МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5\arcsin(\cos x) = x + \dfrac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}\left(3^{11}\right) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-14;42)$, $Q(6;42)$ и $R(20;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

a, b, c | $ab \,\vdots\, 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$
$bc \,\vdots\, 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$ Все $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{N}$
$ac \,\vdots\, 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$

$\min(a, b, c)$

Сначала рассмотрим только степени 2:

$$\left.\begin{matrix} ac = 2^{19} \cdot x \\ ab \cdot bc = 2^9 \cdot y \cdot 2^{14} \cdot z = 2^{23} \cdot z \cdot y \end{matrix}\right\} \frac{ab^2c}{ac} = \frac{2^{23} \cdot z \cdot y}{2^{19} \cdot x} \quad b = 2^{4/2} \cdot \frac{z \cdot y}{x} = 2^2 \frac{z \cdot y}{x}$$

Тогда вхождение числа 2 в b имеет степень 2, тогда в $a = 9 - 2 = 7$, а в $c = 14 - 2 = 12$

Получается $a = 2^7 \cdot a_1$, $b = 2^2 \cdot b_1$, $c = 2^{12} \cdot c_1 \Rightarrow abc = 2^{21} a_1 b_1 c_1$

Теперь посмотрим только на степени 3:

$$\left.\begin{matrix} bc \cdot ac = 3^{13} \cdot x_1 \cdot 3^{18} x_2 \\ ab = 3^{10} \cdot x_3 \end{matrix}\right\} \frac{abc^2}{ab} = \frac{3^{13} \cdot 3^{18} \cdot x_1 \cdot x_2}{3^{10} x_3} = \frac{3^{21} \cdot x_1 \cdot x_2}{x_3} = c^2$$

Значит или в x_3 содержится 3 в какой-то степени или степень 3 в c не менее 11.

1) Если $c = 3^{11} \cdot c_1$, где $c_2 \not\vdots\, 3$
$\Rightarrow a = 3^7 a_2 \Rightarrow b = 3^3 \cdot b_2 \Rightarrow abc = 3^{21}$

2) Если в x_3 есть 3^k, то $ab \,\vdots\, 3^{10} \cdot 3^k$, где $k \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow c^2 = 3^{21-k} z_3$, $ab = 3^{10+k} \cdot x_4$, $bc = 3^{13} \cdot z_3$, $ac = 3^{18} \cdot z_4$
$\Rightarrow abc = 3^{21} \cdot z_5 \Rightarrow$ Минимальная степень $3 - 21$.

Теперь посмотрим на степени 5:

Заметим, что $ac \,\vdots\, 5^{30}$ тогда $abc \,\vdots\, 5^{30}$

Пусть например $a \,\vdots\, 5^{11}$, $c \,\vdots\, 5^{19}$, тогда $ab \,\vdots\, 5^{10}$, $bc \,\vdots\, 5^{13}$, а $b \not\vdots\, 5$

Тогда это пример на вхождение числа 5 со степенью 30, а меньше быть не может $\Rightarrow 30$.

Соберем:

$abc \,\vdots\, 2^{21}$, $abc \,\vdots\, 3^{21}$, $abc \,\vdots\, 5^{30} \Rightarrow abc \,\vdots\, 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$, т.к. числа $2, 3, 5$ — взаимно простые $\Rightarrow \min(abc) = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

Ответ: $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

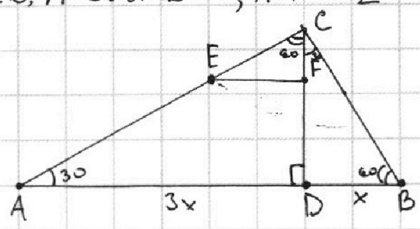
1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$, $CD \perp AB$, окружность кас BC в т.B, п Выс. $CD = F$, $\cap AC = E$
$AB \parallel EF$, $AD : DB = \frac{3}{1}$

Найти: S_{ABC} / S_{CEF} - ?



Решение:

1) $AD = 3x$, $DB = x$
2) Тогда $CD = \sqrt{AD \cdot DB} = \sqrt{3x \cdot x} = x\sqrt{3}$
3) $\triangle ACD$: $AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{9x^2 + 3x^2} = 2x\sqrt{3}$
4) $\triangle DCB$: $CB = \sqrt{CD^2 + DB^2} = \sqrt{3x^2 + x^2} = 2x$
5) $\triangle ABC$: $AB = 4x$, $BC = 2x$ $\Rightarrow \angle A = 30^\circ \Rightarrow \angle B = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

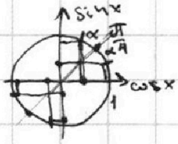
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$

$\arcsin(\cos x) = \frac{x + \frac{\pi}{2}}{5}$

$\cos x = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right)$



Из окружности видно, что если x и $\frac{x+\frac{\pi}{2}}{5}$ будут симметричны относительно $\frac{\pi}{4}+\pi k$, то взяв cos и sin от этих величин, они будут равны, что как раз нам и нужно.

$$\begin{cases} \frac{\pi}{4} + \pi k + \alpha = x, \ k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{4} + \pi k - \alpha = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$+: \ \frac{\pi}{2} + 2\pi k = \frac{6x}{5} + \frac{\pi}{10}, \ k \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{5}{6}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10} + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi k}{3}, \ k \in \mathbb{Z}$

[redacted]

Подставим в уравнение:

$\arcsin(\cos x) = \frac{\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi k}{3} + \frac{\pi}{2}}{5} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$

Область значений функции $\arcsin \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

Поэтому появляется неравенство:

$-\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3} \le \frac{\pi}{2} \quad \cdot \frac{2}{\pi}$

$-1 \le \frac{1}{3} + \frac{2}{3}k \le 1 \quad \cdot 3$

$-3 \le 1 + 2k \le 3$

$-4 \le 2k \le 2$

$-2 \le k \le 1 \Rightarrow k = -2; -1, 0, 1$ т.к. $k \in \mathbb{Z}$.

Тогда $x_1 = \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{3}\cdot(-2) = -3\pi$

$x_2 = \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{3}\cdot(-1) = -\frac{4\pi}{3}$

$x_3 = \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{3}\cdot(0) = \frac{\pi}{3}$

$x_4 = \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{3}\cdot(1) = 2\pi$

Ответ: $x_1 = -3\pi, x_2 = -\frac{4\pi}{3}; x_3 = \frac{\pi}{3}; x_4 = 2\pi$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

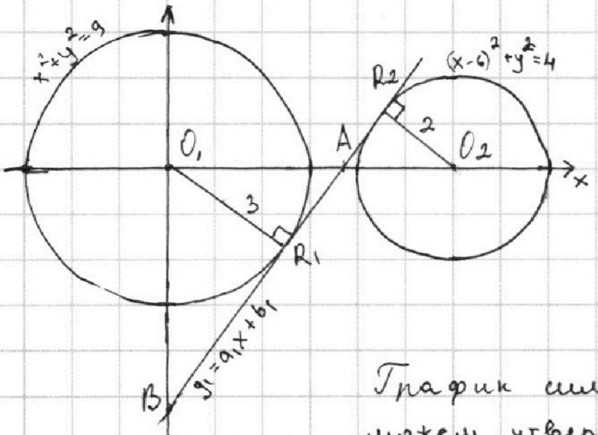
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax+2y-3b=0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=9 \\ (x^2-12x+36)+y^2=4 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ax+2y-3b=0 & (1) \\ \left[\begin{array}{ll} x^2+y^2=9 & (2) \\ (x-6)^2+y^2=4 & (3) \end{array}\right. \end{cases}$$

Заметим, что 1 уравнение в графическом представлении является прямой, а 2 и 3 являются уравнениями окружностей.



Проведем общую касательную к 2 окружностям: $y_1=a_1x+b_1$, $a_1>0$, $b_1<0$

Заметим, если у множества прямых коэффициент перед x будет $\geq a_1$, то мы не сможем подобрать такой свободный член, чтобы система имела ровно 4 решение.

График симметричен оси ox, поэтому мы также можем утверждать, что коэффициент перед x не может быть $\leq -a_1$, т.к. мы снова не сможем подобрать свободный член для достижения условия задачи.

Преобразуем (1) уравнение:

$y=-\frac{a}{2}x+\frac{3}{2}b$

Тогда получается двойное неравенство:

$-a_1 < -\frac{a}{2} < a_1$

$-2a_1 < -a < 2a_1$

$-2a_1 < a < 2a_1$

Осталось найти a_1.

Рассмотрим ΔO_1R_1A и ΔO_2R_2A, они подобны по 2 углам

$\frac{O_1A}{O_2A}=\frac{O_1R_1}{O_2R_2} \Rightarrow \frac{O_1A}{\underbrace{O_1O_2}_{6}}=\frac{O_1R_1}{O_1R_1+O_2R_2}=\frac{3}{5} \Rightarrow O_1A=\frac{3}{5}\cdot 6$

$y_1=a_1x_1+b_1$, $y_1=0$, $x=\frac{3\cdot 6}{5} \Rightarrow \frac{18}{5}a_1=-b_1$

ΔO_1R_1A: $R_1A=\sqrt{O_1A^2-O_1R_1^2}=\sqrt{\left(\frac{18}{5}\right)^2-9}=\frac{3}{5}\sqrt{11}$

$O_1R_1^2=R_1B\cdot R_1A \Rightarrow R_1B=\frac{9\cdot 5}{3\sqrt{11}}=\frac{15}{\sqrt{11}}$

ΔBO_1R_1: $O_1B=\sqrt{O_1R_1^2+BR_1^2}=\sqrt{9+\frac{225}{11}}=18/\sqrt{11}$

$y=a_1x+b_1$, $x=0$, $y=-18/\sqrt{11} \Rightarrow b_1=-18/\sqrt{11}$

$\frac{18}{5}a_1=-b_1=18/\sqrt{11} \Rightarrow a_1=\frac{5}{18}\cdot\frac{18}{\sqrt{11}}=\frac{5}{\sqrt{11}} \Rightarrow -2\cdot\frac{5}{\sqrt{11}}<a<2\cdot\frac{5}{\sqrt{11}}$

Ответ: $a \in \left(-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = 16\log_{x^2} 243 - 8$ $\quad\begin{cases} x>0, x\neq 1 \\ 5y>0, 5y\neq 1\end{cases}$

$\log_3^4(5y) + 2\log_{5y}3 = \log_{(5y)^2}(3^{11}) - 8$

$243 = 3^5$

$(\log_3 x)^4 + 6\left(\frac{\log_3 3}{\log_3 x}\right) = \log_{x^2}(3^5) - 8$

$\log_{x^2}(3^5) = \frac{5}{2}(\log_{|x|}3)$, но $x>0 \Rightarrow = \frac{5}{2}\log_x 3 = \frac{5}{2}\left(\frac{\log_3 3}{\log_3 x}\right)$

$(\log_3 x)^4 + 6\left(\frac{1}{\log_3 x}\right) - \frac{5}{2}\left(\frac{1}{\log_3 x}\right) + 8 = 0$

$\log_3 x = t \Rightarrow 3^t = x$

$t^4 + \frac{6}{t} - \frac{5}{2t} + 8 = 0 \quad \cdot 2t$

$2t^5 + 16t + 7 = 0 = f(t)$

$f'(t) = 10t^4 + 16$ – всегда $\geq 16 \Rightarrow$ возрастает $\Rightarrow$ пересечение с $y=0$ не более 1 $\Rightarrow$ не более 1 корня

Заметим $f(-1)<0$, $f(0)>0 \Rightarrow$ корень между -1 и 0

$3^t = x \Rightarrow x$ между $\frac{1}{3}$ и 1

$\left(\log_3(5y)\right)^4 + 2\log_{5y}3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8$

$\left(\log_3(5y)\right)^4 + \frac{2}{\log_3(5y)} - \frac{11}{2\log_3(5y)} + 8 = 0$

$\log_3 5y = z$

$z^4 + \frac{2}{z} - \frac{11}{2z} + 8 = 0 \quad \cdot 2z$

$2z^5 + 16z - 7 = 0 = f_1(z)$

$f_1'(z) = 10z^4 + 16$ всегда $\geq 16 \Rightarrow$ возрастает $\Rightarrow$ пересечение с $y=0$ не более 1 $\Rightarrow$ не более 1 корня

Заметим $f_1(0)<0$, $f_1(1)>0 \Rightarrow$ корень между 0 и 1

$3^z = 5y \Rightarrow 5y$ между 1 и 3

Тогда $x\cdot 5y$ между $\frac{1}{3}$ и $3 \Rightarrow xy$ между $\frac{1}{15}$ и $\frac{3}{5}$

Теперь посмотрим на 2 уравнения:

$2t^5 + 16t + 7 = 0$ и $2z^5 + 16z - 7 = 0$

Пусть a – решение первого уравнения, тогда:

$2\cdot a^5 + 16\cdot a + 7 = 0$. Подставим $-a$ во второе:

$-2\cdot a^5 - 16a - 7 = -(2\cdot a^5 + 16a + 7) = -\cdot(0) = 0$ т.е. $-a$ – решение второго уравнения. Тогда

$x = 3^a$, $5y = 3^{-a} \Rightarrow x\cdot 5y = 3^a\cdot 3^{-a} = \frac{3^a}{3^a} = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{5}$

Причем условия на x и y выполняются.

Ответ: единственное возможное произведение $= \frac{1}{5} = xy$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

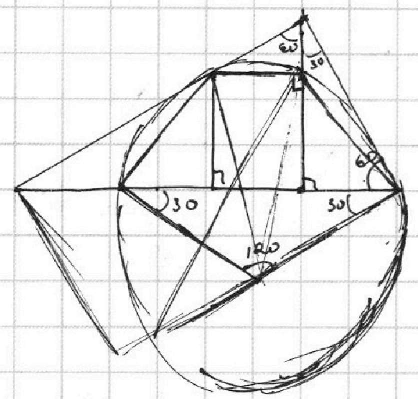
$9\cdot 9\cdot 3 = 81\cdot 3 = 243 = 3^5$

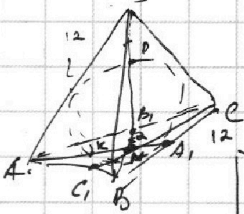
$2^4 + \frac{6}{2} =$

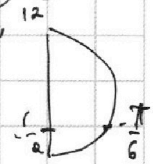
$3:\quad 1 + 6 = \cancel{8} - 8$

$S_3:\quad \frac{1}{16} + 12 = 5 - 8$

$16 + 1 = \frac{11}{2} - 8$







$\sin \in [-1; 1]$

arcsin

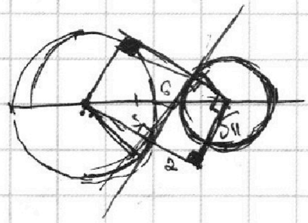
$$\frac{\frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi k + \frac{\pi}{2}}{5}$$

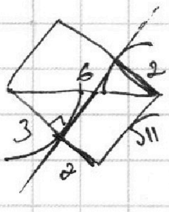
$\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$

arcsin(cos)

$$\frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 2$$

$-\frac{\pi}{2} : \frac{\pi}{2}$





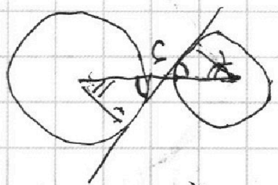
$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

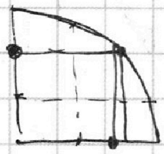
$\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$

$5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$

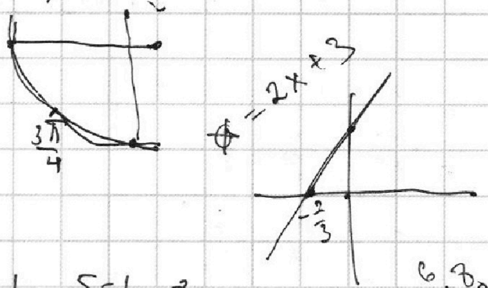
$\cos x = \sin\left(\frac{x + \frac{\pi}{2}}{5}\right)$

$\frac{3}{5}\cdot 6 = 3\frac{3}{5}$





$y = 2x + 3$



$$\begin{cases} \frac{\pi}{4} + 2\pi k + \alpha = x \\ \frac{\pi}{4} + 2\pi k - \alpha = \frac{x + \frac{\pi}{2}}{5} \end{cases}$$

$+\quad \frac{\pi}{2} + 2\pi k = x + \frac{x}{5} + \frac{\pi}{2\cdot 5}$

$2\pi k\ \frac{2}{5}\pi = \frac{6x}{5} \Rightarrow x = \frac{1}{3}\pi$

$\cos 60 = \frac{1}{2}$

$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

$\frac{1}{2} - \frac{1}{10} = \frac{5-1}{10} = \frac{2}{5}$

$y = a_1 x + b_1$

$-\frac{a_1}{b_1} = \frac{18}{5}$

$\cos x - \sin x$

$\sin x \cos - \cos x \sin$

$-7 < -x < 7$

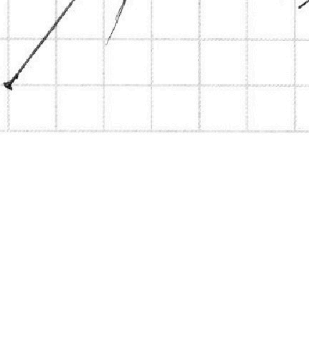
$-7 < x < 7$

$18^2 = 324$

$\left(\frac{18}{5}\right)^2 - 9$

$$\frac{9\cdot 2\cdot 9\cdot 2 - 9\cdot 25}{25}$$

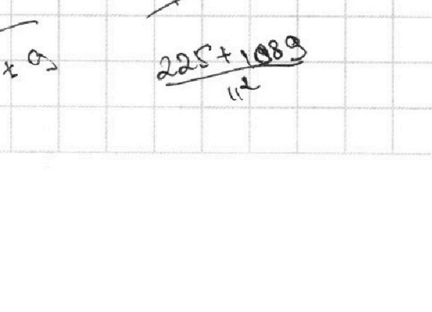
$$\frac{9(36-25)}{25}$$



$y = \frac{3}{5}\sqrt{11}\cdot x$

$\frac{15}{\sqrt{11}}$

$\sqrt{\frac{225}{121} + 9}$



$\frac{225 + 1089}{121}$

$\frac{99}{1089}$

121

$\frac{9}{1089}$

$\frac{225}{1314}$

$\frac{12}{667}$

$-\frac{9}{3} = -3$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

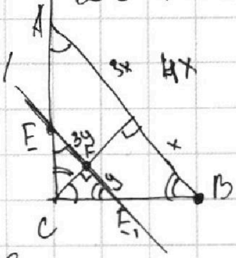
МФТИ

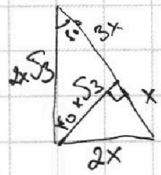
Черновик.

$3^{1\ldots 0} \cdot 3^{0\ldots 1} \quad \frac{3^{0\ldots 1}}{3^{1\ldots 0}}$

$a+b=9+x_1$ 10.
$b+c=14+x_2$ 13.
$a+c=19+x_3$ 18.
$\min(a+b+c)$ $a=8$
$a-b=5+x_3-x_2$ $b=2$
$a+b=9+x_1$ $c=10+1$
$a=7+\frac{x_1+x_3-x_2}{2}$

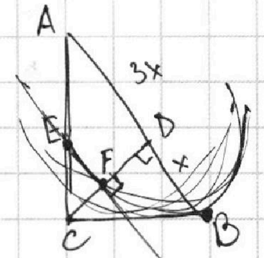
$2t^5+16t+7 \quad -2z^5-16z+7=-(0)=0$
$2z^5+16z-7=0$



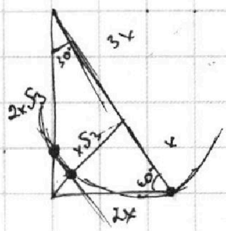


$\sqrt{x^2(1+3)}=2x$
$\sqrt{9x^2+3x^2}=2x\sqrt{3}$

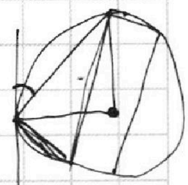
$\frac{S_{ABC}}{S_{CEE_1}}$

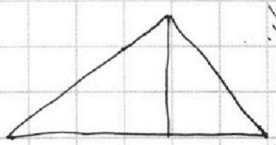


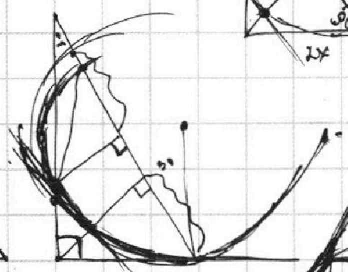
$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}}$



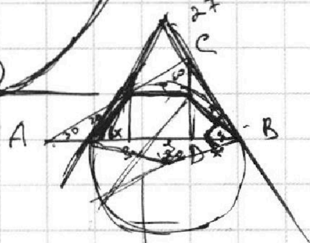
$4x^2\cdot 3+4x^2=4x^2\cdot 4 \Rightarrow 4x$ верно.

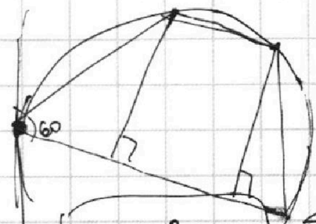


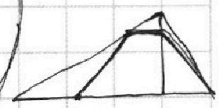




$9+x=36$





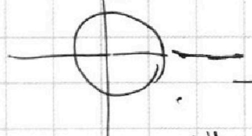


$5\arcsin(\cos x)=x+\frac{\pi}{2}$

$\left(\frac{2x+y}{y}\right)^2=\frac{S_1}{S_2}$

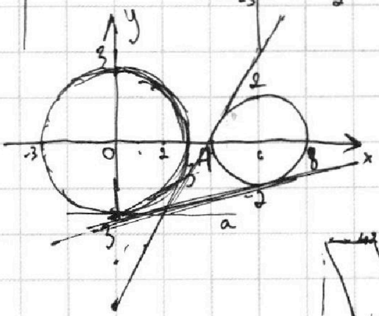
$$\begin{cases} y=1.5b-\frac{a}{2}x \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=9 \\ (x-6)^2+y^2=4 \end{array}\right. \end{cases}$$

$2\cdot(6)^2 \quad x^2-12x+36$



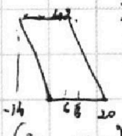
$\frac{Ax+By+c}{\sqrt{A^2+B^2}}$ – расст.

$$\begin{cases} x_1^2+y_1^2\le 9 \\ (x_2-6)^2+y_2\le 4 \\ y_1=1.5b-\frac{a}{2}x_1 \\ y_2=1.5b-\frac{a}{2}x_2 \end{cases}$$



1) $x=0$: $y=1.5b$

$x\in[-14;20]$
$y\in[0;42]$



$(3x_2+y_2)-(3x_1+y_1)=33$

$(\log_3 x)^4+6\log_x 3=\log_{x^2}\cdot 3^5-8$
$(\log_3 5y)^4+2\log_{5y}3=\log_{(5y)^2}\cdot 3^{11}-8$

$\log_3 x=t \qquad t^4+\frac{6}{t}-\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{t}+8=0 \qquad t^4+\frac{2}{t}-\frac{11}{2t}+8=0$

$t^4+\frac{7}{2t}+8=0 \qquad t^4-\frac{7}{2t}+8=0$

$2t^5+16t+7=0 \qquad 2t^5-7+16t=0$

всегда возр не более 1 корня   не более 1 корня

$t^4+16\ge 16 \Rightarrow$ ~~корней нет~~

$-1:-11$
$0:7$

$\log_3 x=t_1 \quad x=3^{t_1} \qquad \log_3 5y=t_2 \quad 5y=3^{t_2} \qquad x\cdot 5y=3^{t_1+t_2} \Rightarrow xy=\frac{3^{t_1+t_2}}{5}$