



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^7 3^{11} 5^{14}$ ,  $bc$  делится на  $2^{13} 3^{15} 5^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{14} 3^{17} 5^{43}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1,3$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-17;68)$ ,  $Q(2;68)$  и  $R(19;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что  $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 60,  $SA = BC = 10$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 3$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1) \quad a^2 b^2 c^2 = 2 \cdot 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}, \quad bc = 2^{12} \cdot 3^{15} \cdot 5^{12}, \quad ac = 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{13}$$

$$a, b, c \in \mathbb{Z}$$

$$a^2 b^2 c^2 = (abc)^2 = \alpha \beta \gamma \cdot 2^{34} \cdot 3^{43} \cdot 5^{75}$$

$$abc : 2^{17} \cdot 3^{\frac{43}{2}} \cdot 5^{\frac{75}{2}}$$

Но так как  $a, b, c \in \mathbb{N}$ , то:

$$(abc)_{\min} = 2^{17} \cdot 3^{43} \cdot 5^{75}$$

$$\text{Ответ: } 2^{17} \cdot 3^{43} \cdot 5^{75}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

12) Обозначим  $DB$  за  $10x$ ,  
тогда  $AB = 13x \Rightarrow AD = 3x$

Из подобия  $\triangle CDB$  и  $\triangle ABC$ :

$$\frac{CB}{AB} = \frac{DB}{CB} \Rightarrow CB = x\sqrt{130}$$

Тогда  $AC = x\sqrt{39}$ ;  $CD = x\sqrt{30}$

Проведем  $AB$  до пересечения

с окружностью.  ~~$AB$~~   $AB \cap \omega = T$ . Тогда, т.к.

$EF \parallel AB$ , то  $AETF$  — трапеция, а т.к. она  
вписана, то она равнобедренная. ( $\angle ATF = \angle EAB$ )

Т.к.  $AC$  — касательная, то  $\angle CAF = \angle ATF$  (угол

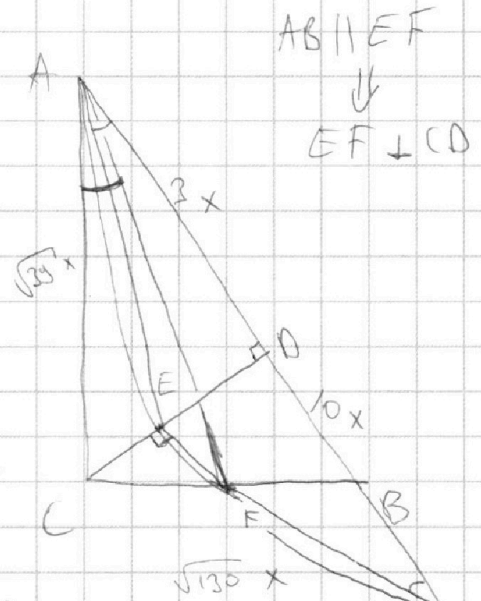
~~между~~ между касательной и хордой). Тогда  $\angle EAB = \angle CAF$   
и  $\triangle ACF \sim \triangle AED \Rightarrow \frac{ED}{CF} = \frac{AD}{AC} = \frac{3}{\sqrt{39}}$

$$\frac{CD - CE}{CF} = \frac{3}{\sqrt{39}} \Leftrightarrow \frac{x\sqrt{30}}{CF} - \frac{\sqrt{39}}{13} = \frac{3}{\sqrt{39}} \Rightarrow CF = \frac{x \cdot 13 \sqrt{30}}{\sqrt{39} + 3\sqrt{13}}$$

Т.к.  $\triangle AED$  и  $\triangle CEF$  — подобны, то если  $k$  — коэффициент подобия, то:  $k = \frac{AC}{CF} = \frac{39 + 3 \cdot 13}{13 \sqrt{30}} = \frac{6}{\sqrt{30}}$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = k^2 = \frac{36}{30} = \frac{6}{5}$$

Ответ:  $\frac{6}{5}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3}) \quad 5 \arccos(\cos x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$\Leftrightarrow$

$$5 \arccos\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)\right) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\frac{3\pi}{2} + x \in [(k+1)\pi, (k+2)\pi]$$

$\Downarrow$

$$5\left(\frac{3\pi}{2} + x - \pi k\right) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\left(\frac{15}{2} - 5k\right)\pi + 5x = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$4x = -6\pi + 5\pi k$$

$$x = -\frac{3}{2}\pi + \frac{5\pi}{4}k; \quad x \in \left[-\frac{3}{2}\pi + \pi k, -\frac{1}{2}\pi + \pi k\right]$$

~~Ответ:  $\frac{3}{2}\pi + \frac{5\pi}{4}k, \quad k \in \mathbb{Z}$~~

~~$k \in \{4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, -4\}$~~

$k \in \{0, 2, 4\}$

~~Ответ:  $x = -\frac{3}{2}\pi$~~

~~$x = -\frac{\pi}{4}$~~

~~$x = \pi$~~

~~$x = \frac{9\pi}{4}$~~

~~$x = \frac{14\pi}{4}$~~

Ответ:  $x = -\frac{3}{2}\pi$

$x = \pi$

$x = \frac{7\pi}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



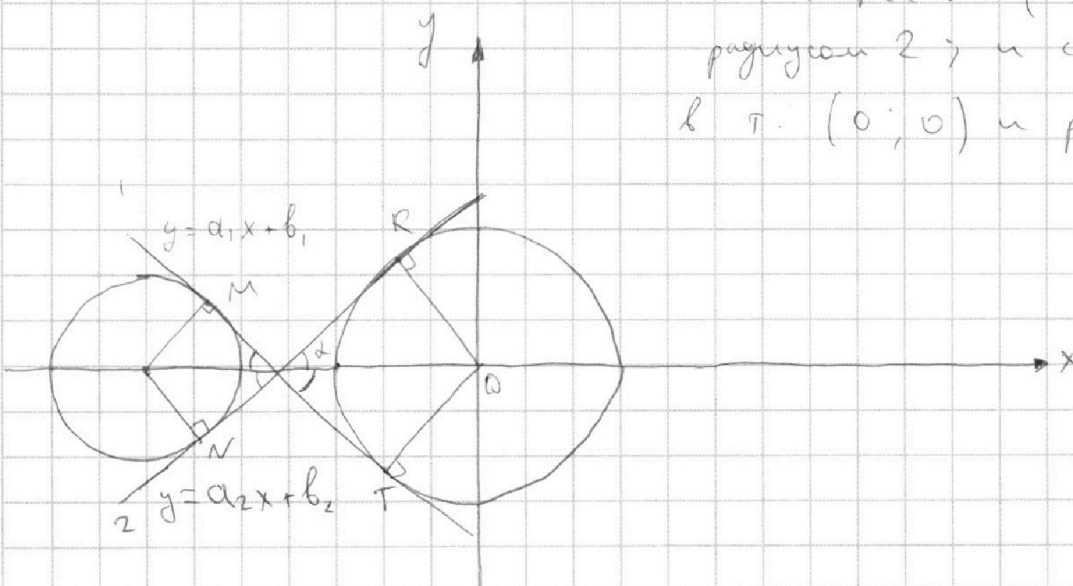
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~4)

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 \end{cases} \leftarrow \text{уравнение прямой}$$

$$\begin{cases} (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases} \leftarrow \text{уравнение окружностей}$$

с центром в т.  $(-7; 0)$  и радиусом  $2$ ; и с центром в т.  $(0; 0)$  и радиусом  $3$



При  $a = 0$ : при  $b = 0 \rightarrow x = 0 \Rightarrow 4$  решения

$$\text{При } a \neq 0: y = -\frac{1}{3a}x + \frac{7b}{3a}$$

Не найдется такое  $b$ , чтоб система имела 4 решения, если угловой коэффициент прямой будет меньше, чем у "общей" касательной 1 или больше, чем у "общей" касательной 2.

Касательная 1:  $y = a_1x + b_1$

$$\frac{2+3}{\sin \alpha} = 7 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{5}{7} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{2\sqrt{6}}$$

$$-\frac{1}{3a} \in \left(-\frac{5}{2\sqrt{6}}; 0\right) \cup \left(0, \frac{5}{2\sqrt{6}}\right) \Rightarrow a \in \left(\frac{2\sqrt{6}}{15}; 0\right) \cup \left(0, \frac{2\sqrt{6}}{15}\right) \cup \{0\}$$

Ответ:  $a \in \left(-\frac{2\sqrt{6}}{15}; \frac{2\sqrt{6}}{15}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

24 (Продолжение)

$$-\frac{1}{3a} \in \left(-\frac{5}{2\sqrt{6}}; 0\right) \cup \left(0; \frac{5}{2\sqrt{6}}\right)$$

$$a \in \left(-\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{15}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty\right)$$

~~$a = 0$~~

Ответ:  $a \in \left(-\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{15}\right) \cup \{0\} \cup \left(\frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\rightarrow 5) \left\{ \begin{aligned} \log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 &= \log_{36x^2} 343 - 4 \\ \log_7^5 y + 6 \log_y 7 &= \log_{7^2} (7^5) - 4 \end{aligned} \right. \quad \begin{aligned} y > 0; y \neq 1 \\ x > 0; x \neq \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\log_7^5 y + 6 \log_y 7 = \log_{7^2} (7^5) - 4$$

$$\log_7^4(6x) - \frac{2}{\log_7(6x)} = \frac{3}{2} \frac{1}{\log_7 6x} - 4$$

$$\log_7^5 y + \frac{6}{\log_7 y} = \frac{5}{2} \frac{1}{\log_7 y} - 4$$

$$\log_7^4(6x) - \frac{7}{2} \frac{1}{\log_7(6x)} + 4 = 0$$

$$\log_7^5 y + \frac{7}{2} \frac{1}{\log_7 y} + 4 = 0$$

Пусть  $l$  — корень первого уравнения относительно  $\log_7(6x)$ . Тогда  $(-l)$  — корень второго уравнения относительно  $\log_7 y$ . Следовательно, т.к. кубические ур-е  $l^5 + 4l - \frac{7}{2} = 0$  и ур-е  $l^5 + 4l + \frac{7}{2} = 0$  всегда больше, чем ноль, то эти ур-е имеют ~~единственный~~ корень по единственному корню. Тогда:

$$\log_7 y = -\log_7(6x) \Rightarrow y = (6x)^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow xy = \frac{1}{6} \rightarrow \text{единственное возможное значение}$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{6}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

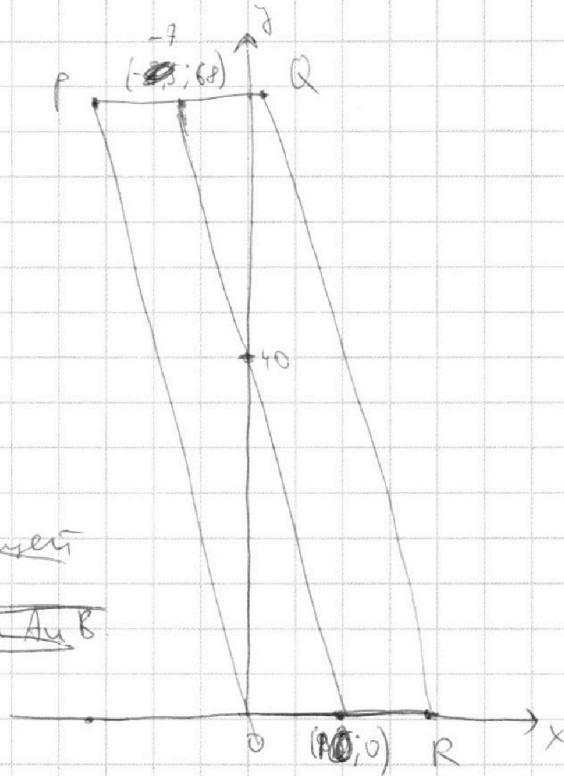
б)  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$

$$4(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 40$$

~~$l_p$  — прямая, содержащая  
т.  $A$  и т.  $B$ , проходящей  
срэд т.  $(0, 40)$~~

~~$l_p$  — прямая, проходящей  
через т.  $(0, 40)$  и точку  $A$  и  $B$ .~~

$$4x + y - 40 = 0$$



$y = -4x + 40$ . Данная прямая параллельна  
сторонам  $OP$  и  $RQ$  параллелограмма

$$\begin{cases} y = -4x + 40 \\ x \in [-7, 10] \\ x \in [-7, 5] \end{cases} \text{ (точки лежат внутри)} \\ \text{параллелограмма}$$

Т.к. все точки на этой прямой с целыми  $x$ -координатами также имеют целые  $y$ -координаты, то нам подходит 18 разных точек. Тогда из них выберем пару точек  $A$  и  $B$  можно 306 способами, если они должны быть различными или 324 способами, если  $A$  и  $B$  могут совпадать.

Ответ: ~~324 (если  $A$  и  $B$  могут совпадать)~~ или  
306 (если  $A$  и  $B$  не могут совпадать)





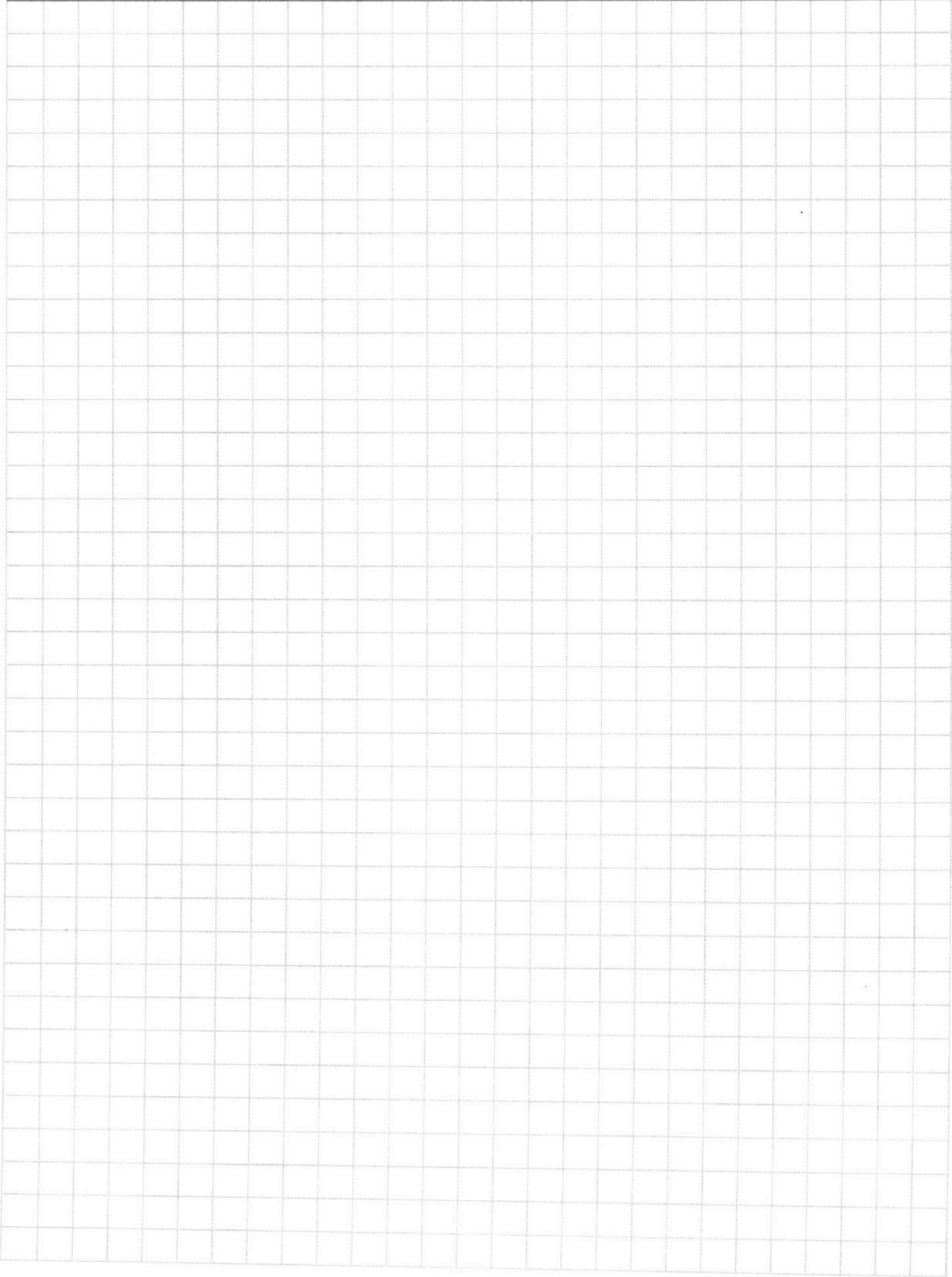
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



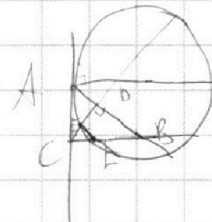
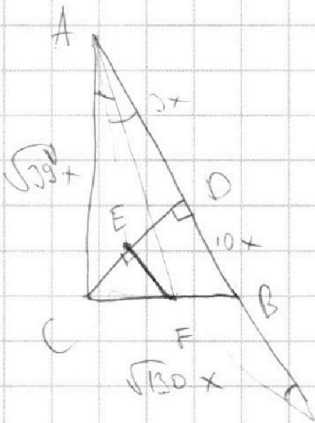
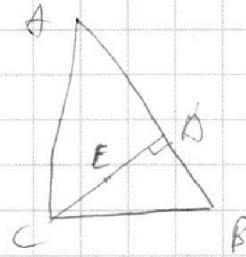
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{3\pi}{2} + x \in (\pi + \pi; \pi + k]$$

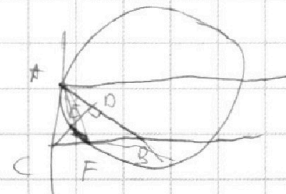
$$OB^2 =$$

$$\frac{\sqrt{10}}{2} + x =$$

$$\frac{AD}{DB} = \frac{3}{10}$$

$$\frac{AB}{CB} = \frac{BD}{CB}$$

$$CB^2 = AB \cdot BD$$



$$\sin \cos \left( \cos \left( \frac{3\pi}{2} + x \right) \right) = \frac{3\sqrt{10}}{2} + x$$

$$130x^2; (B = x\sqrt{10})$$

$$\frac{3\pi}{2} + x \in [0, \pi] \Rightarrow \frac{15\pi}{2} + \pi x = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$4x = -6\sqrt{10}$$

$$39x^2 =$$

$$AC = x\sqrt{10}$$

$$x = -\frac{3\sqrt{10}}{2}$$

$$\frac{3\pi}{2} + x \in [\pi, 2\pi] \Rightarrow \frac{5\pi}{2} + \pi x = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$4x = -\sqrt{10} \Rightarrow x = -\frac{\sqrt{10}}{4}$$

$$\frac{3\pi}{2} + x \in [2\pi, 3\pi] \Rightarrow 4x = \sqrt{10}; x = \frac{\sqrt{10}}{4}$$

$$\frac{3\pi}{2} + x \in [3\pi, 4\pi] \Rightarrow$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3ay = -x + 7b$$

$$y = -\frac{1}{3a}x + \frac{7b}{3a}$$

$$5 + 2$$

$$4 + 3 \quad \frac{0}{2} \cdot \frac{4}{3}$$

$$\frac{2}{\sin \alpha} + \frac{3}{\sin \alpha} = 7$$

$$\frac{x\sqrt{30} - CE}{CE} = \frac{3}{\sqrt{30}}$$

$$CE = x$$

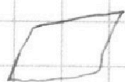
$$y \rightarrow \infty; y \neq 1$$

$$x \rightarrow 0; x \neq \frac{1}{6}$$

$$16y \cdot \frac{3}{13} = \frac{\sqrt{3y} + 3\sqrt{\frac{13}{3}}}{13}$$

$$l_1, l_2, l_3, l_4, l_5$$

$$-l_1, -l_2, -l_3, -l_4, -l_5$$



$$y = \frac{68}{13} + -4x$$

$$\log_2^4(6x) - \frac{2}{\log_3 6x} =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\log_2 6x} - 4$$

$$\log_7^7 y + 6 \log_7 y =$$

$$= \frac{5}{2} \log_7 y - 4$$

$$\log_7^4(6x) = \frac{7}{2} \frac{1}{\log_7 6x} - 4$$

$$\log_7^4 y = -\frac{7}{2} \frac{1}{\log_7 y} - 4$$

$$l^4 + \frac{7}{2} \frac{1}{l} + 4 = 0$$

$$l - \text{корень}$$

$$l^5 + 4l = \frac{7}{2} = 0$$

$$5l^4 + 4$$

$$\overline{AB} \{x_2 - x_1, y_2 - y_1\}$$

$$\frac{1}{3a} = \frac{5}{25c}$$

$$3a = \frac{25c}{5}; d = \frac{25c}{11}$$