МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \dfrac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2}\left(3^{11}\right) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-14;42)$, $Q(6;42)$ и $R(20;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

© МФТИ, 2023

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1

$a \cdot b : 2^{9} \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$

$b \cdot c : 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$

$a \cdot c : 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$

Найти: минимальное значение $a \cdot b \cdot c$.

Минимальное значение будет достигаться когда $a; b; c$ представляют собой произведения чисел $2; 3; 5$ в необходимых степенях. Найдем подходящие нам степени.

для 2:

наименьшее значение произведения будет, если то, на что оно делится будут сами эти числа. при необходимости - будем домножать.

пусть x - степень двойки для числа a. y - для b, z - для c,

$$\begin{cases} x+y=9 \\ y+z=14 \\ x+z=19 \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} x=7 \\ y=2 \\ z=12 \end{matrix}$$

для 3:

пусть x - степень 3 для a; y - для b, z - для c

$$\begin{cases} x+y=10 \\ y+z=13 \\ z+x=18 \end{cases}$$ - в этой системе получаются нецелые числа. Добавим к одной из сумм степеней 1, например, к $(y+z)$.

$$\begin{cases} x+y=10 \\ y+z=14 \\ x+z=18 \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} x=7 \\ y=3 \\ z=11 \end{matrix}$$

для 5

пусть x - степень 5 для a; y - для b; z - для c.

$$\begin{cases} x+y=10 \\ y+z=13 \\ x+z=30 \end{cases}$$ - ситуация аналогична числу 3 $\Rightarrow$ добавим к $(y+z)$ - 1. Однако в таком случае одно из чисел будет < 0, что невозможно в натуральных числах.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Будем добавлять 1 в эту сумму до тех пор, пока все числа не станут натуральные.

⇓

$$\begin{cases} x+y=10 \\ y+z=20 \\ x+z=30 \end{cases} \to \quad \begin{aligned} x&=10 \\ y&=0 \\ z&=20. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a\cdot b\cdot c = 2^{7+2+12}\cdot 3^{7\cdot 3\cdot 11}\cdot 5^{10+10+10} =$$

$$= 2^{21}\cdot 3^{2\cancel{7}1}\cdot 5^{30}$$

Ответ: $2^{21}\cdot 3^{21}\cdot 5^{30}$

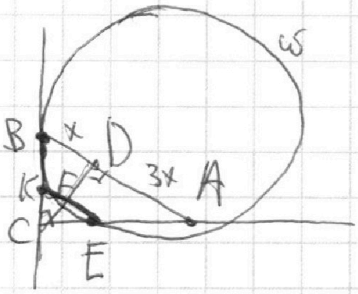
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№2



Дано: $\triangle ABC$ — прямоуг.
ω — касается BC в $\{B\}$.
$\omega \cap CD$-высота в $\{F\}$
$\omega \cap AC = \{E\}$
$FE \parallel AB$; $AD : DB = 3:1$

Найти: $\dfrac{S_{ABC}}{S_{CEF}}$

продлим FE до пересечения с BC. $FE \cap BC = \{K\}$.
из K выходит касательная и секущая к ω $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ верно соотношение $KF \cdot \cancel{B}KE = BK^2$

$\dfrac{KF}{FE} = \dfrac{AD}{DB}$ в силу подобия треугольников ABC и CKE

если $KF = x$, то $KE = 4x \Rightarrow BK = \cancel{x\sqrt{}}\ 2x$

В $\triangle KEC$ — FC — высота $\Rightarrow FC = \sqrt{FE \cdot FK} =$

$= \sqrt{x \cdot 3x} = x\sqrt{3} \Rightarrow$ по т. ~~Пифагора~~ Пифагора $CK = \sqrt{FC^2 + FK^2} =$

$= \sqrt{3x^2 + x^2} = 2x \Rightarrow BC = 4x \Rightarrow$

$\Rightarrow k = \dfrac{CK}{CB} = \dfrac{2x}{4x} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{S_{CEK}}{S_{ABC}} = k^2 = \dfrac{1}{4} \Rightarrow$

в треуг. ABC и ECK

$\Rightarrow S_{CEK} = \dfrac{1}{4} \cdot S_{ABC}$

по т. Пифагора: $EC = \sqrt{KE^2 - CK^2} = \sqrt{16x^2 - 4x^2} =$

$= 2x\sqrt{3} \Rightarrow S_{CEK} = \dfrac{1}{2} \cdot 2x\sqrt{3} \cdot 2x = 2x^2\sqrt{3}$

$S_{FEC} = \dfrac{1}{2} \cdot FE \cdot FC = \dfrac{1}{2} \cdot 3x \cdot x\sqrt{3} = \dfrac{3x^2\sqrt{3}}{2}$

$\dfrac{S_{FEC}}{S_{CKE}} = \dfrac{3x^2\sqrt{3}}{2 \cdot 2x^2\sqrt{3}} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow S_{CEF} = \dfrac{3}{4} \cdot S_{CKE}$

$\dfrac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \dfrac{4 \cdot S_{CEK}}{\frac{3}{4} \cdot S_{CEK}} = \dfrac{16}{3}$

Ответ: $\dfrac{16}{3}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$

$\arcsin(\cos x) = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\frac{x}{5}+\frac{\pi}{10}\right| \le \frac{\pi}{2} \mid \cdot 10 \\ \cos x = \sin\left(\frac{x}{5}+\frac{\pi}{10}\right) \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -5\pi \le 2x+\pi \le 5\pi \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin\left(\frac{x}{5}+\frac{\pi}{10}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3\pi \le x \le 2\pi \\ \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{2}-x = \frac{x}{5}+\frac{\pi}{10}+2\pi k \quad (1) \\ \frac{\pi}{2}-x = \pi - \frac{x}{5} - \frac{\pi}{10} + 2\pi n \quad (2) \end{array}\right. \end{cases}$

(1) $\frac{\pi}{2} - x = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} + 2\pi k \mid \cdot 10$

$5\pi - 10x = 2x + \pi + 20\pi k$

$-12x = -4\pi + 20\pi k \mid : (-12)$

$x = \frac{\pi}{3} - \frac{5}{3}\pi k$ Отбор корней:

$-3\pi \le \frac{\pi}{3} - \frac{5}{3}\pi k \le 2\pi \mid \cdot \frac{3}{\pi}$

$-9 \le 1 - 5k \le 6$

$-10 \le -5k \le 5$

$2 \ge k \ge -1$

$x_1 = \frac{\pi}{3} - \frac{5}{3}\pi(-1) = 2\pi$

$x_2 = \frac{\pi}{3}$

$x_3 = \frac{\pi}{3} - \frac{5}{3}\pi \cdot 1 = -\frac{4}{3}\pi$

$x_4 = \frac{\pi}{3} - \frac{5}{3}\pi \cdot 2 = -3\pi$

$\Downarrow$

$x = \frac{\pi}{3};\ 2\pi;\ -\frac{4}{3}\pi;\ -3\pi$

(2) $\frac{\pi}{2} - x = \pi - \frac{x}{5} - \frac{\pi}{10} + 2\pi n \mid \cdot 10$

$5\pi - 10x = 10\pi - 2x - \pi + 20\pi n$

$-8x = 4\pi + 20\pi n$

$x = -\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{4} n$

Отбор корней:

$-3\pi \le -\frac{\pi}{2} - \frac{5}{4}\pi n \le 2\pi \mid \cdot \frac{4}{\pi}$

$-12 \le -2 - 5n \le 8$

$-10 \le -5n \le 10$

$2 \ge n \ge -2$

$x_1 = -\frac{\pi}{2} - \frac{5}{4}\pi(-2) = 2\pi$

$x_2 = -\frac{\pi}{2} - \frac{5}{4}\pi(-1) = \frac{3}{4}\pi$

$\to x_3 = -\frac{\pi}{2}$

$x_4 = -\frac{\pi}{2} - \frac{5}{4}\pi \cdot 1 = -\frac{7}{4}\pi$

$x_5 = -\frac{\pi}{2} - \frac{5}{4}\pi \cdot 2 = -3\pi$

$x = -3\pi;\ -\frac{7}{4}\pi;\ -\frac{\pi}{2};\ \frac{3}{4}\pi;\ 2\pi$

Ответ: $-3\pi;\ -\frac{7}{4}\pi;\ -\frac{4}{3}\pi;\ -\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{3};\ \frac{3}{4}\pi;\ 2\pi$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4

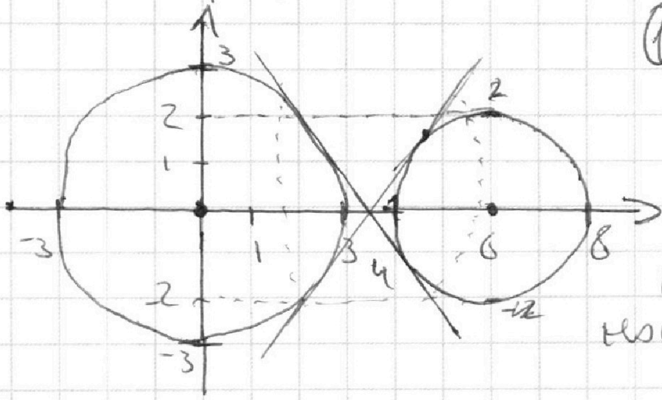
$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 & (1) \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 & (2) \end{cases}$$

Найти: a, при которых $\exists b$: система имеет 4 решения.

(2) $(x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=3^2 \\ x^2+y^2-12x+36-36+32=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=3^2 \\ (x-6)^2+y^2=4 \end{array}\right.$$

Данное соотношение задает 2 окружности в координатной плоскости: одну с центром в $(0;0)$ и радиусом 3, а другую с центром в $(6;0)$ и радиусом 2.



(1) $ax+2y-3b=0$

$2y=-ax+3b$

$y=\frac{-ax}{2}+\frac{3}{2}\cdot b$

Это соотношение задает прямую в коорд. плоскости с ~~углом наклона~~ тангенсом угла наклона $\frac{-a}{2}$ и свободным членом $\frac{3b}{2}$. Чтобы система имела 4 решения, необходимо, чтобы эта прямая пересекала обе окружности в двух точках.

Из геометрии окружностей известно, что на угол наклона не влияет правильность угла наклона ~~прямой~~ прямой, касающейся обеих окружностей внутр. образом. В этом случае будет возможно найти b.

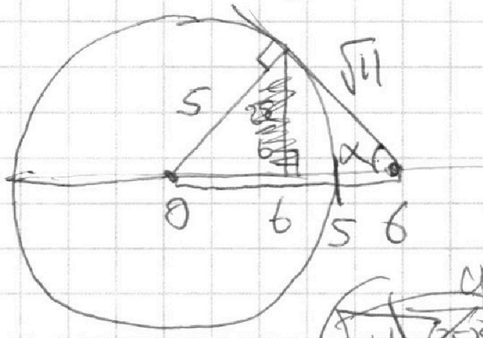
Воспользуемся методом "сдувания – надувания". Уменьшим радиус первой окружности в 0, а другую увеличим на этот же радиус. К углы наклона этих касательных ~~..~~ будут искомыми.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

"Сдуем" вторую окр. Получим точку $(6;0)$
"Надуем" ~~в~~ первую окр. получим окр. с центром в $(0;0)$ и радиуса 5.



~~Из подобия треугольников следует, что высота равна $5 \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{6}$. Найдем расстояние от высоты до $(6;0)$ по т. Пифагора:~~

~~$\sqrt{11} - \left(\frac{25}{36}\right)^2$~~

$tg\,x$ — искомый угол наклона

$tg\,x = \frac{5}{\sqrt{11}}$ в силу симметрии чертежа относительно оси OX, то $-\frac{5}{\sqrt{11}}$ тоже является крайним значением.

Получаем: $-\frac{5}{\sqrt{11}} \leq \frac{-a}{2} < \frac{5}{\sqrt{11}}$

$-\frac{5}{\sqrt{11}} < \frac{a}{2} < \frac{5}{\sqrt{11}} \longrightarrow -\frac{10}{\sqrt{11}} \leq a < \frac{10}{\sqrt{11}}$

Ответ: $\left(-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}}\right)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5

$$\begin{cases} \log_3^4 x + 6\cdot\log_x 3 = \log_{x^2} 3^5 - 8 \\ \log_3^4 y + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^4) - 8 \end{cases}$$

Найти: все возможные значения $x\cdot y$.

Заметим, что $\log_3 x + \log_3 5y = \log_3(5xy) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ если мы найти все возможные значения ~~log~~ суммы логарифмов, то мы сможем решить задачу. Пусть $a = \log_3 x$; $b = \log_3 5y$

$$\begin{cases} a^4 + 6\cdot\frac{1}{a} = \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{a} - 8 \\ b^4 + 2\cdot\frac{1}{b} = \frac{4}{2}\cdot\frac{1}{b} - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 + \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{a} = -8 \\ b^4 - \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{b} = -8 \end{cases}$$

$$a^4 + \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{a} = b^4 - \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{b} \to (a^4 - b^4) + \frac{7}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) = 0$$

$$(a+b)\left((a-b)(a^2+b^2) + \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{ab}\right) = 0$$

Первое возможное значение $a+b=0$

$$(a-b)(a^2+b^2) + \frac{7}{2ab} = 0$$

$$\frac{2ab(a-b)(a^2+b^2)+7}{2ab} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0;\ b\neq 0 \\ 2ab(a-b)(a^2+b^2)+7=0 \end{cases}$$

$$ab(a-b)(a^2+b^2) = -\frac{7}{2}$$

$a+b=0$; $\log_3 5xy = 0 \to 5xy = 1$; $xy = \frac{1}{5}$

Ответ: $\frac{1}{5}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

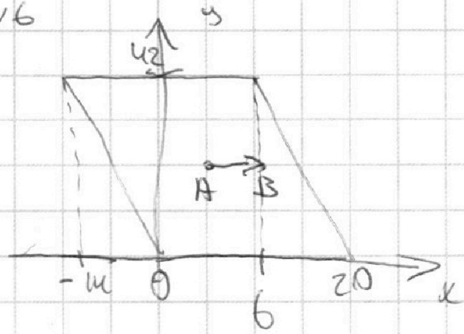
1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№6



Найти: кол-во $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$,
$x_1;y_1;x_2;y_2 \in \mathbb{Z}$: $3x_2-3x_1+y_2-y_1=33$.

$3x_2-3x_1+y_2-y_1=33$

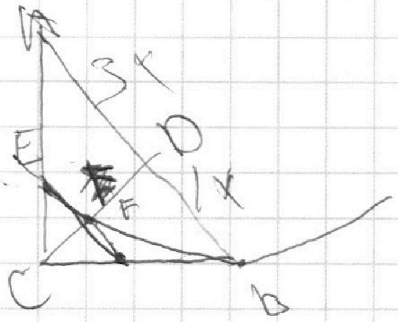
$3(x_2-x_1)+(y_2-y_1)=33$

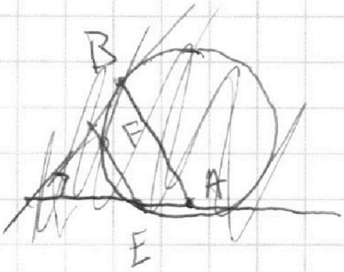
Это соотношение задаёт множество радиус-векторов, у которых утроенная проекция на ось X и проекция на ось Y в сумме дают 33.
Заметим, что т.к. координаты $\in \mathbb{Z}$, то y_2 и y_1 имеют одинаковый остаток ~~от~~ при делении на 3.

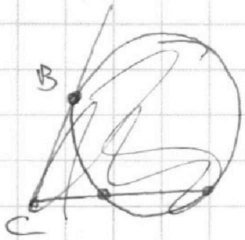
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

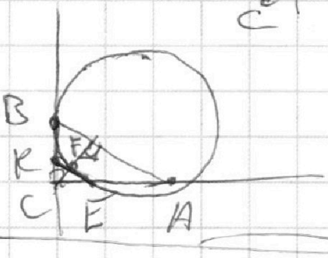
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





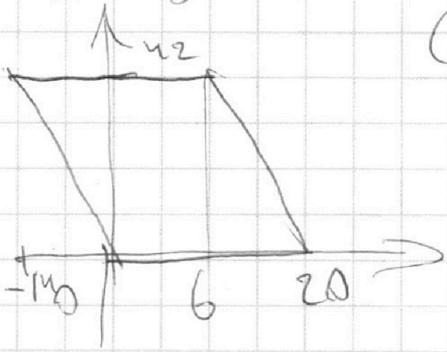




KB – кас
BKE – сек

$BK = KE \cdot FK$

$3(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 33$



$(y_2 - y_1) = 33 - 3(x_2 - x_1)$

$y_2 - y_1 = 3(11 - x_2 + x_1)$

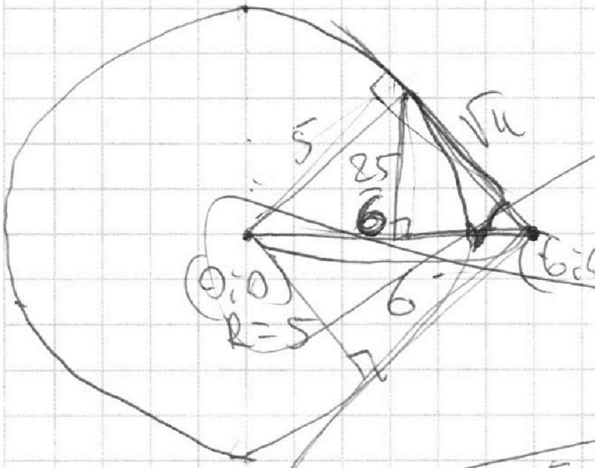
~~x-y~~

$x_2 - x_1 + y_2 - y_1 = const$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\sqrt{36-25^2}=\sqrt{11}$

$\frac{6}{5}$

$11\cdot 36$ 5^4

$+36$

36

356

$\log_3 x+\log_3 5y=$
$=\log_3 5xy$

$\log_3 x=a;\ \log_3 5y=b$

$\log_3^4 x+6\log_x 3-\frac{7}{2}\log_x 3+8=0$

$\log_3^4 x+\frac{6}{\log_3 x}-\frac{2}{15\log_x 3}+8=0$

$\frac{5\log_3^5 x+30-2}{5\log_x 3}=-8$

$a^4+\frac{6}{a}-\frac{5}{2a}-8=0$

$b^4+\frac{2}{b}-\frac{11}{2b}-8=0$

$a+b-?$

$a^4+\frac{7}{2a}-8=0$

$b^4-\frac{7}{2b}-8=0$

$(a^4-b^4)+\frac{7}{2}(a+b)=0$

$(a^2-b^2)(a^2+b^2)$

$(a-b)(a+b)(a^2+b^2)+\frac{7}{2}(a+b)=0$

$(a+b)\left((a-b)(a^2+b^2)+\frac{7}{2}\right)=0$

$(a^4-b^4)+\frac{7}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=0$

$2(x)(-x)(x-(-x))(x^2+x^2)=$
$=-2x^2\cdot 2x\cdot 2x^2$

$(a-b)(a+b)(a^2+b^2)+\frac{7}{2}\cdot\frac{a+b}{ab}=0$

$a(x-a)(a-x+a)(a^2+(x-a)^2)$

$(a+b)\left((a-b)(a^2+b^2)+\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{ab}\right)=0$

$a(x-a)(2a-x)(x^2-2ax)=\frac{7}{2}$

$\left((a-b)((a+b)^2-2ab)+\frac{7}{2ab}\right)=0$

$(a^2b-b^2a)((a+b)^2-2ab)=\frac{7}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$ab: 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$
$bc: 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$
$ac: 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$

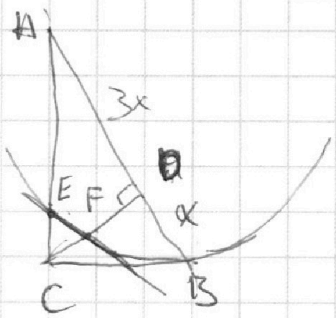
$x+y=9$
$y+z=14 \to$ $x=7$, $y=2$, $z=12$
$x+z=19$

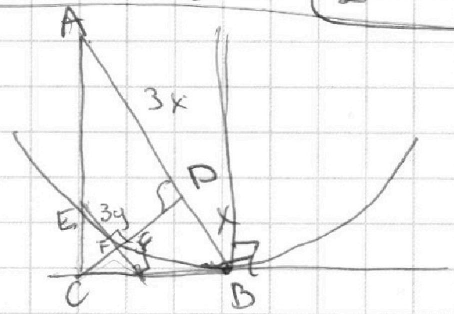
$x+y=10$
$y+z=13 \to 14$
$x+z=18$
$28-2x=14$ $|:2$
$\cancel{4}$ $14-x=7$
$x=7$
$x=7$, $y=3$, $z=11$

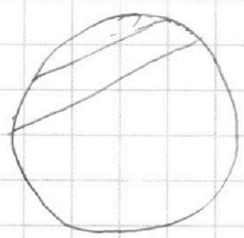
$x+y=10$
$y+z=13 \to$
$x+z=30$
$40-2x=$
$\cancel{x=13}$
20
$y=0$, $x=10$, $z=20$

$7+2+18$
$\cancel{7+7+10}$
$7+3+11$

$a \cdot b \cdot c = 2 \cdot 3 \cdot 5^{30} = 2^{27} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$







$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 3^5 - 8$

$t = \log_3 x$

$\log_3^4 x + 6 \cdot \frac{1}{\log_3 x} = 5 \cdot \frac{1}{2\log_3 x} - 8$

$\alpha = \log_3 5y$

$t^4 + \frac{6}{t} = \frac{5}{2t} - 8 \;|\cdot t$

$\cancel{6\log_x 5 = 2\log_x 3^3}$

$t^5 + 6 = \frac{5}{2} - 8t \;|\cdot 2$

$2t^5 + 12 = 5 - 16t$ $\quad 2t^5 + 16t + 7 = 0$

$t^5 + \alpha^5 = (t+\alpha)(t^4 - t^3\alpha + \dots$

$\alpha^4 + \frac{2}{\alpha} = \frac{11}{2} \cdot \frac{1}{\alpha} - 8$ $\quad x \cdot y =$

$2\alpha^5 + 4 = 11 - 16\alpha$ $\quad t + \alpha = \log_3 x + \log_3 5y = \log_3 5xy$

$2\alpha^5 + 16\alpha - 7 = 0$

$2t^5 + 2\alpha^5 + 16t + 16\alpha = 0 \;|:2$

$(t^5 + \alpha^5) + 8(t+\alpha) = 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

a, b, c

$a\cdot b = k\cdot 2^{9}\cdot 3^{10}\cdot 5^{10}$, $b\cdot c = 2^{14}\cdot 3^{13}\cdot 5^{13}\cdot n$.

$a\cdot c = m\cdot 2^{19}\cdot 3^{18}\cdot 5^{30}$

$\cancel{\frac{b}{c} \; \frac{k}{m}}$

$\frac{c}{b} = \frac{m}{k}\cdot 2^{10}\cdot 3^{8}\cdot 5^{20} \to c = \frac{m}{k}\cdot b\cdot 2^{10}\cdot 3^{8}\cdot 5^{20}$

$b^2\cdot \frac{m}{k}\cdot 2^{10}\cdot 3^{8}\cdot 5^{20} = 2^{14}\cdot 3^{13}\cdot 5^{13}\cdot n$

$b^2 = \frac{k\cdot n}{m}\cdot 2^{4}\cdot 3^{7}\cdot 5^{-7} \to b = 2^2\cdot 3^3\sqrt{\frac{k\cdot n\cdot 3}{5^7 m}} = \frac{2^2\cdot 3^3}{5^3}\sqrt{\frac{3kn}{5m}}$

$\begin{cases} x+y=9 \\ y+z=14 \\ x+z=19 \end{cases}$ $y = 9-x$ $9-x+z=14 \to z-x=5$ $z=19-x \to 19-x-x=5$ $2x=14$; $x=7 \to y=2$, $z=12$

$\begin{cases} x+y=10 \\ y+z=13 \\ x+z=18 \end{cases}$ $y=10-x$ $18+10-2x=13 \to 2x=10$, $x=5 \to y=5$, $z=8$ $z=18-x$

$a = 2^7\cdot 3^5$
$b = 2^2\cdot 3^5$
$c = 2^{12}\cdot 3^8$

$\begin{cases} x+y=10 \\ y+z=13 \\ x+z=30 \end{cases}$ $y=10-x$ $40-2x=13 \to 2x=27$ $z=30-x$

$5\arcsin(\cos x) = x+\frac{\pi}{2}$; $\arcsin(\cos x) = \frac{x}{5}+\frac{\pi}{10}$

$\cos x = \sin\left(\frac{x}{5}+\frac{\pi}{10}\right)$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin\left(\frac{x}{5}+\frac{\pi}{10}\right)$

$\left|\frac{x+\frac{\pi}{2}}{5}\right| \le \frac{\pi}{2}$

$\left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{2}-x = \frac{x}{5}+\frac{\pi}{10}+2\pi k \;(1) \\ \frac{\pi}{2}-x = \pi-\frac{x}{5}-\frac{\pi}{10}+2\pi n \;(2) \end{array}\right.$

(1) $\frac{6}{5}x = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{10}-2\pi k$

$\frac{6}{5}x = \frac{2}{5}\pi - 2\pi k \;|\cdot 5$

$6x = 2\pi - 10\pi k$

$x = \frac{\pi}{3}-\frac{10}{3}\pi k$

(2) $5\pi - 10x = 10\pi - 2x - \pi + 20\pi n$

$-8x = 4\pi + 20\pi n \;|:-8$

$x = -\frac{\pi}{2}-\frac{5}{4}\pi n$

$\left|x+\frac{\pi}{2}\right| \le \frac{5}{2}\pi$

$-\frac{5\pi}{2} \le x+\frac{\pi}{2} \le \frac{5\pi}{2}$

$-3\pi \le x \le 2\pi$