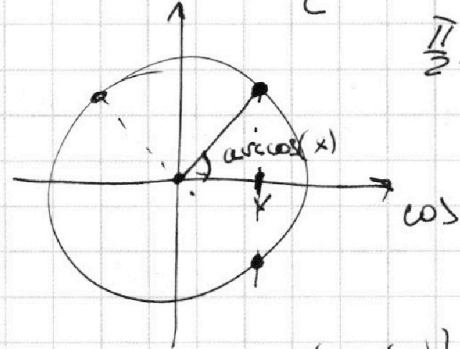
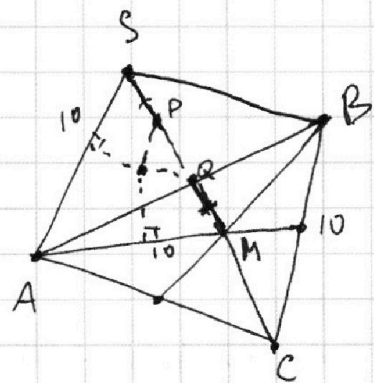
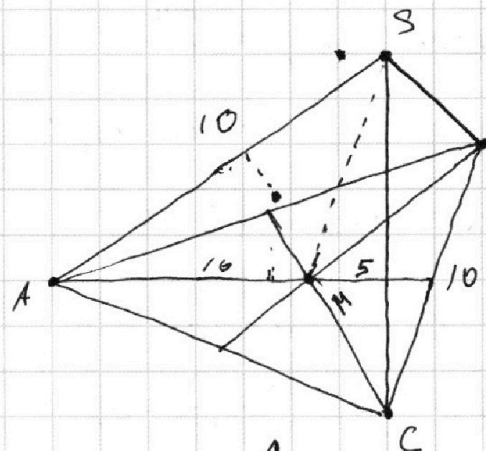
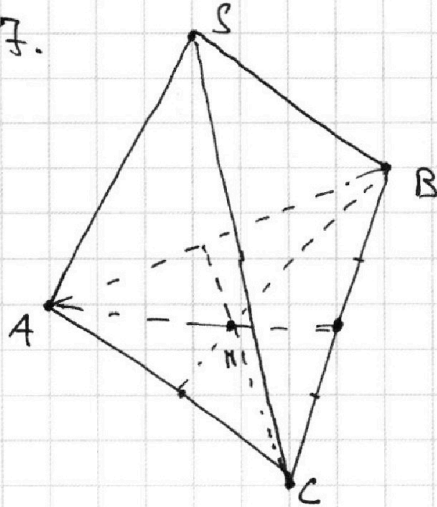
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

7.
б)



$\frac{\pi}{2} - x$ уравне

$$\arccos(\cos(\alpha)) = ?$$

$$\alpha + 2\pi k$$

$$-\alpha + 2\pi k$$

$$0 \leq \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) \leq \pi$$

$$\frac{\pi}{2} - x$$



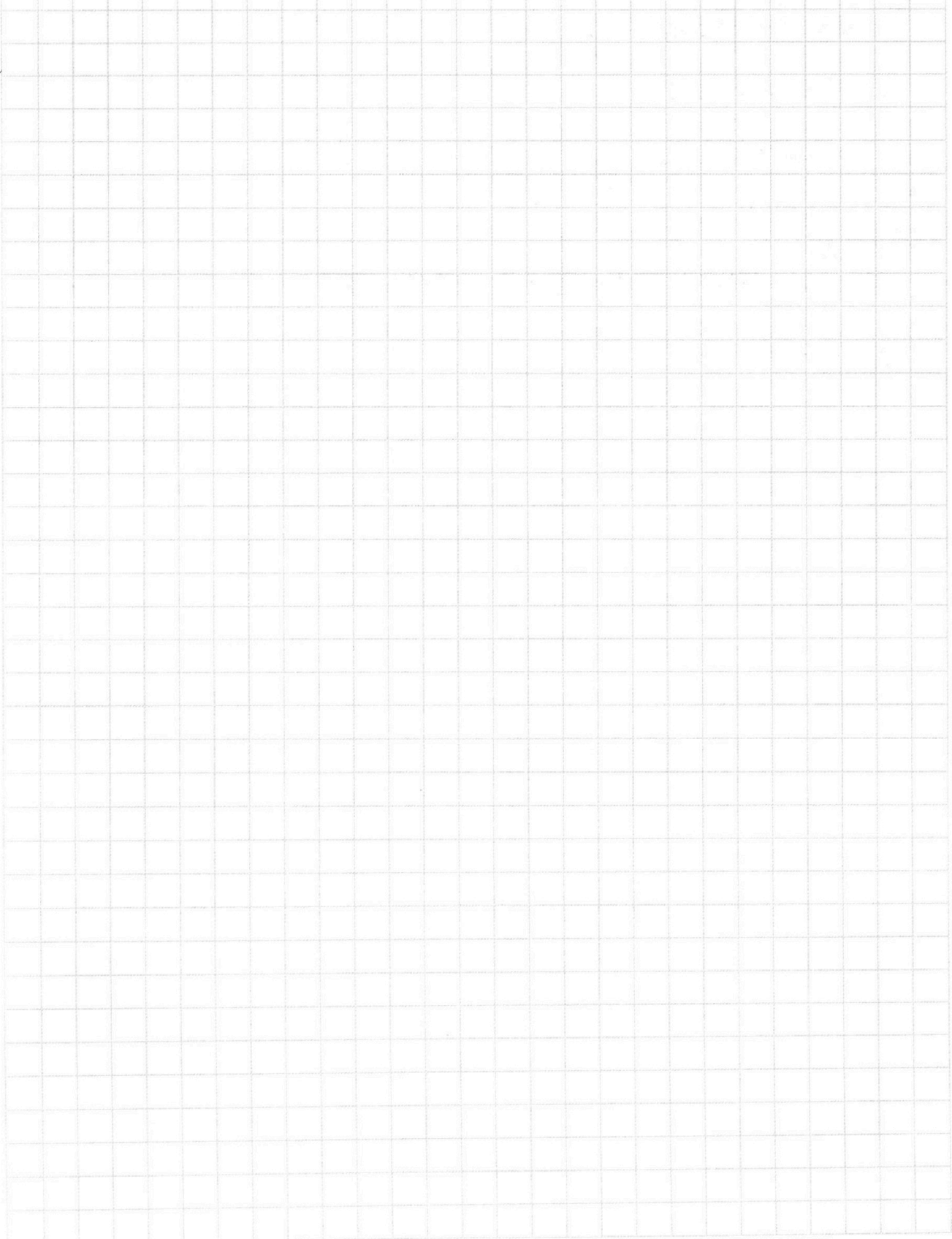
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_7 6x = a$$

$$(a+b)^2$$

$$\log_7 y = b$$

$$\frac{7}{2ab} = \frac{7}{(a+b)^2 - (a^2+b^2)}$$

$$a^4 - \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{a} + 4 = 0$$

$$(a^2+b^2)(a-b) = \frac{7}{(a+b)^2 - (a^2+b^2)}$$

$$b^4 + \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{b} + 4 = 0$$

$$(a+b)^2 - (a^2+b^2) / ((a^2+b^2)(a-b)) = 7$$

$$(a^2+b^2)(a-b)(a+b) - \frac{7}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = 0$$

$$(a^2+b^2)(a-b) - \frac{7}{2} \frac{1}{ab} = 0 \text{ или } a+b=0$$

$$a^3 - a^2b + ab^2 - b^3 - \frac{7}{2} \frac{1}{ab} = 0$$

$$a^4b - a^3b^2 + a^2b^3 - ab^4 = \frac{7}{2}$$

$$a^2b$$

$$a^2(a-b) + b^2(a-b)$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) - ab$$

$$a(a^2+b^2) - b(a^2+b^2) \quad ab(a^2+b^2)(a-b) = \frac{7}{2}$$

$$ab(a-b)(a^2+b^2) = \frac{7}{2}$$

$$3^2 5^2$$

$$\sqrt{15 \cdot 15 \cdot 15 \cdot 15}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5.

$$\begin{cases} \log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4 & x, y > 0 \\ \log_7^4(y) + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} 7^5 - 4 & 6x, y \neq 1 \\ & 36x^2 \neq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \frac{3}{2} \log_{6x} 7 - 4 \\ \log_7^4(y) + 6 \log_y 7 = \frac{5}{2} \log_y 7 - 4 \end{cases}$$

$$\log_7^4 6x - \frac{7}{2} \log_{6x} 7 + 4 = 0$$

$$\log_7^4 y + \frac{7}{2} \log_y 7 + 4 = 0 \quad \frac{1}{\log_7 y} - \frac{1}{\log_7 6x}$$

$$\log_7^4 y - \log_7^4 6x + \frac{7}{2} (\log_y 7 + \log_{6x} 7) = 0$$

$$(\log_7^2 y + \log_7^2 6x) (\log_7 y - \log_7 6x) (\log_7 y + \log_7 6x) + \frac{7}{2} \left(\frac{\log_7 6x \cdot \log_7 y}{\log_7 6x \cdot \log_7 y} \right) = 0$$

$$\left((\log_7^2 y + \log_7^2 6x) \left(\log_7 \frac{y}{6x} \right) + \frac{7}{2 \log_7 6x \cdot \log_7 y} \right) (\log_7 6x y) = 0$$

1) $6x y = 1$ $\Rightarrow xy = \frac{1}{6}$

2) $(\log_7^2 y + \log_7^2 6x) \cdot \log_7 \frac{y}{6x} + \frac{7}{2 \log_7 6x \cdot \log_7 y} = 0$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3. $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$

Проверка:

$$5 \cdot \arccos(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$5 \cdot \arccos(\frac{1}{2}) = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$$

$$5 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{9\pi}{6} + \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{5\pi}{3} = \frac{10\pi}{6}$$

$$1 = 1, \text{ верно}$$

$$5 \cdot (\frac{\pi}{2} - x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5x = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\pi = 6x$$

$$x = \frac{\pi}{6}$$

$$0 \leq \frac{\pi}{6} \leq \pi$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{6}$

$$\arccos(\cos(\alpha)) = \alpha,$$

$$\text{если } 0 \leq \alpha \leq \pi$$

$$\text{иначе } \arccos(\cos(\alpha)) = \frac{3\pi}{2} - \alpha$$

$$5 \cdot \arccos(0) = \frac{3\pi}{2} + \pi$$

$$5 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + \pi$$

верно

или

$$-5 \cdot (\frac{\pi}{2} - x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$5x - \frac{5\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$4x = 4\pi$$

$$x = \pi \quad 0 \leq \pi \leq \pi$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{6}$
 $x = \pi$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab = \alpha \cdot 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$$

$$(abc)^2 = \alpha \beta \gamma \cdot 2^{17} \cdot 3^{21.5} \cdot 5^{32.5}$$

$$bc = \beta \cdot 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$$

$$ac = \gamma \cdot 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$$

$$\frac{ab \cdot bc}{ac} = b^2 = \frac{\alpha \cdot \beta \cdot 2^{20} \cdot 3^{26} \cdot 5^{32}}{\gamma \cdot 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}} = \frac{\alpha \cdot \beta}{\gamma} \cdot 2^6 \cdot 3^9 \cdot 5^{-11}$$

$$\frac{ab \cdot ac}{bc} = a^2 = \frac{\alpha \cdot \gamma \cdot 2^{21} \cdot 3^{28} \cdot 5^{57}}{\beta \cdot 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}} = \frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta} \cdot 2^8 \cdot 3^{13} \cdot 5^{39}$$

$$\frac{bc \cdot ac}{ab} = c^2 = \frac{\beta \cdot \gamma \cdot 2^{27} \cdot 3^{32} \cdot 5^{61}}{\alpha \cdot 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}} = \alpha \beta \cdot 2^{20} \cdot 3^{21} \cdot 5^{47}$$

$$\arccos(\sin \alpha) = x$$

$$\arccos(\sin \alpha) = \alpha$$

$$\cos \alpha = \sin x$$

$$\cos x = \sin \alpha$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

$$\sin^2 \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \quad 36 \cdot 6 = 180 + 36$$

$$\arccos(\sqrt{1 - \cos^2 \alpha})$$

$$\sqrt{1 - x^2}$$

$$\sin x \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad \sqrt{\frac{441}{25} - 9}$$

$$\sqrt{\frac{441 - 225}{25}} = \sqrt{\frac{216}{25}} = \frac{6\sqrt{6}}{5} = \frac{2\sqrt{6}}{15}$$