



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a \geq 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{12}$$

$$b \geq 2^{11} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$$

$$c \geq 2^{13} \cdot 3^{18} \cdot 5^{10}$$

Произведение натуральных чисел является произведением их простых делителей

$$abc = a^2 b^2 c^2 \geq 2^{42} \cdot 3^{47} \cdot 5^{53}; \quad a^2 b^2 c^2 : 2^{42} \cdot 3^{47} \cdot 5^{53}$$

т.к. $a^2 b^2 c^2$ — полный квадрат, то степени его простых делителей должны быть четными.

$$a^2 b^2 c^2 : 2^{42} \cdot 3^{47} \cdot 5^{54}$$

$$abc : 2^{21} \cdot 3^{23} \cdot 5^{27}$$

т.к. $abc : 2^{21} \cdot 3^{23} \cdot 5^{27}$, ~~то $a^2 b^2 c^2 : 2^{42} \cdot 3^{47} \cdot 5^{54}$~~ $abc : 2^{21} \cdot 3^{23} \cdot 5^{27}$

$$\text{то } abc : 2^{21} \cdot 3^{23} \cdot 5^{27} \Rightarrow abc \geq 2^{21} \cdot 3^{23} \cdot 5^{27}$$

~~это наименьшее значение~~ минимальное достигается при

$$a = 2^7 \cdot 3^7 \cdot 5^{13}; \quad b = 2^2 \cdot 3^3; \quad c = 2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{17}$$

$$\text{Ответ: } 2^{21} \cdot 3^{23} \cdot 5^{27}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AD = 3x$$

$$BD = x$$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$$

$$\frac{3x}{AC} = \frac{AC}{4x}$$

$$AC = 2\sqrt{3}x$$

$$BC = \sqrt{(4x)^2 - (2\sqrt{3}x)^2} = 2x$$

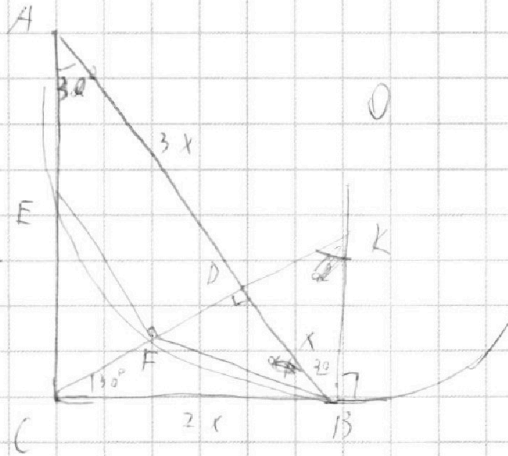
$$\sin \alpha_2 = \sin \angle BAC = \frac{2x}{4x} = \frac{1}{2}$$

$$\alpha_2 = 30^\circ$$

~~$\angle DOA = \alpha$~~

~~$\angle DBF = \alpha$ и $\angle FBG = 60^\circ - \alpha$~~

$$\frac{BK}{BC} = \frac{BC}{AC} ; \quad \frac{BK}{2x} = \frac{2x}{2\sqrt{3}x} ; \quad BK = \frac{2\sqrt{3}}{3}x$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5 \arccos(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\arccos(\cos x) = \frac{x + \frac{\pi}{2}}{5}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arccos(\cos x) \leq \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{5\pi}{2} \leq 5 \arccos(\cos x) \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$-\frac{5\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$-3\pi \leq x \leq 2\pi$$

$$\sin(\arccos(\cos x)) = \sin\left(\frac{x + \frac{\pi}{2}}{5}\right)$$

$$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x + \frac{\pi}{2}}{5}\right)$$

$$\cos x = \cos\left(\frac{x - 3\pi}{5}\right)$$

~~м.к. $-\pi \leq x \leq 2\pi$~~

$$\begin{cases} x = \frac{x - 3\pi}{5} + \pi n; n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{3\pi - x}{5} + \pi n; n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{4} n; n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{6} n; n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

м.к. $-3\pi \leq x \leq 2\pi$, но из полученных совокупности уравнений удовлетворяют условию только $-2 \leq n \leq 1$ для первого решения и $-4 \leq n \leq 1$ для второго, получаем

$$x = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{4} k; k \in \mathbb{Z}; -2 \leq k \leq 1; x = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{6} m; m \in \mathbb{Z}; -4 \leq m \leq 1$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{4} k; k \in \mathbb{Z}; -2 \leq k \leq 1; x = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{6} m; m \in \mathbb{Z}; -4 \leq m \leq 1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 \\ x^2 + y^2 = 9 \\ x^2 - 12x + 32 + y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-6)^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 9 \\ y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b \end{cases}$$

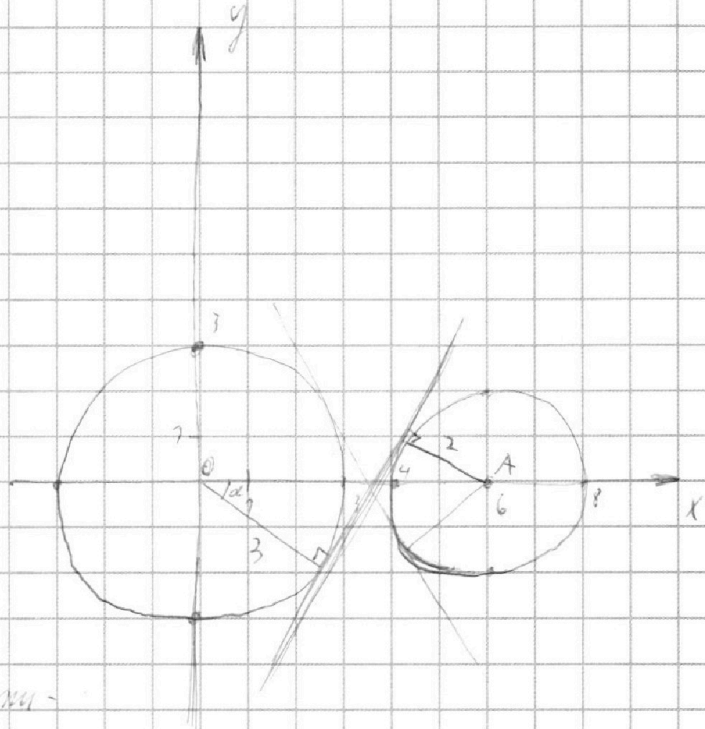


График первой совокупности — две окружности с центрами в точках $(0;0)$ и $(6;0)$

График второго уравнения — прямая с коэф. углы наклона $-\frac{a}{2}$ и свободным членом $\frac{3}{2}b$

~~представить совокупность уравнений~~ ~~прямой~~ ~~внутренней~~

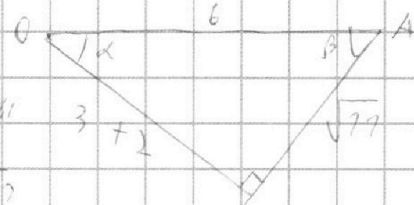
~~общая часть~~ чтобы прямая пересекала каждую из окружностей по 2 разам.

пределами сужения наклона прямой — внутренняя

касательная к окружностям.

коэффициент углы наклона прямой тогда

равны $\pm \tan \alpha = \pm \frac{5}{\sqrt{11}}$; $-\frac{5}{\sqrt{11}} < \frac{a}{2} < \frac{5}{\sqrt{11}}$



Ответ: $a \in \left(-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}}\right)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} \log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \\ \log_3^4 (xy) + 2 \log_{xy} 3 = \log_{15y} 3^{11} - 8 \end{cases}$$

$$\log_x 3 = a ; \log_{xy} 3 = b$$

$$\begin{cases} \frac{1}{a^4} + 6a = \frac{5}{2}a - 8 \\ \frac{1}{b^4} + 2b = \frac{11}{2}b - 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{a^4} = -7a - 16 \\ \frac{2}{b^4} = 7b - 16 \end{cases}$$

для обоих уравнений верно следующее:

в левой части равенств находится дробь с числителем 2 и знаменателем 4 степени

и правая часть симметрична относительно своих корней.

в правой части равенств находится выражение, переписанное при своих корнях в м. -16

следовательно корни из уравнений имеют равно 7 решений.

~~уравнение~~ $-7a - 16$
симметрична $7b - 16$

значит, если a_0 - решение первого уравнения, b_0 - второго, то $a_0 = -b_0$

$$a_0 = -b_0 - \text{по сим.}$$

$$a = -b$$

$$\log_x 3 = -\log_{xy} 3$$

$$\log_3 x = \log_3 (xy)^{-1}$$

$$x = \frac{1}{xy}$$

$$xy = \frac{1}{x}$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{5}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



всего мячей, крестиком 3: $\frac{42}{3} + 7 = 15$

часть 2

~~всего мячей А: $15 \cdot 10 + (42 - 15 \cdot 3) \cdot 8 = 40$~~

~~мячей А с крестиком 3: крестиком 3:~~

для 15 мячей \exists 10 м. А для каждой из команд
 \exists 15 мячей В

для оставшихся 28 мячей \exists 8 м. А, для каждой из команд.

14 мячей В

всего мячей: $15 \cdot 10 \cdot 15 + 28 \cdot 5 \cdot 14 = 5778$

Ответ: 5778

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

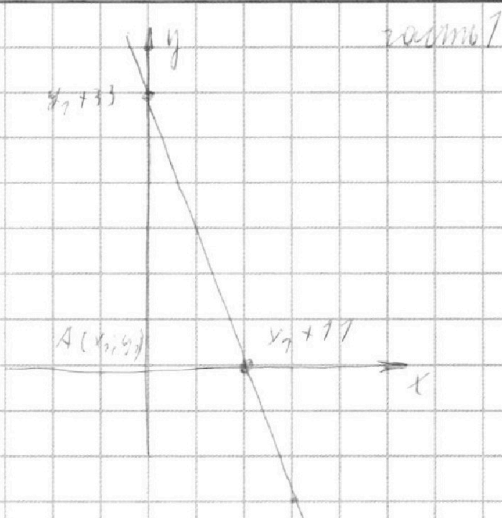
- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



ГМТ точек $B(x_2; y_2)$ есть
прямая, проходящая
через точки $(x_1; y_1)$ и
 $(x_1 + 11; y_1)$ и $(x_1; y_1 + 33)$



это верно в силу того, что

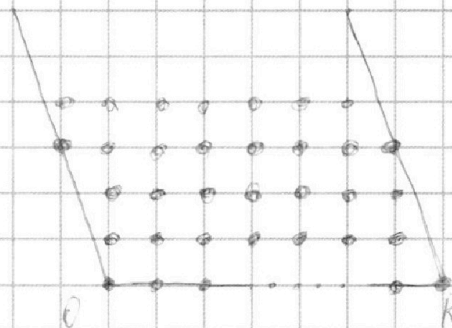
$$y_2 - y_1 = -3(x_2 - x_1) + 33$$

получается, для всех возможных точек A все
возможные точки B лежат на заданной прямой.

т.к. наклон ~~ГМТ~~ прямой ГМТ(B) ~~равен~~

наклоны сторон ступенчатого

контуров и равен $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -3$,



но для каждого горизонтального
ряда, состоящего из целого числа

параллельных отрезков ~~равно~~

равно $20 - 11 + 1 = 10$ точек для рядов с ординатой

критической 3 и $20 - 11 = 9$ точек для остальных

(это связано с тем, что в ориентации критической 3 упрощаются

параллельные точки образуют целую точку). Итого

для точек A с ординатой критической 3 $7 \cdot \frac{11}{3} + 1 = 25$ или B

с ординатой критической 3 $7 \cdot \frac{11}{3} + 1 = 25$

точек B, для остальных: 74

Всего точек A: \downarrow

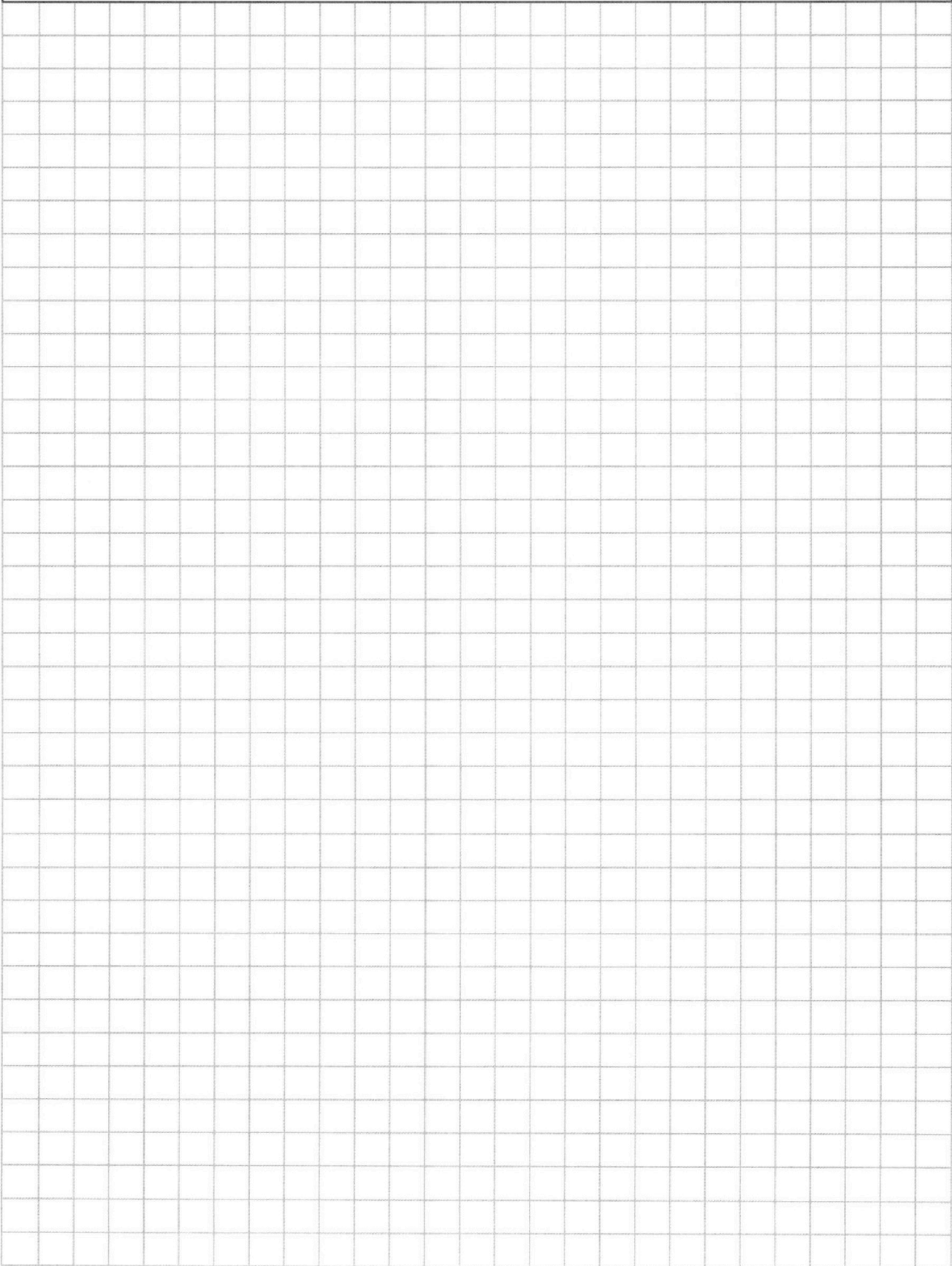


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

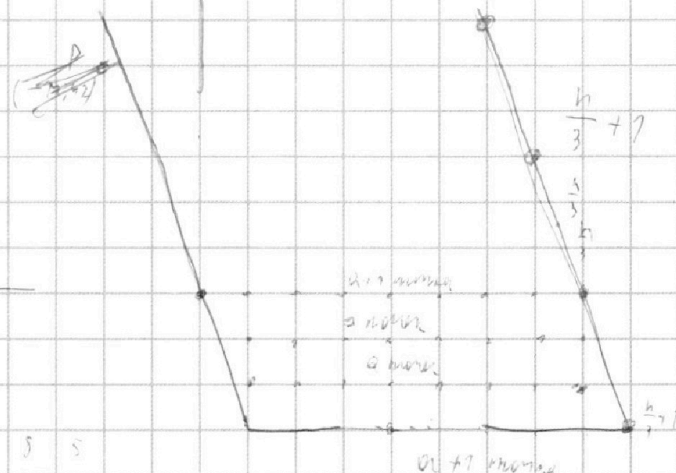
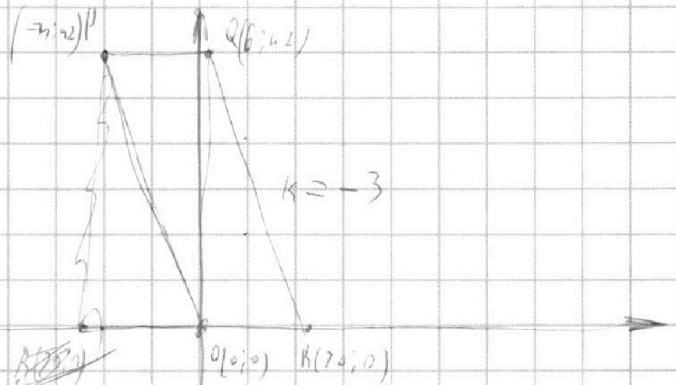
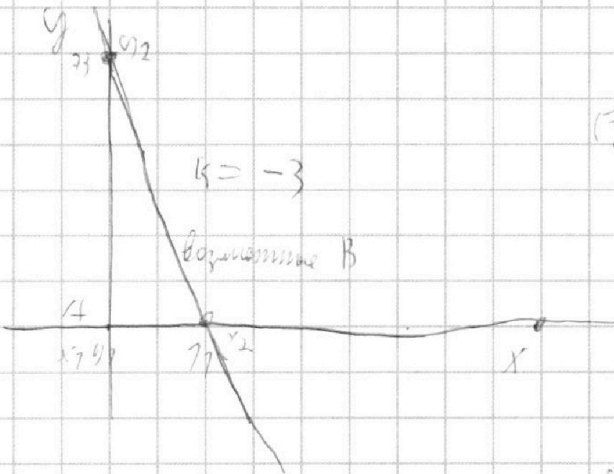


N 6

$$3x_1 - 7x_2 = 33$$

$$3(x_1 - x_2) + (6x_1 - 9x_2) = 33$$

$$3x + 6y = 33$$



Значит количество точек
7 и 11 точек с пересечением
параллельности, где $k = 1/3$
из (каждой) стороны 7 и 11 точек

$$a = 20, \quad a + 1 = 21$$

$$b = 74, \quad b + 1 = 75$$

Всего точек 43
28 точек + 17 точек + 74 точек
+
28 точек + 72 точек + 75 точек
11

$$4372$$

$$\begin{array}{r} 7 \\ \times 225 \\ \hline 1575 \\ 874 \\ \hline 9725 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 74 \\ \times 754 \\ \hline 3676 \\ 5198 \\ \hline 55876 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7232 \\ \times 7432 \\ \hline 288064 \\ 503040 \\ \hline 535362 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4372 \\ \times 2670 \\ \hline 262080 \\ 138880 \\ \hline 68820 \end{array}$$

6882

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~2-304~~

$$\begin{cases} \frac{2}{a^4} + 2a + 16 = 0 \\ \frac{2}{b^4} - 2b - 16 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{2}{a^4} - \frac{2}{b^4} + 2a + 2b = 0$$

$$2(a+b) = \frac{2}{b^4} - \frac{2}{a^4}$$

$$2(a+b) = \frac{2a^4 - 2b^4}{a^4 b^4}$$

~~2-304~~

$$a = -b$$

$$\frac{1}{a} = \log_3 x$$

$$\frac{1}{b} = \log_5 y$$

$$a = \log_x 3$$

$$b = \log_{5y} 3$$

$$\log_x 3 = -\log_5 y 3$$

$$\log_3 x = -\log_5 5y$$

$$x = -\frac{1}{5y}$$

$$x y = -\frac{1}{5}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a, b = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$b, c = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$a, c = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$a = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z \cdot k_1$$

$$b = 2^{9-x} \cdot 3^{10-y} \cdot 5^{10-z} \cdot k_2$$

$$c = 2^{x+5} \cdot 3^{y+3} \cdot 5^{z+3} \cdot k_3$$

$$a = 2^{x+14} \cdot 3^{y+5} \cdot 5^{z+3}$$

$$a = 2^{14-x} \cdot 3^{15-y} \cdot 5^{27-z}$$

$$\begin{cases} 14-x = x & x = 7 \\ 15-y = y & y = 7 \\ 27-z = z & z = 13 \end{cases}$$

$$a = 2^7 \cdot 3^7 \cdot 5^{13}$$

$$b = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$\begin{aligned} x+y &= 9 \\ y+z &= 10 \\ z+x &= 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= 9-x \\ 9-x+z &= 10 \\ x+z &= 13 \\ 8+x &= 13 \\ x &= 5 \\ z &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} c = 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{17} \\ a = 2^7 \cdot 3^7 \cdot 5^{13} \\ b = 2 \cdot 3 \cdot 5 \end{cases}$$

$a, b, c = \min$

$$\begin{aligned} &2 \cdot 13 \\ &+ 78 \\ &79 \\ &42 \end{aligned}$$

$$a, b, c = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$a, b, c = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$a, b, c = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$a, b = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$b, c = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$a, c = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$a = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$b = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$c = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$a = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$14-x = x \quad x = 7$$

$$14-y = y \quad y = 7$$

$$26-z = z \quad z = 13$$

$$a, b, c = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$a, b, c = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$a, b, c = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

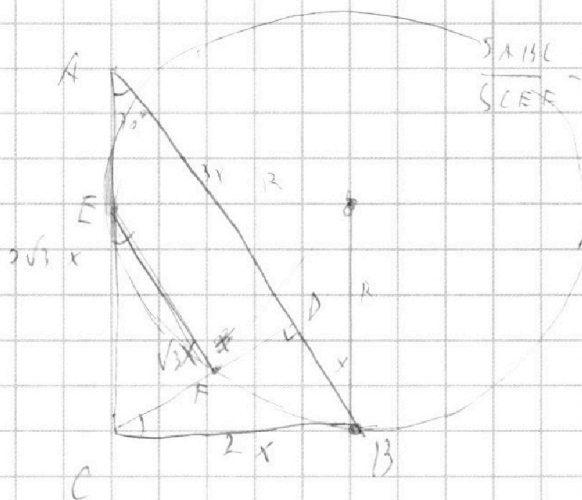
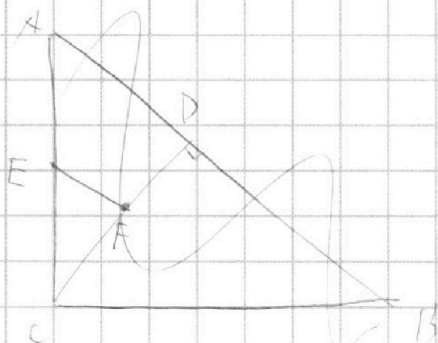
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{4r}{AC} = \frac{r}{3x}$$

$$4r^2 = AC^2$$

~~$$AC = 2\sqrt{3}x$$~~

$$AC = 2\sqrt{3} \cdot x$$

$$BC = 2x$$

$$\frac{x}{BC} = \frac{BC}{4x}$$

$$BC^2 = 4x^2$$

$$BC =$$

$$\frac{2\sqrt{3}x \cdot 2x}{4x} = \frac{4\sqrt{3}x}{4} = \sqrt{3}x$$

$$BC^2 =$$

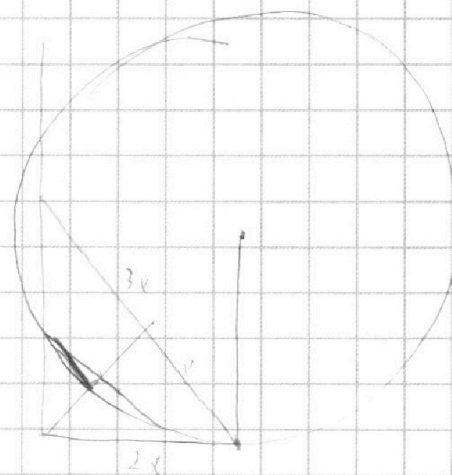
$$4x^2 = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

1502

$$\begin{array}{r} 1502 \\ \times 26 \\ \hline 9012 \\ 30040 \\ \hline 39052 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 92 \\ -15 \\ \hline 27 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{x + \frac{\pi}{2}}{5}\right)$$

$$\frac{x + \frac{\pi}{2}}{5} = x$$

$$\cos x = \sin x$$

$$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x + \frac{\pi}{2}}{5}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{5} - x\right) = \cos\left(\frac{x - 4\pi}{5}\right)$$

$$\begin{cases} x = \frac{x - 4\pi}{5} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{3\pi - x}{5} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{\pi}{2} \\ x &= \frac{-2\pi}{4} \end{aligned}$$

$$5x = x - 4\pi + 10\pi n$$

$$5x = 3\pi - x + 10\pi n$$

$$4x = 3\pi$$

$$4x = -4\pi + 10\pi n$$

$$4x = 2\pi + 10\pi n$$

$$6x = 3\pi + 10\pi n$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{4} n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{6} n$$

$$-12\pi \leq 2\pi + 5\pi n \leq 8\pi$$

$$-10\pi \leq 3\pi + 5\pi n \leq 12\pi$$

$$\begin{cases} -12 \leq 2 + 5n \leq 8 \\ -10 \leq 3 + 5n \leq 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 \leq n \leq 1 \\ -14 \leq 5n \leq 6 \\ -27 \leq 5n \leq 9 \\ -4 \leq n \leq 1 \end{cases}$$

$$-1 \leq 5n \leq 8$$

$$n = -1, 0, 1$$

№3

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin \leq \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{5\pi}{2} \leq \sin \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$-\frac{5\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$-\frac{6\pi}{2} \leq x \leq \frac{4\pi}{2}$$

$$-3\pi \leq x \leq 2\pi$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



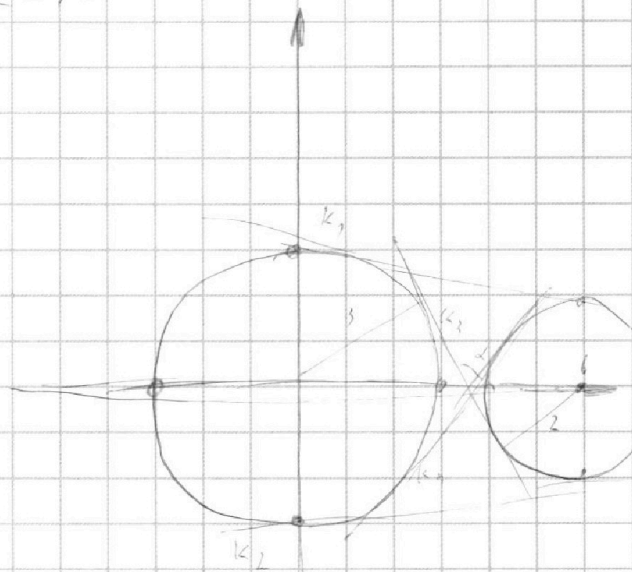
№ 4

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 \\ x^2 + y^2 = 9 \\ x^2 - 12x + y^2 + 32 = 0 \end{cases}$$

все а
ЭВ
умень.

$$\begin{aligned} x^2 - 12x + 36 - 36 + y^2 &= -32 \\ (x-6)^2 + y^2 &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ (x-6)^2 + y^2 = 4 \\ y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b \end{cases}$$



$$a \in (k_3; k_4)$$

$$k_3 = \frac{5}{\sqrt{6^2 - 5^2}} = -\frac{5}{\sqrt{11}}$$

$$k_4 = \frac{5}{\sqrt{11}}$$

$$\begin{aligned} -\frac{5}{\sqrt{11}} &< -\frac{a}{2} < \frac{5}{\sqrt{11}} \\ -\frac{10}{\sqrt{11}} &< -a < \frac{10}{\sqrt{11}} \end{aligned}$$

$a <$

$$a \text{ или } -a \in \left(-\frac{5}{\sqrt{11}}; \frac{5}{\sqrt{11}} \right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

 МФТИ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten mathematical work on a grid background. The work includes several equations and graphs.

Equations shown:

- $\frac{2}{f^2} = 2\sqrt{f} - 76$
- $f = a^2$
- $f = -a^2$
- $-f = a^2$
- $\sqrt{-f} = a$
- $\frac{2}{(-a)^2} = 2\sqrt{-f} - 76$
- $\frac{2}{f^2} = 2\sqrt{-f} - 76$
- $\frac{\sqrt{5}}{2}$
- $\sqrt{2,5} = \sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$
- $\frac{2}{6,25} = 2\sqrt{5} - 76$

Graphs shown:

- A coordinate system with a curve in the first quadrant, possibly representing $y = \sqrt{x}$ or similar, with points marked.
- A coordinate system with a curve in the second quadrant, possibly representing $y = -\sqrt{x}$ or similar, with points marked.

The work is heavily crossed out with diagonal lines, indicating it is a draft or incorrect solution.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{2}{a^4} + 7a = 5a - 7b$$

$$\frac{2}{a^4} + 4b = 7a - 7b$$

$$\frac{2}{a^4} + 7a + 7b = 0$$

$$\frac{2}{b^4} - 7b + 7a = 0$$

~~$$2 + 7a + 7b = 0$$~~

$$a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2) = 0$$

$$\begin{cases} \frac{2}{a^4} + 7a + 7b = 0 \\ \frac{2}{b^4} - 7b + 7a = 0 \end{cases}$$

$$xy = \log_3 xy =$$

$$\frac{1}{a^4} - \frac{2}{a^4} + 7(a+b) = 0$$

$$= \frac{\log_3 xy + \log_3 xy}{5} =$$

$$7(a+b) = \frac{2(a^4 - b^4)}{a^4 b^4}$$

$$\boxed{a = -b}$$

$$= \frac{\log_3 5 + \log_3 5}{5} = \frac{3}{5} = \frac{3}{5}$$

~~$$7a^4 b^4 = 2(a-b)(a^2 + b^2)$$~~

$$7a^4 b^4 = 2(a-b)(a^2 + b^2)$$

$$\frac{2}{b^4} = 7a - 7b$$

$$a - b = \alpha \quad a - b = 2\alpha$$

$$ab = \beta \quad ab = -\alpha^2$$

$$\alpha = 2a$$

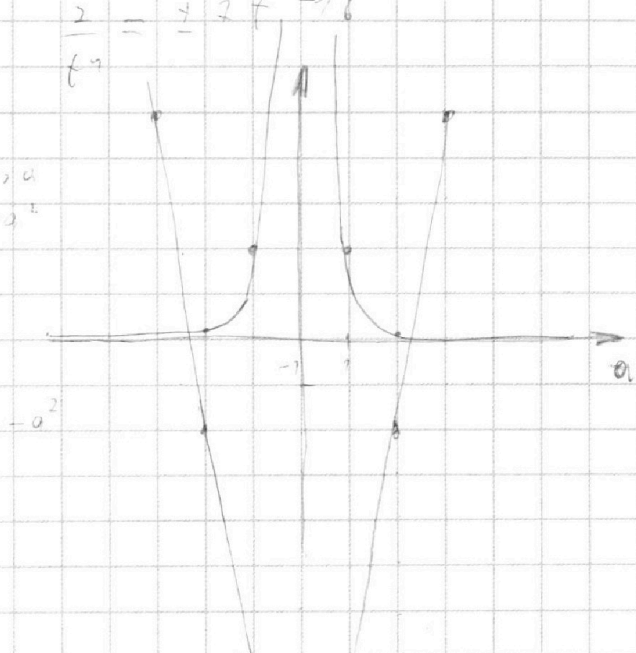
$$7\beta^4 = 2\alpha(\alpha^2 + 2\beta)$$

$$7\beta^4 = 2\alpha^3 + 4\alpha\beta$$

$$2\alpha^3 + 4\alpha\beta - 7\beta^4 = 0$$

$$16\alpha^3 + 8\alpha^3 - 7\alpha^2 = 0$$

$$8\alpha^3 = 7\alpha^2 \quad \alpha = \frac{7}{8}$$



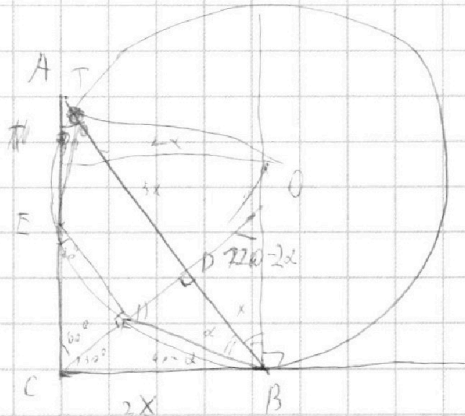
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$T O B = 72^\circ$$

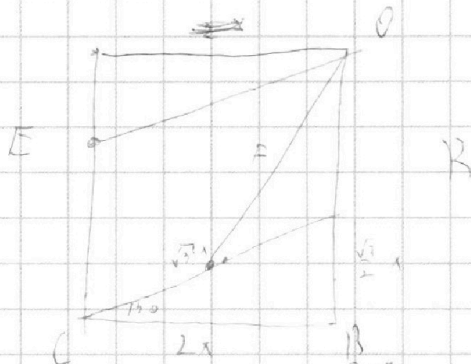
$$ET = FB$$

$$72^\circ - 1x = x$$

$$x = 36^\circ$$

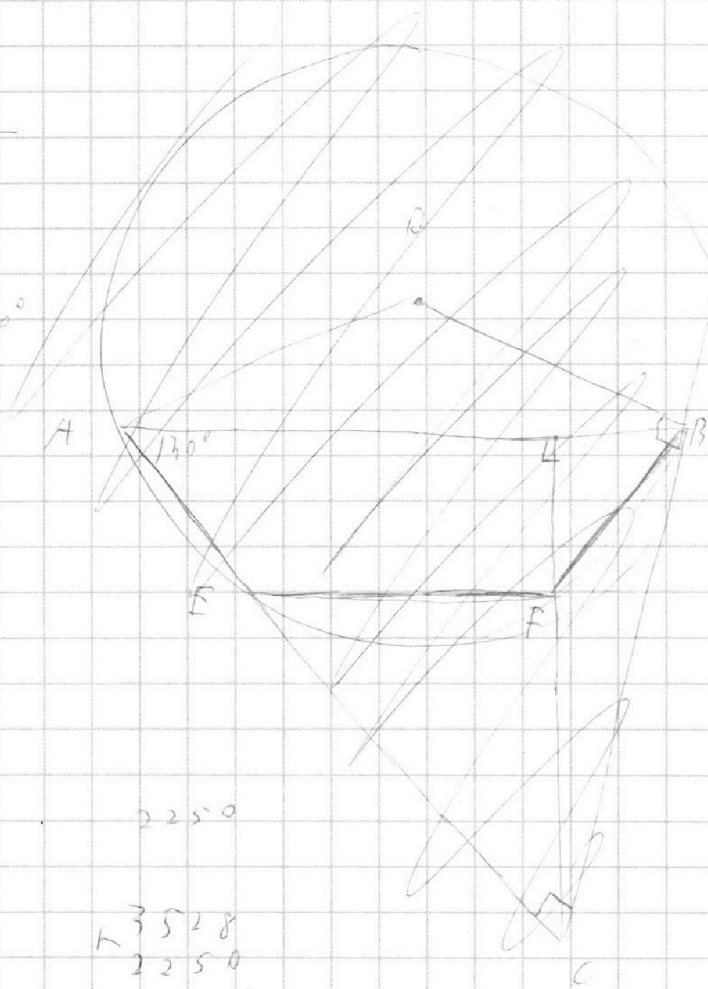
$$72^\circ = 2x \quad x = 36^\circ$$

$$x = 36^\circ$$



$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 74 \\ \hline 222 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 726 \\ \quad 28 \\ \hline \times 7008 \\ \quad 252 \\ \hline \underline{3528} \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 225^\circ \\ \times 3528 \\ \quad 2250 \\ \hline \underline{5778} \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



NS

$$\begin{cases} \log_3^7 x + 6 \log_x 3 = \log_x^2 273 - 8 \\ \log_3^7 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{5y}^2 (3^{11}) - 8 \end{cases}$$

~~$\log_3 x = a$~~

$$6 \log_x 3 = 6a$$

$$\log_x^2 273 = \frac{1}{3} \log_x 3^5 = \frac{5}{2} a$$

~~$\log_x 5y = b$~~

$$\log_x^4 = \frac{1}{24}$$

$$\log_3 5y = \frac{1}{6}$$

$$\log_3 x = \frac{1}{6}$$

$$\log_3 113 = \frac{1}{2} b$$

$$2 \log_{5y} 3 = 2b$$

$$\log_{5y}^2 3^{11} = \frac{11}{2} b$$

$$\log_3^4 = \frac{1}{24}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{24} + 6a &= \frac{5}{2} a - 8 \\ \frac{1}{24} + 2b &= \frac{11}{2} b - 8 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{24} + 6a &= \frac{5}{2} a - 8 \\ \frac{1}{24} + 2b &= \frac{11}{2} b - 8 \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} \frac{5}{2} &= \\ &= 8.5 \cdot 3 = \\ &= 25.5 \end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt{81}}{243}$$