



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-17; 68)$, $Q(2; 68)$ и $R(19; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a, b, c \in \mathbb{N}$. $ab: 2^2 3^{11} 5^{14}$ $bc: 2^{13} 3^{15} 5^{18}$ $ac: 2^{14} 3^{17} 5^{47}$

$abc - \min?$

Прочувствуйте abc должно содержать в себе множители $5^{43} \cdot 3^{17} \cdot 2^{44}$ - то есть кратно наименьшим кратным каждого числа. ~~Значит~~ например, если $ac: 5^{43}$ то abc уже обязано быть кратно 5^{43} , а если еще и b в себе содержит 5^k то $abc: 5^{43+k}$. Аналогично abc как минимум кратно 2^{44} и 3^{17} . Заметим что кратности на форму "не попадают" делиться на 3 или 5 и поэтому c должно из этих чисел, поэтому чтобы можно было по подставить их в формулы в каждом из чисел.

Пусть $c: 5^{20}$ $a: 5^{23}$ и $b: 5$. Тогда $ac: 5^{43} \Rightarrow ac: 5^{43}$ и $ab: 5^{14} \Rightarrow ab: 5^{14}$. Тогда получили мин. значения 5 в abc - 5^{43} .

Ищем $ab: 2^2 3^{11}$ $bc: 2^{13} 3^{15}$ $ac: 2^{14} 3^{17}$

Пусть A - второе число $2 \cdot b \cdot a^2$ $B = b \cdot b^4$ и $C = b \cdot c^2$ составим. Тогда справедливы условия: $ув: \mathbb{R}$

$$\begin{cases} A+C \geq 14 \\ B+C \geq 13 \\ A+B \geq 7 \end{cases} \quad \left(\text{использовались } x^n \cdot x^k = x^{n+k} \right)$$

$$\begin{cases} A+C \geq 14 \\ A+C+2B \geq 20 \end{cases} \quad \begin{matrix} 2B \geq 6 \\ B \geq 3 \end{matrix} \quad \text{Аналогично из } \textcircled{1} - \textcircled{2} \quad 2A \geq 8 \Rightarrow A \geq 4$$

и из $\textcircled{1} + \textcircled{2} - \textcircled{3}$ $2C \geq 10 \Rightarrow C \geq 10$. Проверим оптимальная ли условия при минимальных значениях $B=3$ $A=4$ $C=10$

Действительно: $a \cdot c: 2^{4+10} \Rightarrow a \cdot c: 2^{14}$ и $b \cdot c: 2^{3+10} \Rightarrow b \cdot c: 2^{13}$
и $a \cdot b: 2^{4+3} \Rightarrow a \cdot b: 2^7 \Rightarrow$ миним. значения 2 это $3+4+10=17$
 $\Rightarrow abc: 2^{17}$ - удовлетворяет мин. условию 2^{14} .

Ищем $ab: 3^{11}$ $bc: 3^{15}$ $ac: 3^{17}$
составим аналогично чет. в них все обозначим, но вместо 2 будет 3.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \textcircled{1} A+B \geq 11 \\ \textcircled{2} B+C \geq 15 \\ \textcircled{3} A+C \geq 17 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} + \textcircled{2} - \textcircled{3} &: 2B \geq 9 & \begin{cases} B \geq 4,5 \\ A \geq 6,5 \\ C \geq 10,5 \end{cases} & \text{Т.к. } a, b \in \mathbb{N}, \text{ и } A, B, C \in \mathbb{Z}, \geq 0 \\ \textcircled{1} + \textcircled{3} - \textcircled{2} &: 2A \geq 13 \\ \textcircled{2} + \textcircled{3} - \textcircled{1} &: 2C \geq 21 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B \geq 5 \\ A \geq 7 \\ C \geq 11 \end{cases}$$

Проверим суммируем ли условия при $B=5, A=7, C=11$

$$a \cdot b : 3^{\frac{11}{7+5}} \Rightarrow a \cdot b : 3^{11} \quad b \cdot c : 3^{\frac{16}{5+11}} \Rightarrow b \cdot c : 3^{16} \quad \text{и} \quad a \cdot c : 3^{\frac{17}{7+11}} \Rightarrow a \cdot c : 3^{17}$$

$$\Rightarrow \text{минимум } 3 \quad \text{это } 5+7+11=23 \Rightarrow abc : 3^{23} - \text{ответ.}$$

$$\Rightarrow abc : 2^{17} \cdot 3^{23} \cdot 5^{43} \Rightarrow abc_{\min} = 2^{17} \cdot 3^{23} \cdot 5^{43}$$

$$\text{Ответ: } 2^{17} \cdot 3^{23} \cdot 5^{43}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

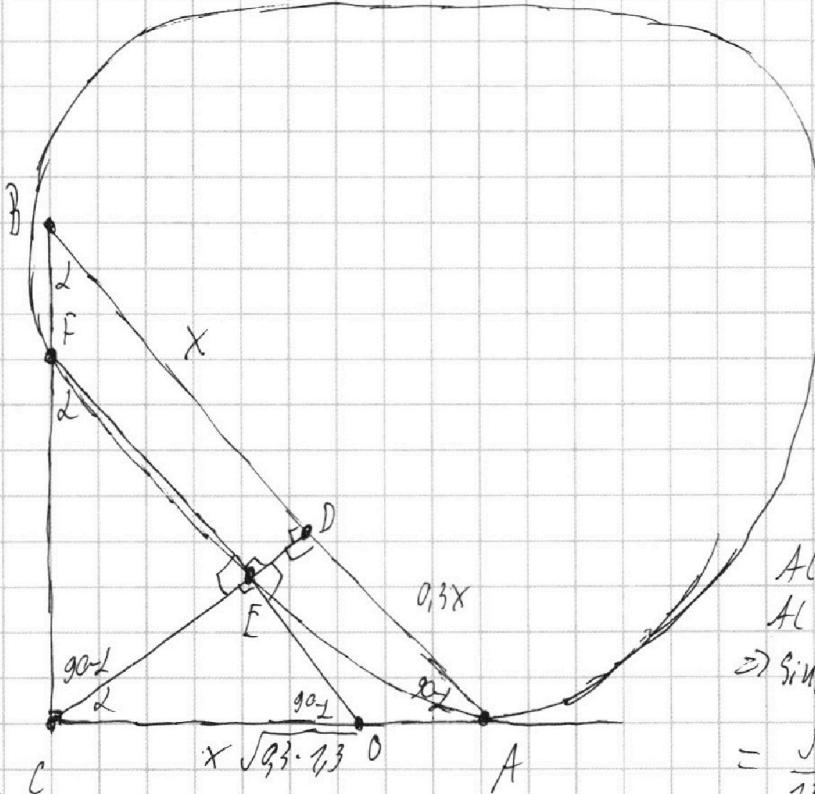
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\sqrt{2}$

$AB \parallel FE \Rightarrow$
 $FE \perp BD$
 Тогда $\angle CAD = 2$
 тогда $\angle CBD = 90 - 2$
 $\Rightarrow \angle PCA = 2$
 $\Rightarrow \angle DAC = 90 - 2$
 $\Rightarrow \angle CFE = 2$



$S_{\triangle ACD}$

$S_{\triangle CEF}$

$\frac{AB}{BD} = 1,3$

$BD = x = 7$

$AB = 1,3x \Rightarrow$

$AD = 0,3x \Rightarrow$

$CD = x\sqrt{3}$

из $\triangle ACD$: по т.

Пиф.

$AC^2 = 0,3^2x^2 + 3x^2$

$AC = x\sqrt{9,3+3}$

$\Rightarrow \sin 2 = \frac{0,3x}{x\sqrt{9,3+3}}$

$= \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{1,3}$

$\triangle CEF \sim \triangle ADC$

$\angle CEF = \angle ADC = 90^\circ \Rightarrow \triangle CEF \sim \triangle ADC$ (по 2 углам) \Rightarrow
 $\angle CFE = \angle ACD = 2$

$\frac{CE}{FC} = \frac{AD}{AC} = \frac{CD}{AC}$

$\Rightarrow \frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle CEF}} = k^2$

$\sin 2$ в $\triangle CFE$:

$\sin 2$ в $\triangle CDA$:

$\sin 2 = \frac{CE}{CF}$

$\sin 2 = \frac{AD}{AC}$

$\Rightarrow \frac{CE}{CF} = \frac{AD}{AC} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{1,3}$

$\frac{CE}{CF} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{1,3}$, $\Rightarrow CE = CF \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{1,3}$

Тогда $FE \perp AC = O$. Тогда в $\triangle CEO$: $\angle COE = 90^\circ$

$AO^2 = OE \cdot OF$ (по т. о кас и см.). $\triangle CFE$: в $\triangle FO$: $\sin 2 = \frac{OC}{FO}$

в $\triangle CEO$: $\sin 2 = \frac{OE}{OC}$. $\Rightarrow \sin 2 = \frac{OE}{OC} = \frac{OC}{OF} \Rightarrow OC^2 = OE \cdot OF$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

 МФТИ

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\left. \begin{array}{l} OF \cdot OE = OC^2 \\ OF \cdot OE = AO^2 \end{array} \right\} \Rightarrow AO^2 = OC^2 \Rightarrow AO = OC = \frac{1}{2} AC = \frac{x}{2} \sqrt{13 \cdot 0,3}$$

$$\sin \alpha = \frac{OC}{OF} \Rightarrow OF = \frac{OC}{\sin \alpha} = \frac{\frac{x}{2} \sqrt{13} \cdot \sqrt{0,3} \cdot 1,3}{\frac{\sqrt{13} \cdot \sqrt{0,3}}{2}} = \frac{1,3x}{2}$$

в $\triangle CFO$: $CF^2 + OC^2 = FO^2$ (кат. Пифагора)

$$CF^2 = \frac{1,3^2 x^2}{4} - \frac{x^2 \cdot 1,3 \cdot 0,3}{4} = \frac{x^2 \cdot 1,3}{4} \Rightarrow CF = \frac{x}{2} \sqrt{1,3}$$

$$k = \frac{AC}{FC} = \frac{x \sqrt{0,3} \cdot \sqrt{13}}{\frac{x \sqrt{1,3}}{2}} = \frac{x \sqrt{0,3} \cdot \sqrt{13} \cdot 2}{x \sqrt{1,3}} = 2 \sqrt{0,3}$$

$$\Rightarrow k^2 = 4 \cdot 0,3 = 1,2$$

$$\frac{S_{\triangle ACP}}{S_{\triangle CEF}} = k^2 \Rightarrow \frac{S_{\triangle ACP}}{S_{\triangle CEF}} = 1,2$$

Ответ: 1,2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



u3

$$5 \arccos(\cos(\sin x)) = \frac{3\pi}{2} + x$$

т.к. $\sin x$

$$\arccos(\cos(\sin x)) = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}\right)$$

$$\rightarrow \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} - x + \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}}{2}\right) \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} - x - \frac{3\pi}{10} - \frac{x}{5}}{2}\right) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{4\pi}{5} - \frac{4x}{5} = 2\pi k \\ \frac{\pi}{5} - \frac{6x}{5} = 2\pi n \end{array} \right. \quad k, n \in \mathbb{Z}$$

$$\left[\begin{array}{l} 2\pi - 2x = 5\pi k \\ \pi - 6x = 10\pi n \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{2\pi - 5\pi k}{2} \\ x = \frac{\pi - 10\pi n}{6} \end{array} \right.$$

т.к. $-1 \leq \sin x \leq 1$, т.к. $\sin x = 0$, то $-1 \leq \sin x \leq 1$ - выполняемо

т.к. $\arccos(y) \in [0, \pi]$, то $\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \in [0, \pi]$

$$0 \leq \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \leq \pi; \quad 0 \leq 3\pi + 2x \leq 10\pi; \quad -3\pi \leq 2x \leq 7\pi; \quad \frac{-3\pi}{2} \leq x \leq \frac{7\pi}{2}$$

Проведем анализ:

$$x_1 = \frac{2\pi - 5\pi k}{2}. \quad \frac{-3\pi}{2} \leq \frac{2\pi - 5\pi k}{2} \leq \frac{7\pi}{2}. \quad -3 \leq 2 - 5k \leq 7; \quad -5 \leq -5k \leq 5$$

$$k = -2; \quad -5 \leq 10 \leq 5 \quad \emptyset$$

$$k = -1; \quad -5 \leq 5 \leq 5 \Rightarrow x = \frac{2\pi + 5\pi}{2} = \frac{7\pi}{2}$$

$$k = 0; \quad -5 \leq 0 \leq 5 \Rightarrow x = \pi$$

$$k = 1; \quad -5 \leq -5 \leq 5 \Rightarrow x = \frac{-3\pi}{2}$$

$$k = 2; \quad -5 \leq -10 \leq 5 \quad \emptyset$$

$$x_2 = \frac{\pi - 10\pi n}{6}. \quad \frac{-3\pi}{2} \leq \frac{\pi - 10\pi n}{6} \leq \frac{7\pi}{2}$$

$$-9 \leq \pi - 10\pi n \leq 21; \quad -10 \leq -10n \leq 20$$

$$-1 \leq -n \leq 2$$

$$n = -3; \quad -1 \leq 3 \leq 2 \quad \emptyset$$

$$n = -2; \quad -1 \leq 2 \leq 2 \Rightarrow x = \frac{\pi + 20\pi}{6} = \frac{21\pi}{6}$$

$$n = -1; \quad -1 \leq 1 \leq 2 \Rightarrow x = \frac{\pi + 10\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$$

$$n = 0; \quad -1 \leq 0 \leq 2 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

$$n = 1; \quad -1 \leq -1 \leq 2 \Rightarrow x = \frac{\pi - 10\pi}{6} = \frac{-9\pi}{6} = \frac{-3\pi}{2}$$

$$n = 2; \quad -1 \leq -2 \leq 2 \quad \emptyset$$

$$\Rightarrow \text{Ответ: } x = \frac{7\pi}{2}; \pi; \frac{-3\pi}{2}; \frac{2\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; \frac{\pi}{6}; \frac{-3\pi}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$x^2 + 14x + y^2 - 49 = 0$, 4 рш.

$(x^2 + 14x + y^2 + 49)(x^2 + y^2 - 9) = 0$

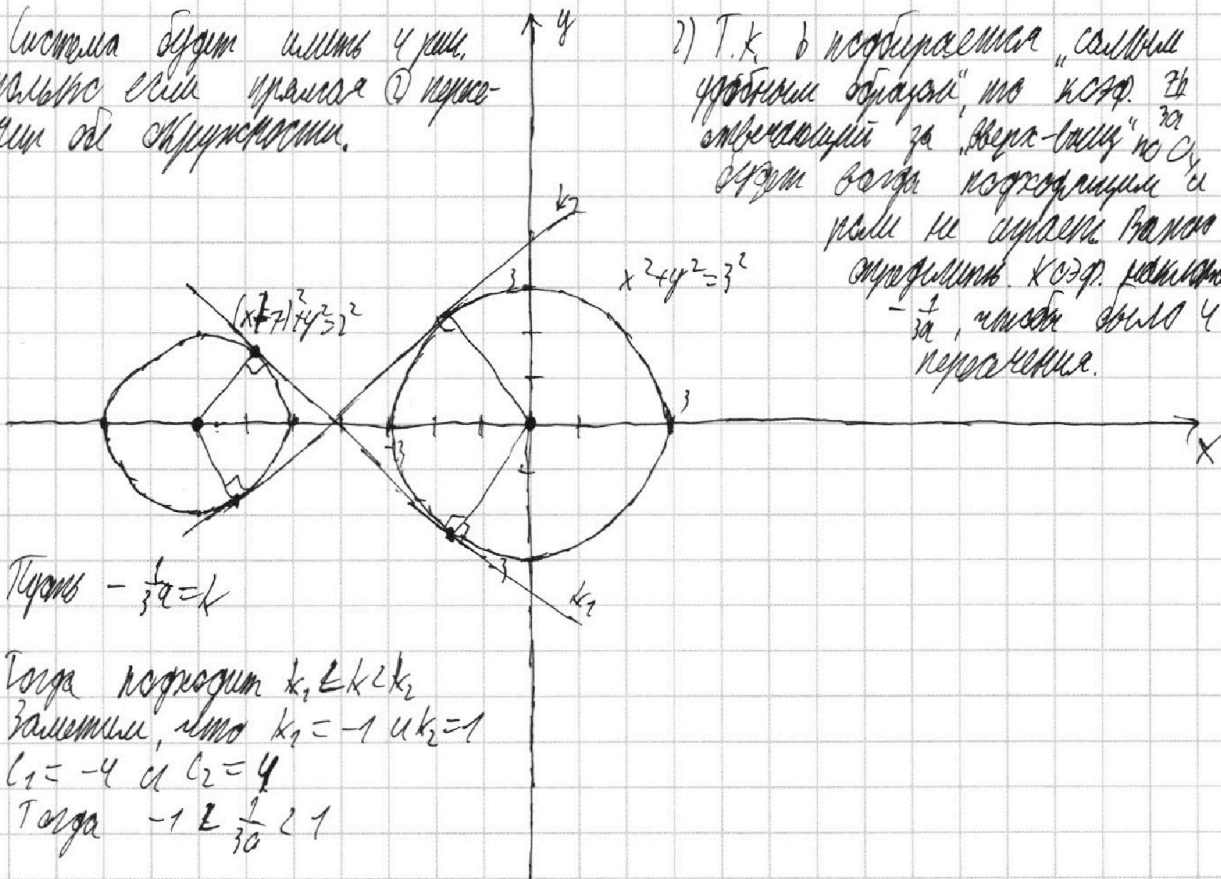
① $\begin{cases} x^2 + 14x + y^2 + 49 - 49 = 0 \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+7)^2 + y^2 = 2^2 \\ x^2 + y^2 = 3^2 \end{cases}$

② $3ay = -x + 7b$

$y = -\frac{x}{3a} + \frac{7b}{3a}$

1) Система будет иметь 4 рш., только если прямая ② пересекает обе окружности.

2) Т.к. в задаче требуется "сильные" условия, то "кста" $7b$ выбираем за "вертикаль" по Oy , тогда угол наклона прямой не имеет значения определять коэф. наклона $-\frac{1}{3a}$, чтобы было 4 пересечения.



Угол $-\frac{1}{3a} = k$

Тогда находим k_1, k_2
Заметим, что $k_1 = -1$ и $k_2 = 1$
 $l_1 = -4$ и $l_2 = 4$
Тогда $-1 \leq \frac{1}{3a} \leq 1$

$\frac{7b}{3a} = \pm 4$

$$\begin{cases} \frac{1}{3a} \geq -1 \\ \frac{1}{3a} \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3a} + \frac{1}{3a} \geq 0 \\ \frac{1}{3a} - \frac{1}{3a} \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2+3a}{3a} \geq 0 \\ \frac{2-3a}{3a} \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a+\frac{1}{3}}{a} \geq 0 \\ \frac{a-\frac{1}{3}}{a} \geq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow a \in (-\infty; -\frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}; +\infty)$

Ответ: $a \in (-\infty; -\frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}; +\infty)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{1} \begin{cases} \log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{6x} 343 - 4 \\ \log_7^4 4 + 6 \log_7 7 = \log_{4^2} (7^5) - 4 \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \begin{cases} 6x = t, t > 0 \\ \log_7^4 t - 2 \log_7 7 = \log_{t^2} 7^3 - 4 \end{cases}$$

$$\log_7^4 t + \frac{2}{\log_7 t} = \frac{15}{\log_7 t} - 4 \quad | \cdot 2$$

$$\log_7 t = z, z \neq 0$$

$$2z^4 - \frac{4}{z} - \frac{3}{z} + 8 = 0 \quad | \cdot z \neq 0$$

$$2z^5 + 8z - 7 = 0$$

$$\begin{cases} \log_7^4 t - 2 \log_7 7 = \log_{t^2} 7^3 - 4 \\ \log_7^4 4 + 6 \log_7 7 = \log_{4^2} 7^5 - 4 \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \begin{cases} \log_7^4 t - \frac{2}{\log_7 t} = \frac{3}{2 \log_7 t} - 4 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} \log_7^4 4 + \frac{6}{\log_7 4} = \frac{5}{2 \log_7 4} - 4 \end{cases}$$

①-②:

$$\log_7^4 t - \log_7^4 4 - \frac{2}{\log_7 t} - \frac{6}{\log_7 4} = \frac{3}{2 \log_7 t} - \frac{5}{2 \log_7 4}$$

$$= \frac{3}{2 \log_7 t} - \frac{5}{2 \log_7 4}$$

$$(\log_7^2 t - \log_7^2 4)(\log_7^2 t + \log_7^2 4) - \frac{\log_7^4 t + \log_7^4 4}{\log_7 t \log_7 4} = \frac{\log_7^4 t - \log_7^4 4}{2 \log_7 t \cdot \log_7 4}$$

$$(\log_7 t \cdot \log_7 \frac{t}{4})(\log_7 t \cdot \log_7 \frac{t}{4} - 2 \log_7 t \log_7 4) - \frac{\log_7^4 (t/4)^2}{\log_7 t \log_7 4} = \frac{\log_7^4 \frac{t^3}{4^3}}{2 \log_7 t \cdot \log_7 4}$$

$$\textcircled{1} \log_7 t = z; z^4 - \frac{2}{z} - \frac{3}{2z} + 4 = 0$$

$$\textcircled{2} \log_7 4 = k, k \neq 0$$

$$z+k = \log_7 t \cdot 4$$

$$2z^4 - \frac{4}{z} - \frac{3}{z} + 8 = 0$$

$$k^4 + \frac{6}{k} = \frac{5}{2k} - 4 \quad | \cdot 2k$$

$$2z^5 - 7 + 8z = 0$$

$$2k^5 + 12 = 5 - 8k \Rightarrow$$

$$2k^5 + 8k + 7 = 0$$

$$2z^5 + 2k^5 + 8z + 8k = 0$$

$$z^5 + k^5 + 4z + 4k = 0$$

$$z^5 + k^5 + 4(z+k) = 0$$

$z = -k$ - решение и единственное, т.к. монотонно возр.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \Rightarrow \log_7 t &= -\log_7 4 \\ \log_7 t &= \log_7 \frac{1}{4} \\ t &= \frac{1}{4} \\ ty &= 1 \\ 6xy &= 1 \\ xy &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{1}{6}$.

$$\begin{aligned} z^5 + 4z &= -(k^5 + 4k) \\ f(z) &= 5z^4 + 4 \quad \text{иском} \\ &= \text{возраст. при } z \in \mathbb{R} \\ f(k) &= -5k^4 - 4 \quad \text{иском} \\ &= \text{убывающ. при } k \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow & \text{максимум 1 рещ. , т.к.} \\ z = -k & \text{ - рещ. } \rightarrow \text{это одно и тоже} \\ ((-k)^5 + k^5 + 4(-k+k)) &= -k^5 + k^5 + 4 \cdot 0 = 0 + 0 = 0 \checkmark \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



МФТИ

$\sqrt{5}$

$$z^5 + 8z = 0$$

$$z^5 + z = 0$$

$$z = 0$$

$$z^4 + 1 = 0$$

$$z^4 + 1 = 0$$

$$(z+k)^5 = (z+k)^2 (z+k)^2 (z+k) =$$

$$= (z^2 + 2zk + k^2)(z^2 + 2zk + k^2)(z+k) =$$

$$= (z^5 + 2z^4k + z^3k^2 +$$

$$+ 2z^4k + 2z^3k^2 + 2z^3k + 4z^2k^2 + 2z^2k^3 +$$

$$+ k^2z^2 + 2zk^3 + k^4)(z+k) =$$

$$= (z^4 + 4z^3k + 6z^2k^2 + 4zk^3 + k^4)(z+k)$$

$$= (z^5 + 4z^4k + 6z^3k^2 + 4z^2k^3 + k^4)z +$$

$$\frac{z^4}{\sqrt{5}} = \frac{z^4}{\sqrt{5}}$$

$$Ac = 0c$$

$$k^2 = 0c \cdot 0c$$

$$0c = 0c \cdot 0c$$

$$\frac{0c}{0c} = \frac{0c}{0c}$$

$$EC = \sqrt{EF \cdot Eo} = EC = \sqrt{Eo \cdot EF}$$

$$EC = \frac{z^4}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{z^4}{\sqrt{5}} = \sqrt{Eo \cdot EF}$$

$$z = z$$

$$\sqrt{z}$$

$$z \cdot EC = z \cdot z$$

$$z^2 + z$$

$$z \cdot EC = z \cdot z$$

$$\frac{z}{z} = \frac{z}{z} = \frac{z}{z}$$

$$FE = \frac{z}{z}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Решение

$$AC^2 = 0,3x^2 + 0,3^2x^2 = x^2 \cdot 0,3(1+0,3) = x^2 \cdot 0,3 \cdot 1,3 = x^2 \cdot 0,39$$

$$\sin \alpha = \frac{0,3x}{x\sqrt{0,39}} = \frac{0,3}{\sqrt{0,39}} = \frac{0,3\sqrt{13}}{0,39}$$

$$AC = x\sqrt{0,39}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{1,3} \cdot 0,3}{0,39}$$

$$\alpha = \frac{AD}{DC} = \frac{CE}{FE} = \sqrt{0,39}$$

$$CE = CF \sin \alpha$$

$$AD = AC \sin \alpha$$

$$\frac{1}{\sqrt{1,3}} = \frac{FC}{FO}$$

$$FC = \frac{1,3x}{2\sqrt{1,3}} = \frac{x\sqrt{1,3}}{2 \cdot 1,3}$$

$$\frac{FE}{FC} = \frac{FC}{CO} = \frac{CE}{OE}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \sqrt{0,39}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{0,39} \cos \alpha$$

$$\frac{\sqrt{1,3}}{1,3} = \frac{FC}{FO}$$

$$\cos^2 \alpha + 0,39 \cos^2 \alpha = 1 \quad FC = \frac{\sqrt{1,3}}{1,3} \cdot \frac{1,3x}{2}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{\sqrt{1,3}}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{1,3}}} = \sqrt{\frac{0,39}{1,3}}$$

$$= \frac{\sqrt{0,39}}{\sqrt{1,3}} = \frac{\sqrt{0,39} \cdot \sqrt{1,3}}{1,3}$$

$$S_{\triangle CEF} = \frac{CE \cdot FE}{2}$$

$$\frac{AD \cdot CD}{2} = \frac{CE \cdot FE}{2}$$

$$S_{\triangle ACD} = \frac{AD \cdot CD}{2}$$

$$= \frac{AD \cdot CD}{CE \cdot FE}$$

$$\cos \alpha = \frac{FE}{FC}$$

$$FE = FC$$

$$CF^2 = CF^2 \sin^2 \alpha + FE^2$$

$$FE^2 = CF^2 - CF^2 \cdot \frac{0,3 \cdot 1,3}{1,3 \cdot 1,3}$$

$$FE^2 = CF^2 - CF^2 \cdot \frac{3}{13}$$

$$FE^2 = \frac{10CF^2}{13}$$

$$FE = CF \sqrt{\frac{10}{13}}$$

$$h = x \cdot 0,3 \quad h = 7$$

$$h \cdot \cos \alpha = 7 \cdot \frac{1}{\sqrt{1,3}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



чиркит.

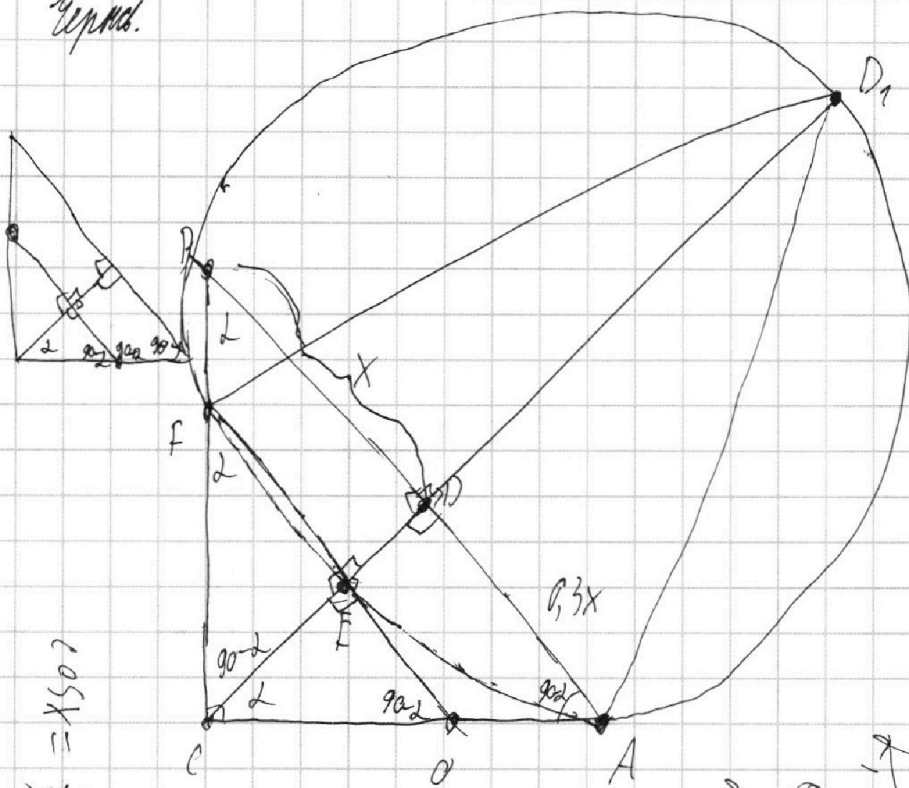
$$\frac{AB}{BD} = 1,3$$

$$AB = 1,3BD$$

$$CD^2 = 0,3x^2$$

$$CD = x\sqrt{0,3}$$

FD_1 - параллельно.



$$\cos x = \frac{2}{3}$$

$$x = \arccos \frac{2}{3}$$

$$\sin x$$

$$\sin \alpha = x$$

$$\cos \alpha = x$$

$$x = \arccos \frac{2}{3}$$

$$\alpha = \sin x$$

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

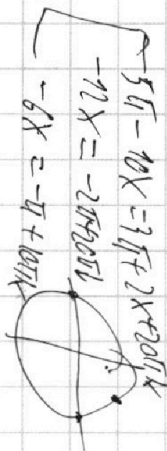
$$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$$

$$\sin \alpha = \frac{2}{3}$$

$$x = \arcsin \frac{2}{3}$$

$$x = \arccos \frac{2}{3}$$

$$x = \frac{\pi - \arccos \frac{2}{3}}{2}$$



$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\sin x = \frac{-4x - \frac{4\pi}{3} + 2\pi}{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{-4x - \frac{4\pi}{3} + 2\pi}{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{2\pi - 4x - \frac{4\pi}{3}}{5}$$

$$\sin x = \frac{-4x - \frac{4\pi}{3} + 2\pi}{5}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + x}{3}\right) = 0$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{2\pi + x}{3}\right)$$

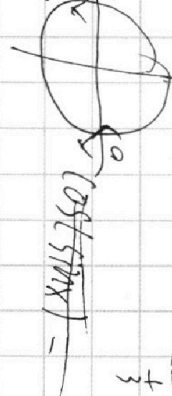
$$\cos\left(\frac{2\pi + x}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi + x}{3}\right)$$

$$\arccos(\cos(\sin x)) = \frac{2\pi + x}{3}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{2}{3}$$

$$\cos \alpha = x$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$



444

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

$$\begin{cases} a+c=14 \\ b+c \geq 13 \\ a+b \geq 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b \geq 14 \\ b+c \geq 18 \\ a+c=43 \end{cases}$$

20423

$$a+c+2b \geq 32$$

$$2b \geq \dots$$

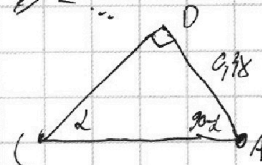
$$a+2b+c \geq 20$$

$$2b \geq 6$$

$$b \geq 3$$

$$a+b+c \geq 61$$

$$2c \geq \dots$$



b=3

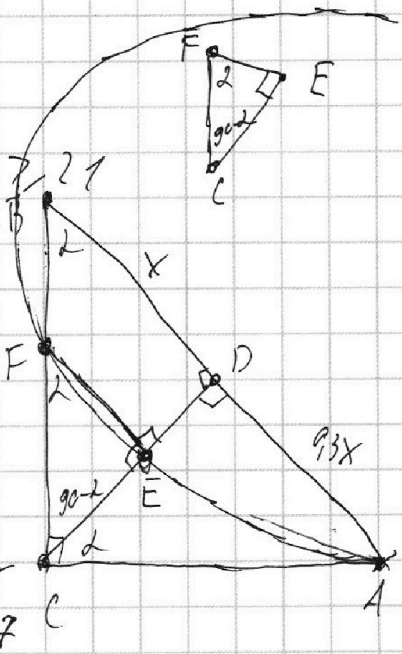
$$\begin{cases} a+c=14 \\ c \geq 10 \\ a \geq 4 \end{cases}$$

c=10
a=4

$$2A+B+C \geq 27$$

$$2A \geq 8$$

$$A \geq 4$$



$$\begin{cases} a+c \geq 14 \\ b+c \geq 13 \\ a+b \geq 7 \end{cases}$$

$$a+c \geq 14$$

$$a+c+2b \geq 20$$

$$2b \geq 6$$

$$b \geq 3$$

$$B \geq 5$$

$$A \geq 7$$

$$A+B+2C \geq 29$$

$$A+B \geq 7$$

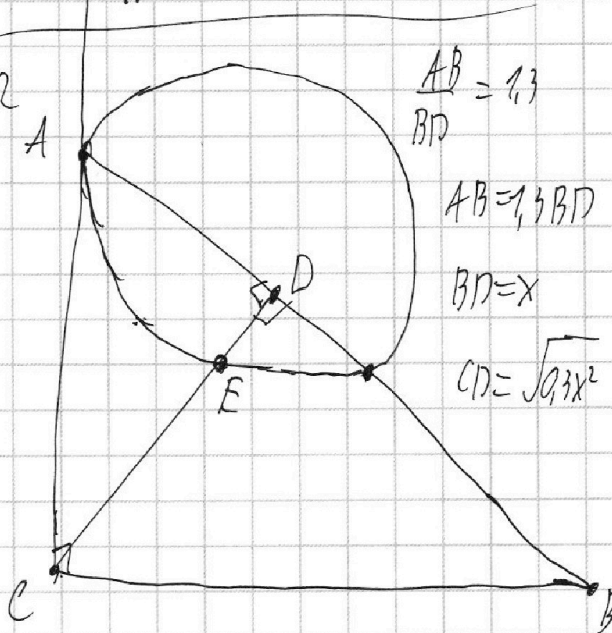
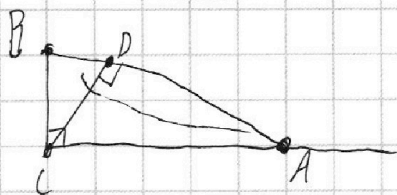
$$B=4$$

$$A=7$$

$$C=10$$

$$2^{4.5} = 2^{\frac{9}{2}} = \sqrt{\dots}$$

$$\frac{\sin ACD}{\sin CEF}$$



$$AB = 1.3$$

$$BD$$

$$AB = 1.3 BD$$

$$BD = x$$

$$CD = \sqrt{9.3x^2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Числа

$$y = kx + c$$

$$(-4; 0)$$

$$(0; -4) \quad c = -4$$

$$0 = k - 4$$

$$(-4; 0)$$

$$k = 4$$

$$y = kx - 4$$

$$k = 4$$

$$0 = -4k - 4$$

$$k = -1$$

$$y = kx + c$$

$$y = -x - 4$$

$$\begin{cases} x^2 + k^2x^2 + c^2 + 2kxc - 9 = 0 \\ x^2 + 49 + 14x + k^2x^2 + c^2 + 2kxc - 4 = 0 \end{cases}$$

$$x^2 + 4^2 - 9 = 0$$

$$D_1 = 4k^2c^2 - 4(c^2 - 9)(1 + k^2)$$

$$x^2 + (x+4)^2 - 9 = 0$$

$$k^2c^2 - (c^2 + c^2k^2 - 9 - 9k^2) =$$

$$x^2 + x^2 + 16 + 8x - 9 = 0$$

$$= 9k^2 + 9 - c^2 = 0$$

$$2x^2 + 8x + 7 = 0$$

$$x^2(1+k^2) + x(14+2kc) +$$

$$D = 64 - 56 = 8 = (2\sqrt{2})^2$$

$$x^2(1+k^2) + x(14+2kc) + (45+c^2) = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm 2\sqrt{2}}{2 \cdot 2} = \frac{-4 \pm \sqrt{2}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2}}{1}$$

$$D = 196 + 4k^2c^2 - 56kc - 4(1+k^2)(45+c^2) = 0$$

$$9k^2 + 9 - c^2 = 0 \quad ; 2$$

$$k^2c^2 + 49 - 14kc - (45 + c^2 + 45k^2 + k^2c^2) =$$

$$45k^2 + c^2 + 14kc - 9 = 0$$

$$= 4 - 14kc - 45k^2 - c^2 = 0$$

$$\begin{cases} 9 + 9 - 16 = 2 \\ 45 + 16 - 4 = 57 + 14kc = 57 - 56 = 1 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

b - подбирается

$$\begin{cases} 9k^2 = 49b^2k^2 - 9 \\ k^2(9 - 49b^2) = -9 \\ k^2 = \frac{9}{49b^2 - 9} \end{cases}$$

$$x^2(x+7)^2 - 49 + y^2 + 45 = (x+7)^2 + y^2 - 4 = (x+7)^2 + (y-2)(y+2)$$

$$\begin{cases} (x+7)^2 + y^2 = 2^2 \\ x^2 + y^2 = 3^2 \end{cases}$$

$$3a = -\frac{1}{k}$$

$$-\frac{1}{3a} = k \Rightarrow \frac{1}{3a} = -k$$

$$3ay = 7b - x \quad a \neq 0$$

$$y = -\frac{x}{3a} + \frac{7b}{3}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y = kx \end{cases}$$

$$C = \frac{7b}{3a} \Rightarrow C = -7bk$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ (x+7)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$x^2 + k^2x^2 = 9$$

$$x^2(1+k^2) = 9$$

$$x^2(1+k^2) - 9 = 0$$

$$x^2 = \frac{9}{1+k^2} \quad D=0$$

$$0 + 36(1+k^2)$$

$$(x+7)^2 - x^2 = -5$$

$$36(1+k^2) = 0$$

$$\sqrt{D} = 6\sqrt{1+k^2}$$

$$x^2 + 49 + 14x - x^2 = -5$$

$$1+k^2 = 0$$

$$x = \frac{0 \pm 0}{0}$$

$$14x = -54$$

$$7x = -27$$

$$x = -\frac{27}{7}$$

$$k^2 = -1$$

∅

$$k = \pm \sqrt{\frac{129}{9}}$$

$$= \pm \frac{\sqrt{129}}{3}$$

$$= \pm \sqrt{49b^2k^2}$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

$$y = kx + C$$

$$9 + 9k^2 - C^2 = 0$$

$$9k^2 = C^2 - 9$$

$$x^2 + k^2x^2 + C^2 + 2kxC - 9 = 0$$

$$D = 4k^2C^2 - 4(C^2 - 9)(1+k^2) =$$

$$= 4k^2C^2 - 4(C^2 + C^2k^2 - 9 - 9k^2)$$

$$= 4k^2C^2 - 4C^2 - 4C^2k^2 + 36 + 36k^2$$