



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^7 3^{11} 5^{14}$ ,  $bc$  делится на  $2^{13} 3^{15} 5^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{14} 3^{17} 5^{43}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1,3$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .

3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$ .

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-17; 68)$ ,  $Q(2; 68)$  и  $R(19; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что  $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$ .

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 60,  $SA = BC = 10$ .

а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .

б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 3$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



### Задача 1.

Если бы в разложении <sup>любого</sup> ~~любого~~ и чисел  $a, b, c$  присут. <sup>простей</sup> множителей, не равных 2, 3 или 5 (в какой то степени), то из этого прост. множ. можно было бы число подбить, тогда произв.  $abc$  бы уменьшилось, но все условия все еще бы выполнялись.  $\Rightarrow$  в разлож. чисел  $a, b, c$  не могут присут. только 2, 3, 5.

Пусть  $a = 2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot 5^{a_3}$ ,  $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{N}_0$  (кат. и, 0")

$b = 2^{b_1} \cdot 3^{b_2} \cdot 5^{b_3}$ ,  $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{N}_0$

$c = 2^{c_1} \cdot 3^{c_2} \cdot 5^{c_3}$ ,  $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{N}_0$

Тогда условия делимости записываются след. образом

$$abc : 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14} \Rightarrow \begin{cases} 2^{a_1+b_1+c_1} \geq 2^7 & (1) \\ 3^{a_2+b_2+c_2} \geq 3^{11} & (2) \\ 5^{a_3+b_3+c_3} \geq 5^{14} & (3) \end{cases}$$

Аналогично запишем для  $bc$  и  $ac$

$$\begin{cases} b_1 + c_1 \geq 13 & (4) \\ b_2 + c_2 \geq 15 & (5) \\ b_3 + c_3 \geq 18 & (6) \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 + c_1 \geq 14 & (7) \\ a_2 + c_2 \geq 17 & (8) \\ a_3 + c_3 \geq 19 & (9) \end{cases}$$

Сложим соств. кер-во:  $(1)+(4)+(7)$ ;  $(2)+(5)+(8)$  и  $(3)+(6)+(9)$ . Получим.

$$\begin{cases} 2(a_1 + b_1 + c_1) \geq 7 + 13 + 14 \\ 2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 11 + 15 + 17 \\ 2(a_3 + b_3 + c_3) \geq 14 + 18 + 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + b_1 + c_1 \geq 17 \\ a_2 + b_2 + c_2 \geq 21 + \frac{1}{2} \\ a_3 + b_3 + c_3 \geq 37 + \frac{1}{2} \end{cases}$$

Т.к.  $a, b, c$  все перемножены вместе, можно записать:

$$\begin{cases} a_1 + b_1 + c_1 \geq 17 \\ a_2 + b_2 + c_2 \geq 22 \\ a_3 + b_3 + c_3 \geq 38 \end{cases} \quad abc = 2^{a_1+b_1+c_1} \cdot 3^{a_2+b_2+c_2} \cdot 5^{a_3+b_3+c_3} \geq 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$$

Однако

Но при этом  $abc \geq 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$   
 $\nearrow$  м.е.  $abc \geq 43$   
 $\nearrow$  м.е.  $a_3 + b_3 + c_3 \geq 43$

Пример, когда  $abc = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

$a = 2^4 \cdot 3^{14} \cdot 5^{14}$

$b = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^0$

$c = 2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^{29}$

Ответ:  $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

$ac \geq 43 = ac : 5^{43} \Rightarrow abc : 5^{43}$

тогда  $a_3 + b_3 + c_3 \geq 43$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- |                                     |                                     |                                     |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                                   | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



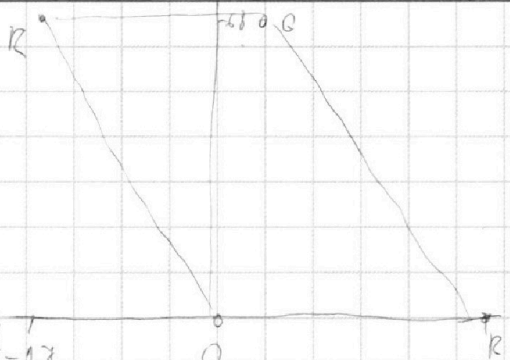
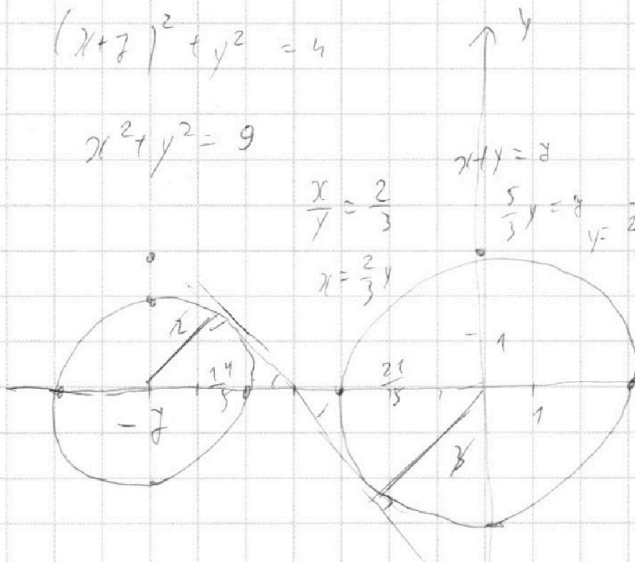
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x^2 + 14x + 49 + y^2 - 4 = 0$$

$$(x+7)^2 + y^2 = 4$$

$$x^2 + y^2 = 9$$



$$\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$$

$$x = \frac{2}{3}y$$

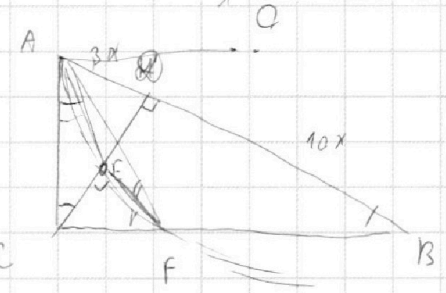
$$x+y=8$$

$$\frac{5}{3}y=8$$

$$y = \frac{24}{5} = 4.8$$

$$x = 1.6$$

$\angle EAD = 90^\circ$



40 90 k =

$$y = kx + b$$

$$y - kx - b = 0$$

$$\frac{|-b|}{\sqrt{1+k^2+b^2}} = 3$$

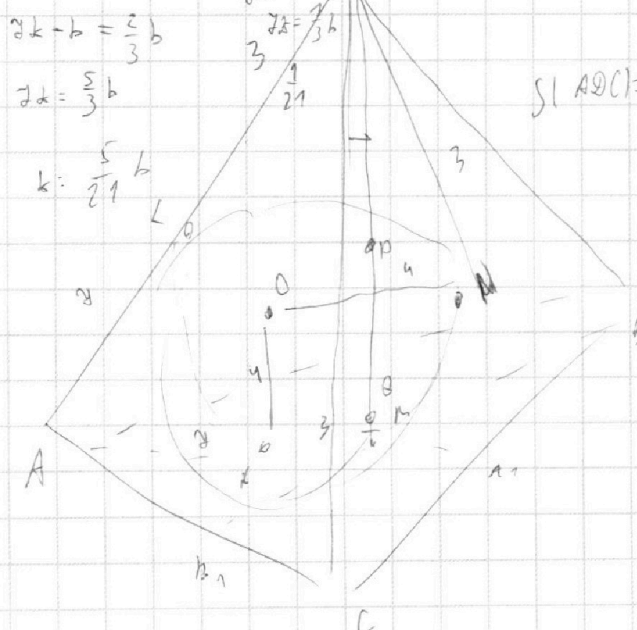
$$\frac{|2k-b|}{\sqrt{1+k^2+b^2}} = 2$$

$$S_{ABC} = \frac{AC \cdot BC}{AB}$$

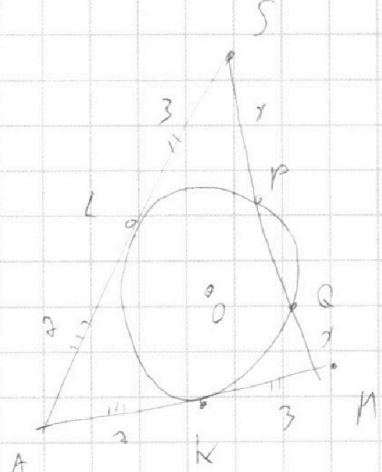
$$= x\sqrt{30}$$

$$BC = x\sqrt{30}$$

$$AC = y\sqrt{30}$$



$$S_{AOC} = \frac{1}{2} \cdot 3x^2 \sqrt{3}$$



$$AM = 10$$

$$AA_1 = \frac{3}{2} AM = 15$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2 Лист 2

Пусть  $ED = y$

$$1 - \frac{y}{x\sqrt{30}} = \frac{y}{\sqrt{30}x}$$

$$\frac{2y}{x\sqrt{30}} = 1$$

$$y = \frac{\sqrt{30}}{2}x$$

$$6. CE = CD - ED = x\sqrt{30} - \frac{\sqrt{30}}{2}x = x\frac{\sqrt{30}}{2}$$

~~и по подобию  $\triangle CEF \sim \triangle CDB$ :~~

~~и по подобию  $\triangle CEF \sim \triangle CDB$ .~~

$$\frac{S(\triangle CEF)}{S(\triangle CDB)} = \frac{CE^2}{CD^2} = \frac{x^2 \cdot 30}{4 \cdot x^2 \cdot 30} = \frac{1}{4}$$

$$S(\triangle CEF) = \frac{1}{4} S(\triangle CDB); \quad S(\triangle DBC) = 4 S(\triangle CEF)$$

$$\triangle DAC \sim \triangle DBC \Rightarrow \frac{S(\triangle DAC)}{S(\triangle DBC)} = \frac{AC^2}{BC^2} = \frac{x^2 \cdot 39}{x^2 \cdot 130} = \frac{3}{10}$$

$$S(\triangle DAC) = \frac{3}{10} S(\triangle DBC) = \frac{12}{10} S(\triangle CEF)$$

$$\frac{S(\triangle DAC)}{S(\triangle DBC)} = \frac{6}{5} = 1,2$$

Ответ: 1, 2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

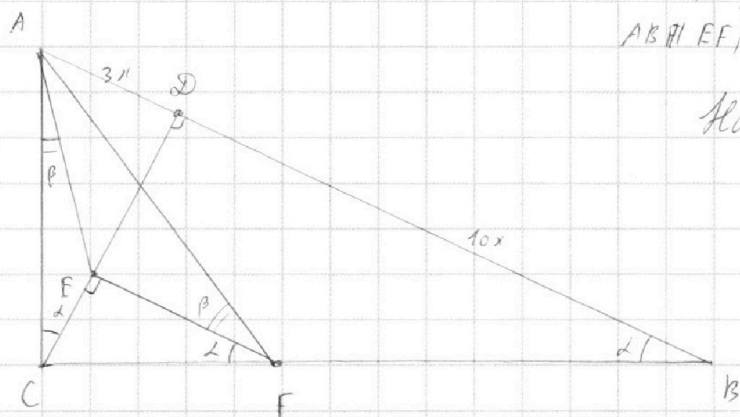


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 2 лист 1

Дано  $\triangle ABC$  - тупой;  $\angle C = 90^\circ$ ; Окр.  $\Omega$  кас.  $AC$  в  $A$ ;  $\Omega \cap CD = E$ ;  $\Omega \cap BC = F$ ;  $AB \parallel EF$ ;  $AB:BD = 1,3$



Найти  $\frac{S(\triangle ACD)}{S(\triangle CEF)}$  - ?

Решение.

1 Пусть  $AB = 13x$ , тогда  $BD = \frac{AB}{1,3} = 10x$

$$AD = AB - BD = 3x$$

2.  $\triangle ADC \sim \triangle ABC$  ( $\angle ABC = \alpha$ );  $\angle EFC = \angle ABC = \alpha$ , как соотв. при  $EF \parallel AB$  и сек  $BC$ ;  $\angle ACD = 90^\circ - \angle CAD = \angle ABC = \alpha$ .

3.  $\triangle ACD \sim \triangle CBD$  (по 2-ым углам)  $\Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD}$ ;  $CD^2 = AD \cdot BD$   
 $\triangle ADC \sim \triangle ACB$  (по 2-ым углам)  $CD = x\sqrt{30}$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}; AC^2 = AD \cdot AB; AC = x\sqrt{39} \quad \text{Аналогично } BC = \sqrt{BD \cdot AB} = x\sqrt{130}$$

4. По св. угла между касательной и хордой;

$$\angle ACE = \frac{1}{2} \angle AFE = \angle EFA = \beta$$

x

$$\angle AED = \angle ECA + \angle CAE = \alpha + \beta \text{ как внешн.}$$

$$\angle CFA = \angle CFE + \angle EFA = \alpha + \beta = \angle AED$$

$\triangle CFA \sim \triangle DEA$  (по 2-ым углам)

$$\frac{CF}{DE} = \frac{AC}{AD} = \frac{x\sqrt{39}}{3x} = \sqrt{\frac{39}{3}} \quad \left| \begin{array}{l} CF = \sqrt{13} \\ CF = \sqrt{\frac{13}{3}} \cdot ED \end{array} \right.$$

5.  $\angle CEF = \angle CDB = 90^\circ$ , как соотв. при  $AB \parallel EF$  и сек  $CD$ ,

$\triangle CEF \sim \triangle CDB$  по двум углам

$$\frac{EF}{DB} = \frac{CE}{CD} = \frac{CD - ED}{CD}$$

$$\frac{CF}{CD} = \frac{CF}{BC}$$

$$\left(1 - \frac{ED}{CD}\right) = \frac{\sqrt{13} \cdot ED}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{13} \cdot \sqrt{10} \cdot x}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 3 лист 2

$$5x - 10\pi = \pi - x$$

$$6x = 11\pi$$

$$x = \frac{11\pi}{6}$$

$$\forall x \in \left[ \frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2} \right] \cdot \arcsin(\sin x) = \arcsin(-\sin(x - 3\pi)) =$$

$$= -x + 3\pi$$

$$-5x + 15\pi = \pi - x$$

$$4x = 14\pi$$

$$x = \frac{7\pi}{2}$$

Прямая по оси  $x$ -ось

Ответ.  $-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \pi; \frac{11\pi}{6}; \frac{7\pi}{2}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 3 мкм 1

$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$5\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)\right) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$5 \arcsin(\sin x) = \pi - x$$

Заметим, что  $\frac{\pi}{2} \geq \arcsin(\sin x) \geq -\frac{\pi}{2}$   
 $\frac{5\pi}{2} \geq 5 \arcsin(\sin x) \geq -\frac{5\pi}{2}$

тогда  $\begin{cases} \pi - x \geq -\frac{5\pi}{2} \\ \pi - x \leq \frac{5\pi}{2} \end{cases}$   
 $\begin{cases} x \leq \frac{7\pi}{2} \\ x \geq -\frac{3\pi}{2} \end{cases}$

I.  $x \in \left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right]: \arcsin(\sin x) = x + \pi$   
 $= \arcsin(-\sin(x+\pi)) = -\arcsin(\sin(x+\pi))$   
 $5x + 5\pi = \pi - x$   
 $x = -\frac{4}{6}\pi = -\frac{2}{3}\pi$   
 $-5x - 5\pi = \pi - x; 4x = -6\pi; x = -\frac{3}{2}\pi$

II.  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]: \arcsin(\sin x) = x$

$$5x = \pi - x$$

$$x = \frac{\pi}{6}$$

III.  $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]: \arcsin(\sin x) = \arcsin(-\sin(x-\pi)) =$

$$= -\arcsin(\sin(x-\pi)) = -x + \pi$$

$$-5x + 5\pi = \pi - x; 4x = 4\pi; x = \pi$$

IV.  $x \in \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]: \arcsin(\sin x) = \arcsin(\sin(x-2\pi)) =$

$$= x - 2\pi$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Положим  $y = kx - \frac{21}{5}$

$$x^2 + \left( k^2 x^2 - \frac{42}{5} kx + \frac{21^2}{5^2} \right) = 9$$

$$x^2 (k^2 + 1) + x \left( -\frac{42}{5} k \right) + \frac{21^2}{5^2} - 9 = 0$$

$$D_{1/4} = 0$$

$$\left( \frac{21}{5} \right)^2 k^2 - (k^2 + 1) \left( \frac{21^2}{5^2} - 9 \right) = 0$$

$$-9k^2 + \left( \frac{21}{5} \right)^2 + 9 = 0$$

$$k^2 = 1 + \left( \frac{7}{5} \right)^2 = \frac{49}{25} + 1 = \frac{74}{25}$$

$$k = \pm \frac{\sqrt{74}}{5}, \text{ но упр. коэф. должен быть } 0$$

$$a = k = -\frac{1}{3k}, \quad a = -\frac{1}{3k} = \pm \frac{5}{3\sqrt{74}}$$

Получим предельные значения  $a \Rightarrow$  при них не может быть  
и решений.

$$\text{Значит предельно } a < -\frac{5}{3\sqrt{74}} \text{ и } a > \frac{5}{3\sqrt{74}}$$

(м.к. упроб. при высших упробов коэф. предельно  
не может пересекать обе окружности)

$$\text{Ответ: } \left( -\infty; -\frac{5}{3\sqrt{74}} \right) \cup \left( \frac{5}{3\sqrt{74}}; +\infty \right)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



### Задача 4, лист 1

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 & (1) \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 & (2) \end{cases}$$

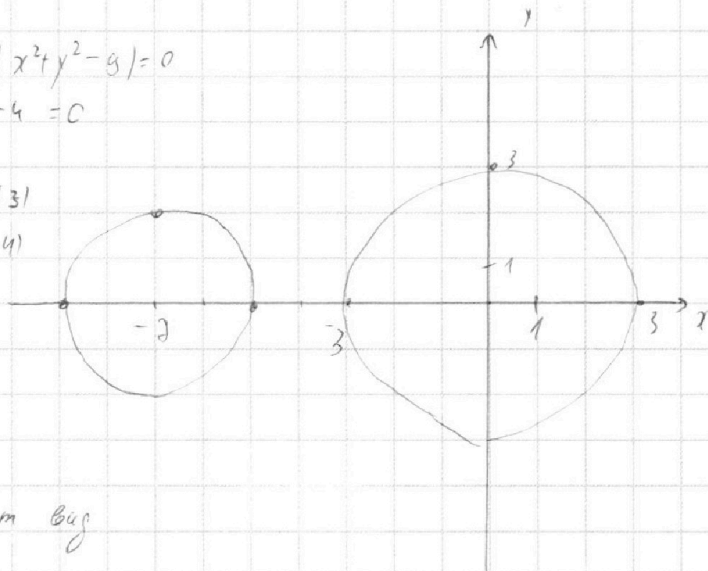
Решим (2):  $(x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0$

$$\begin{cases} x^2 + 14x + 49 + y^2 - 4 = 0 \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

Ур-я окружностей  $\rightarrow$

$$\begin{cases} (x+7)^2 + y^2 = 4 & (3) \\ x^2 + y^2 = 9 & (4) \end{cases}$$

(3) - с центром  $(-7, 0)$  и радиус 2  
(4) - с ц.  $(0, 0)$  и радиус 3



I Если  $a=0$ , то (1) имеет вид

$$x - 7b = 0$$

$x = 7b$ ,  $b=0$  - ~~представляет собой~~ вертикальная прямая, не имеет пересек с

II Если  $a \neq 0$ , то (1) имеет вид

$$3ay = 7b - x$$

$$y = \frac{7b - x}{3a}; \quad y^2 = \frac{49b^2 - 14bx + x^2}{9a^2}$$

Подставим в (2)

$$x^2 + 14x + 49 + \frac{49b^2 - 14bx + x^2}{9a^2} + 45 = 0$$

$$x^2 + \frac{49b^2 - 14bx + x^2}{9a^2} - 9 = 0$$

$$\left[ x^2 \left( 1 + \frac{1}{9a^2} \right) + x \left( 14 - \frac{14b}{3a^2} \right) + \frac{49b^2}{9a^2} + 45 = 0 \right]$$

$$\left[ x^2 \left( 1 + \frac{1}{9a^2} \right) + x \left( -\frac{14b}{3a^2} \right) - 9 = 0 \right]$$

Из графиков понятно, что решения этих двух уравнений не могут пересекаться / т.к. они лежат на непересекающихся

окружностях  $\Rightarrow$  существование 4-х решений уравнения

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



### Задача 4 лист 2

II  $a \neq 0$ : Уравнение 1. урав. прямой

$$y = \frac{7b}{3a} - \frac{x}{3a} \quad \text{С помощью выбора } b \text{ можно}$$

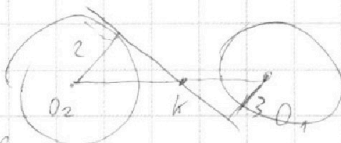
вставить любое свободной коэф., т.е. двести прямую вверх/вниз как угодно. При любых укл. коэф., пойдешь, прямая касаются все окружности, пока не дойдет до предельно пологой собственной касательной этих окружностей вверху/снизу. Найдем ее укл. коэф. касаясь равносильно тому, что радиус от центра до прямой ее радиус. Пусть прямая  $y = kx + c$  - ее ось касания.

тогда  $\frac{|0 - c|}{\sqrt{1 + k^2}} = 3$

~~$\frac{|0 + 7k - c|}{\sqrt{1 + k^2}} = 2$~~

~~$$\begin{cases} c^2 = 9 + 9k^2 + 9c^2 \\ 49k^2 - 14kc + c^2 = 4 + 4k^2 + 4c^2 \\ 9k^2 + 9c^2 + 9 = 0 \end{cases}$$~~

Рассмотрим затем



$O_1, O_2 = 7$

из подобия  $\frac{O_2 k}{k O_1} = \frac{2}{3}$

$O_2 k + k O_1 = 7$

$k O_1 = \frac{21}{5}$

тогда, т.е. тогда

$|7b; 0|$  всегда

используем на вершине прямой, рассмотрим ее при  $b = -\frac{3}{5}$  (тогда проходит через  $k$ )

$y = -\frac{x}{30a} - \frac{21}{5}$ , запишем условие касания с

левой окружностью через центр. Пусть  $k = -\frac{1}{3a}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

как сумма возрастающих на  $\mathbb{R}$  функций

Тогда пусть  $f(a_1) = 7$  - ед. корень уравнения

$f(x) = 7$ . Тогда единственное решение уравнения

$$f(x) = -7; \quad f(-x) = 7; \quad -x = a_1, \quad x = -a_1.$$

т.е. Тогда Отсюда

$$a + b = a_1 - a_1 = 0$$

$$\log_6 x + \log_6 y = 0$$

$$\log_6 6xy = 0$$

$$6xy = 1$$

$$xy = \frac{1}{6}$$

Ответ:  $\frac{1}{6}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



### Задача 5

I Рассмотрим первое равенство.

$$\log_x^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4$$

$$\log_x^4(6x) - \frac{2}{\log_x 6x} = \frac{3}{2 \log_x 6x} - 4 \quad \left( \begin{array}{l} \text{Условие на то, что } 6x > 0 \\ (2 \log_x 6x) \text{ осталось, как и то, что } 6x \neq 1 \end{array} \right)$$

возможно можно не ставить

$$\log_{36x^2} 343 = \frac{3}{2} \log_{6x} 7 = \frac{3}{2} \log_{6x} 7$$

$$\begin{cases} 2 \log_x^5 6x + 8 \log_x 6x - 4 = 0 \\ \log_x 6x \neq 0 \end{cases}$$

Пусть  $\log_x 6x = a$

$$\begin{cases} 2a^5 + 8a - 4 = 0 \\ a \neq 0 - \text{осв. на кор.} \end{cases} \quad \text{Пусть } f(a) = 2a^5 + 8a - 4 = 0$$

$$f'(a) = 2 \cdot 5a^4 + 8 = 10a^4 + 8$$

II Рассмотрим второе равенство.  $f(x) = 2x^5 + 8x$

$$\log_x^4 y + 6 \log_x 7 = \log_x (7^5) - 4$$

$$\log_x^4 y + \frac{6}{\log_x y} = \frac{5}{2 \log_x y} - 4 \quad \left( \begin{array}{l} (2 \log_x y) \text{ осталось} \\ \text{Аналогично I можно не ставить} \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} 2 \log_x^5 y + 8 \log_x y + 7 = 0 \\ \log_x y \neq 0 \end{cases}$$

Пусть  $b = \log_x y$

$$2b^5 + 8b + 7 = 0$$

$b \neq 0$  - осв. на корни

III Наши равенства свелись к виду

$$\begin{cases} f(a) - 7 = 0 \\ f(b) + 7 = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Заметим, что } f(x) \text{ - нечетная} \\ \text{Функция } \equiv \text{ Действительно} \end{array}$$

$$f(-x) = 2(-x)^5 + 8(-x) = -1 \cdot (2x^5 + 8x) = -f(x)$$

Пусть  $f(x)$  с корнями тогда  $f(x) \neq 0$  при  $x \in \mathbb{R}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 7 Шет 2

Безграничной области будем считать, что  $\angle AA_1C$  - тупой (случай, когда  $OK$  острый - симметричен относительно прямой  $AA_1B$  и  $AA_1C$ )

Тогда  $\cos \angle AA_1C = -\sqrt{1 - \sin^2 \angle AA_1C} = -\frac{3}{5}$ ,  $\cos \angle AA_1B = \cos(\frac{\pi}{2} - \angle AA_1C) = \frac{3}{5}$

По м. косинусов в треугольнике  $AA_1C$ :  $AC^2 = AA_1^2 + A_1C^2 + 2 AA_1 \cdot A_1C \cdot \cos \angle AA_1C = 225 + 25 - 2 \cdot 5 \cdot 15 \cdot (-\frac{3}{5}) = 250 + 90 = 340$

По м. косинусов в  $\triangle AA_1B$ :  $AB^2 = AA_1^2 + A_1B^2 - 2 AA_1 \cdot A_1B \cdot \cos \angle AA_1B = 225 + 25 - 2 \cdot 5 \cdot 15 \cdot \frac{3}{5} = 250 - 90 = 160$

3. Искать длину медиан будем с помощью формул: удвоим  $BB_1$  за точку  $B$  и доп. Получим паралл.  $BB_1K$  (по пр. м.  $BB_1$  и  $AK$  и  $AB$  и  $B_1C$ ) По св. диаг. паралл.:

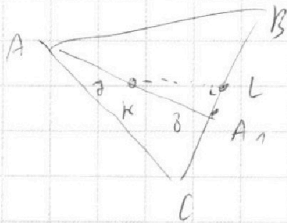
$$AC^2 + BK^2 = 2(AB^2 + BC^2), \quad BB_1^2 = \frac{2(AB^2 + BC^2) - AC^2}{4} = \frac{2(160 + 100) - 340}{4} = \frac{180}{4} = 45; \quad BB_1 = 3\sqrt{5}$$

$$\text{Аналогично: } CC_1^2 = \frac{2(AC^2 + BC^2) - AB^2}{4} = \frac{2(340 + 100) - 160}{4} = \frac{720}{4} = \frac{360}{2} = 180 = 45 \cdot 4, \quad CC_1 = 2\sqrt{45}$$

$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 15 \cdot 3\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{45} = 30 \cdot 45 = 1350$$

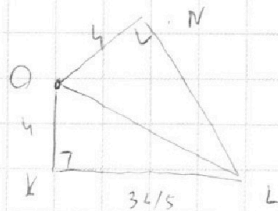
4. Т.к.  $K$  и  $N$  - точки касания.  $OK \perp (ABC) \Rightarrow OK \perp BC$ ;  $ON \perp (SBC) \Rightarrow ON \perp BC$ . Тогда, по тр. перп. прямой и плоскости  $BC \perp (OKN)$ . Тогда  $(OKN) \perp (ABC) = KL$ , где  $KL \perp BC$ , м.  $KL$  - высота прямой, соотв. высоте, опущенной из  $K$  на  $BC$ , пусть  $L \in BC$

В плоскости  $(SNL)$ :  $SL = SN = 3$ , как точки касания. Тогда  $KM = SL = 3$ ;  $AK = AM - KM = 7$ ;  $AK = 15 - 7 = 8 = AA_1 - AK = AA_1 - AK$



из  $\triangle AA_1K$ :  $KL = \sin \angle KA_1L \cdot KA_1 = \frac{4}{5} \cdot 8 = \frac{32}{5}$

5. Выясняем геометрию:  $(OK \perp LN)$



из  $\triangle OKL$   $LN = KL \cdot \sin \angle OKL = \triangle ONL$  по катету и гипотенузе  $= \triangle NLO = \triangle OKL$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 7 лист 3

$$\tan \angle OLK: \tan \angle OLK = \frac{OK}{KL} = \frac{4 \cdot 5}{32} = \frac{5}{8}$$

$$\angle NLK = 2 \angle OLK = 2 \arctg \frac{5}{8}$$

Заметим, что  $\angle NLK$  - двугран. угол двугран.

угла  $\angle S(BC)A$ , т.к.  $KL \perp BC$  и  $NL \perp BC$ .

Ответ: а) 1350 б)  $2 \arctg \frac{5}{8}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

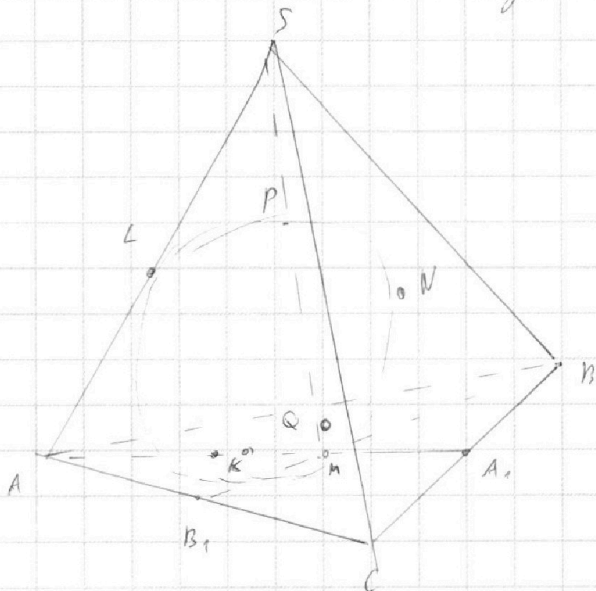
1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 7 Метр



Дано:  $SABC$  - пирамида;

$AA_1, BB_1, CC_1$  - медианы;

$\Omega$  - сфр;  $\Omega$  - кас  $\Delta ASB$  в  $L$ ;  $\Omega$  кас  $(ABC)$

в  $K \in AM$ ;  $\Omega \cap SM = \{P; Q\}$

$SP = MQ$ ;  $S(ABC) = 60$ ;  $SA = BC = 10$

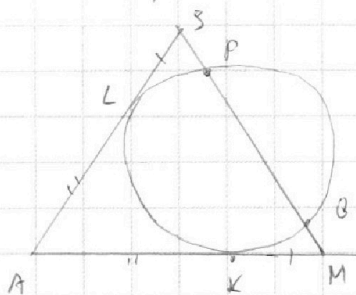
а) Найти  $AA_1, BB_1, CC_1$

б)  $\Omega$  кас  $BCS$  в  $N$ ;  $SN = 3$

на  $\Omega$  - ч. кас  $\angle LSA, \angle BSA, \angle S(BC)A$ ?

Решение.

1. Высотой перпенд. плоскости  $(ASM)$



а) Независимо от расположения

$P$  и  $Q$ :  $SQ = KP$

$SQ = SP + PQ = MK + QP = MP$  (на этой

картинке, если мы проведём  $PK$ , то

$MP = OM - QP = SP - PQ = SQ$ )



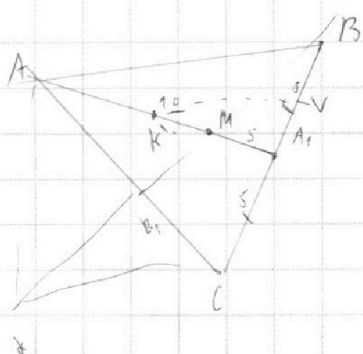
Отсюда, тогда по теореме

Птолемея, т.к. сфр. кас.  $AM$  в  $K$  и  $AS$ :

$$MK^2 = MQ \cdot MP = SP \cdot SQ = SL^2 \Rightarrow MK = SL. \text{ Крестом пирамиды,}$$

$$AL = AK \text{ как отрезки от центра сферы до точек касания.} \Rightarrow AM = AK + KM = AL + LS = AS = 10$$

2. Высотой перпенд.  $(ABC)$



$AM = \frac{3}{2} AA_1 = 15$ , т.к.  $M$  - центр тяжести.

$$S(AA_1C) = \frac{1}{2} S(ABC) = 30, \text{ т.к. } S(AA_1C) = S(ABA_1) \rightarrow$$

$\Delta BC$  равна высоте и отсюда  $CA_1$  и  $BA_1$  также равны.  $S(AA_1C) = AA_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot AC \cdot \sin \angle AA_1C$

$$\sin \angle AA_1C = \frac{30 \cdot 2}{15 \cdot 5} = \frac{4}{5}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 5

Первое уравнение

$$\log_3^4(6x) - 2 \log_3^2 7 = \log_{36x^2} 343 - 4$$

$$\log_3^4(6x) - \frac{2}{\log_3 6x} - \frac{3}{2} \log_3^2 7 + 4 = 0$$

$$2 \log_3^5(6x) - 3 \log_3^2(6x) + 8 \log_3 6x - 2 = 0$$

$$\begin{cases} \log_3 6x \neq 0 \\ 6x > 0 \end{cases}$$

$$\log_3^4(6x) = \log_{36x^2} (343) + 2 \log_3^2(7) - 4$$

Заметим, что при  $x > 0$ :  $f_1(x) = 6x$  - возрастает;

$f_2(x) = 36x^2$  - возрастает, тогда  $f_3(x) = \log_3^4(6x) \uparrow$ , м.к.

$$\log_3^4 y + 6 \log_3 7 = \log_3^4(7^3) - 4$$

$$\log_3^4 y + \frac{6}{\log_3 7} - \frac{5}{2 \log_3 7} + 4 = 0$$

$(\sqrt{2}; \sqrt{2})$

$$\sqrt{\frac{3}{2}}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\log_3^4 y + \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{\log_3 7} + 4 = 0$$

$$5 \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6} =$$

$$2 \log_3^5 y + 8 \log_3 y + 7 = 0$$

$$= \frac{10\pi}{6} = \frac{5\pi}{3}$$

$$\log_3^4(6x) - \frac{2}{\log_3 6x} - \frac{3}{2} \frac{1}{\log_3 6x} + 4 = 0$$

$$(-7 + \sqrt{2}; \sqrt{2})$$

$$2 \log_3^5 6x + 8 \log_3 6x - 7 = 0$$

$$y = -x + 7 + 2\sqrt{2}$$

$$2a^5 + 8a - 7 = 0$$

$$\text{Или: } a_1 = -b_1$$

$$2b^5 + 8b + 7 = 0$$

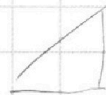
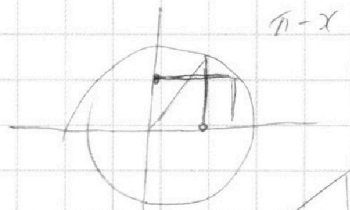
$$2(a^5 + b^5) + 8(a + b) = 0$$

$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$5 \arccos(\sqrt{1 - \cos^2 x})$$

$$5 \left( \frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x) \right) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$5 \arcsin(\sin x) = \pi - x$$







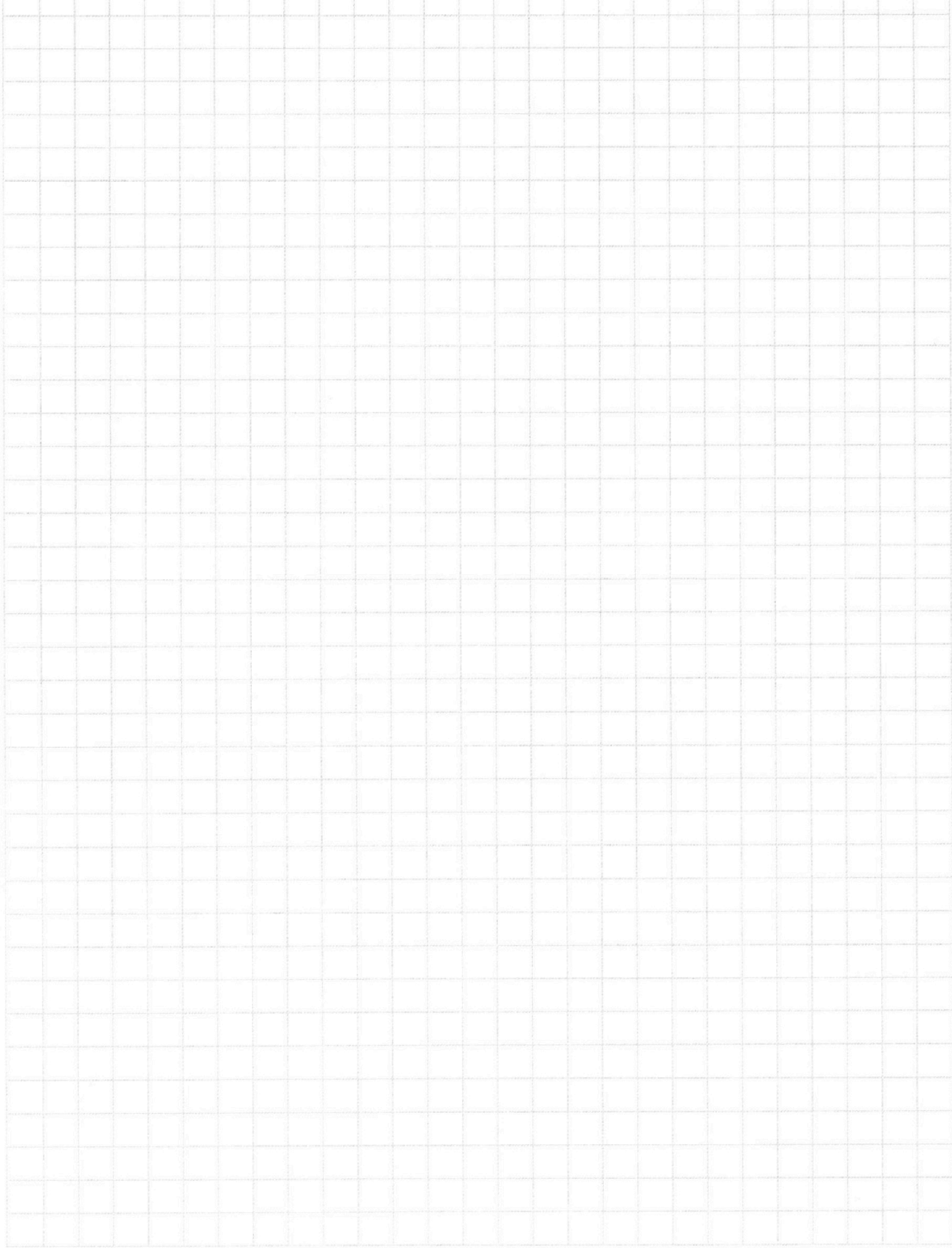
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4 МФТИ

тогда, что каждое из этих двух уравнений имеет  $D > 0$ ,  
т.е. найдется  $b$  такая, что  $D > 0$

Затем условие на дискриминант.

$\left\{ \begin{array}{l} D_1 > 0 \\ D_2 > 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow$   ~~$9(1 - \frac{b}{9a^2})^2$~~  Замена:  $t = \frac{1}{9a^2}$   
(так ах-монда)  
Уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} x^2(1+t) + 14x(1-bt) + 49b^2t + 45 &= 0 & \text{и} \\ x^2(1+t) - 14x \cdot bt - 9 &= 0 \end{aligned}$$

Затем условие на их дискриминант.

$$\left\{ \begin{array}{l} 14^2(1-bt)^2 - 49 \cdot 4b^2 \cdot 4(1+t)(49b^2t + 45) > 0 \\ 14^2b^2t^2 + 36(1+t) > 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 49(1-2bt + b^2t^2) - (49b^2t^2 + 45t + 49b^2t + 45) > 0 \\ 14^2b^2t^2 + 9t + 9 > 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t(-98b - 49b^2 - 45) + 4 > 0 \\ 49b^2t^2 + 9t + 9 > 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t(-49(b+1)^2 + 4) + 4 > 0 \\ 49b^2t^2 + 9t + 9 > 0 \end{array} \right.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned}
 a_1 + b_1 &= 2 \\
 b_1 + c_1 &= 13 \\
 a_1 + c_1 &= 14
 \end{aligned}$$

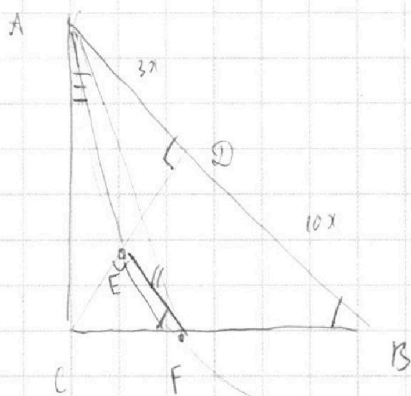
$$\begin{aligned}
 a_1 - c_1 &= c_1 - a_1 = c \\
 2c_1 &= 20 \\
 c_1 &= 10 \\
 a_1 &= 4, b_1 = 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_2 + b_2 &= 11 \\
 b_2 + c_2 &= 15 \\
 c_2 - a_2 &= 4 \\
 a_2 + c_2 &= 18 \\
 2c_2 &= 22 \\
 c_2 &= 11, a_2 = 3, b_2 = 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_3 + b_3 &= 14 \\
 b_3 + c_3 &= 18 \\
 c_3 - a_3 &= 4 \\
 a_3 + c_3 &= 44
 \end{aligned}$$

$$c_3 = 24, a_3 = 14, b_3 = 0$$

$$43 - 14 = 29$$



$$AB : BD = 13 : 10$$

$$\frac{S(\triangle ACD)}{S(\triangle CEF)} = \frac{AD \cdot CD}{CE \cdot EF} = \frac{AC \cdot AB}{CE \cdot EF}$$

$$\triangle CAF \sim \triangle CBA$$

$$CF = \frac{AC^2}{BC}$$

$$\frac{BC^2}{FC^2} = \frac{AB}{EF}$$

$$\sqrt[3]{EF} = \frac{BC}{AB} \left(1 - \frac{EF}{CD}\right)$$

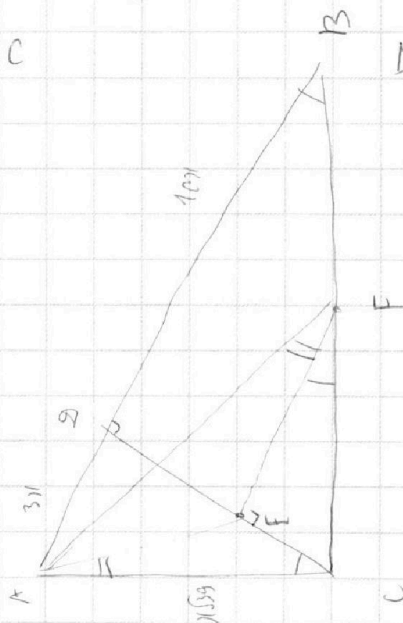
$$AC^2 = CF \cdot BC$$

$$CF = \frac{AC^2}{BC}$$

$$\triangle BDC \sim \triangle BDA$$

$$\frac{BC}{AB} = \frac{BD}{BC}$$

$$BC^2 = BD \cdot AB =$$



$$\angle AED = \angle CFA$$

$$\triangle FCA \sim \triangle EDA$$

$$\frac{FC}{ED} = \frac{AF}{AE} = \frac{AC}{AD}$$

$$FC = \sqrt[3]{ED}$$

$$\frac{FC}{BD} = \frac{CE}{CD} = \frac{CD - ED}{CD}$$