



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a \geq 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{12}$$

$$b \geq 2^{11} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$$

$$c \geq 2^{13} \cdot 3^{18} \cdot 5^{10}$$

Произведение натуральных чисел является произведением их простых делителей

$$abc = a^2 b^2 c^2 \geq 2^{42} \cdot 3^{47} \cdot 5^{53}; \quad a^2 b^2 c^2 : 2^{42} \cdot 3^{47} \cdot 5^{53}$$

т.к. $a^2 b^2 c^2$ — полный квадрат, то степени его простых делителей должны быть четными.

$$a^2 b^2 c^2 : 2^{42} \cdot 3^{47} \cdot 5^{53}$$

$$abc : 2^{21} \cdot 3^{23} \cdot 5^{26}$$

т.к. $abc : 2^{21} \cdot 3^{23} \cdot 5^{26}$, то $a^2 b^2 c^2 : 2^{42} \cdot 3^{47} \cdot 5^{53}$

$$\text{то } abc : 2^{21} \cdot 3^{23} \cdot 5^{26} \Rightarrow abc \geq 2^{21} \cdot 3^{23} \cdot 5^{26}$$

~~это наименьшее значение~~ минимальное достигается при

$$a = 2^7 \cdot 3^7 \cdot 5^{13}; \quad b = 2^2 \cdot 3^3; \quad c = 2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{17}$$

$$\text{Ответ: } 2^{21} \cdot 3^{23} \cdot 5^{26}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AD = 3x$$

$$BD = x$$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$$

$$\frac{3x}{AC} = \frac{AC}{4x}$$

$$AC = 2\sqrt{3}x$$

$$BC = \sqrt{(4x)^2 - (2\sqrt{3}x)^2} = 2x$$

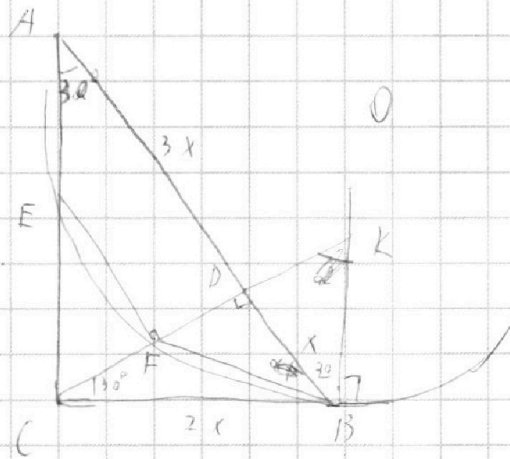
$$\sin \alpha = \sin \angle BAC = \frac{2x}{4x} = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = 30^\circ$$

~~$\angle DOA = \alpha$~~

~~$\angle DBF = \alpha$ и $\angle FBC = 60^\circ - \alpha$~~

$$\frac{BK}{BC} = \frac{BC}{AC} ; \quad \frac{BK}{2x} = \frac{2x}{2\sqrt{3}x} ; \quad BK = \frac{2\sqrt{3}}{3}x$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5 \operatorname{arccos}(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{arccos}(\cos x) = \frac{x + \frac{\pi}{2}}{5}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{arccos}(\cos x) \leq \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{5\pi}{2} \leq 5 \operatorname{arccos}(\cos x) \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$-\frac{5\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$-3\pi \leq x \leq 2\pi$$

$$\sin(\operatorname{arccos}(\cos x)) = \sin\left(\frac{x + \frac{\pi}{2}}{5}\right)$$

$$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x + \frac{\pi}{2}}{5}\right)$$

$$\cos x = \cos\left(\frac{x - 3\pi}{5}\right)$$

~~м.к. $-\pi \leq x \leq 2\pi$~~

$$\begin{cases} x = \frac{x - 3\pi}{5} + \pi n; n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{3\pi - x}{5} + \pi n; n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{4} n; n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{6} n; n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

м.к. $-3\pi \leq x \leq 2\pi$, но из полученных совокупности уравнений условиями $-2 \leq n \leq 1$ для первого решения и $-4 \leq n \leq 1$ для второго, получаем

$$x = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{4} k; k \in \mathbb{Z}; -2 \leq k \leq 1; x = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{6} m; m \in \mathbb{Z}; -4 \leq m \leq 1$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{4} k; k \in \mathbb{Z}; -2 \leq k \leq 1; x = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{6} m; m \in \mathbb{Z}; -4 \leq m \leq 1$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} \log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \\ \log_3^4 (xy) + 2 \log_{xy} 3 = \log_{15y} 3^{11} - 8 \end{cases}$$

$$\log_x 3 = a ; \log_{xy} 3 = b$$

$$\begin{cases} \frac{1}{a^4} + 6a = \frac{5}{2}a - 8 \\ \frac{1}{b^4} + 2b = \frac{11}{2}b - 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{a^4} = -7a - 16 \\ \frac{2}{b^4} = 7b - 16 \end{cases}$$

для обоих уравнений верно следующее:

в левой части равенств находится дробь со знаменателем в 4 степени

и правая часть симметрична относительно своих корней.

$$a_0 = -b_0 \text{ по сим. - воз}$$

$$a = -b$$

$$\log_x 3 = -\log_{xy} 3$$

$$\log_3 x = \log_3 (xy)^{-1}$$

в правой части равенств находится уравнение, переписанное при смене знака знаменателя в ст. -16

следовательно корни из уравнений имеют равно 7 решений.

$$x = \frac{1}{xy}$$

$$xy = \frac{1}{x}$$

~~уравнение~~ $-7a - 16$
симметрична $7b - 16$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{5}$$

значит, если a_0 - решение первого уравнения, b_0 - второго, то $a_0 = -b_0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Всего мячей, крестов 3: $\frac{42}{3} + 7 = 15$

часть 2

~~Всего мячей А: $15 \cdot 70 + (42 - 15 \cdot 3) \cdot 8 = 40$~~

~~мячей А с крестовыми координатами, крестов 3:~~

для 15 мячей \exists 10 м. А для каждой из команд
 \exists 15 мячей В

для оставшихся 28 мячей \exists 8 м. А, для каждой из команд.

14 мячей В

Всего мячей: $15 \cdot 70 + 28 \cdot 5 = 5778$

Ответ: 5778

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

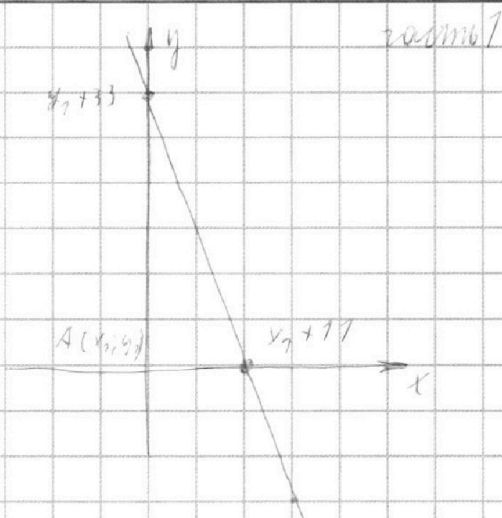
- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



ГМТ точек $B(x_2; y_2)$ есть
прямая, проходящая
через точки $(x_1; y_1)$ и
 $(x_1 + 11; y_1)$ и $(x_1; y_1 + 33)$



это верно в силу того, что

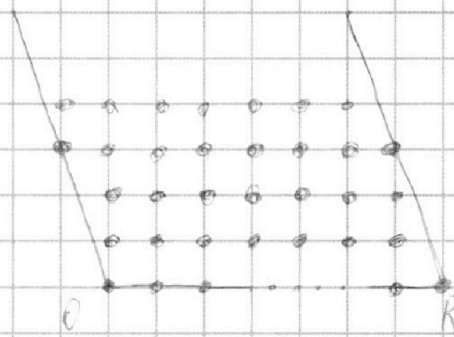
$$y_2 - y_1 = -3(x_2 - x_1) + 33$$

получается, для всех возможных точек A все
возможные точки B лежат на заданной прямой.

т.к. наклон ~~прямой~~ прямой ГМТ(B) ~~равен~~ равен

наклона концов отрезка между

каждыми и равен $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -3$,



то для каждого горизонтального
ряда, состоящего из целого числа

параллельных отрезков ~~равно~~

равно $20 - 11 + 7 = 70$ точек для рядов с ординатой

крестовой 3 и $20 - 11 = 9$ точек для остальных

(это связано с тем, что в ординатах крестовой 3 упрощаются
параллельные точки образуют целое число).

Итак для точек A с ординатой крестовой 3 $\lceil \frac{42}{3} + 7 = 75 \rceil$ точек B

(ГМТ(B) ~~равна~~ с ординатой крестовой 3 $\lceil \frac{42}{3} + 7 = 75 \rceil$ точек B)

точек B , для остальных: 74

Всего точек A :



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

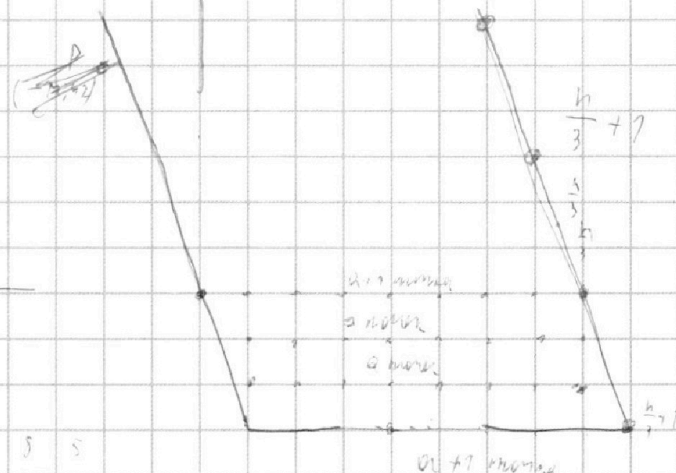
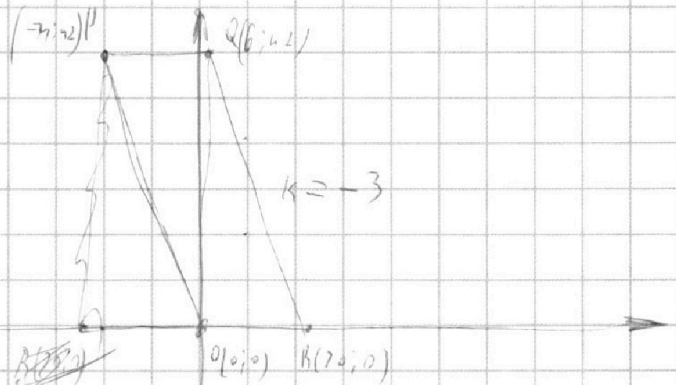
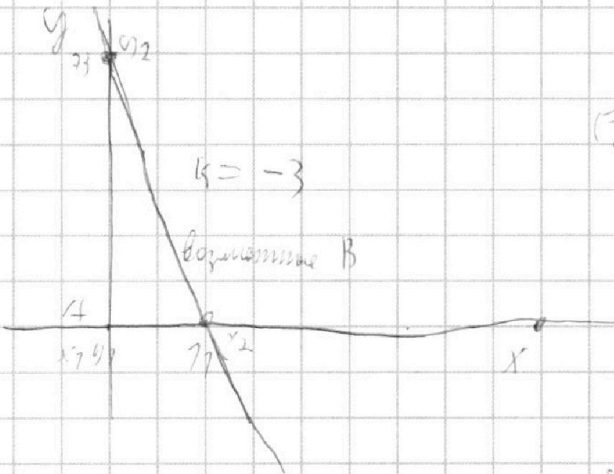


N 6

$$3x_1 - 7x_2 = 33$$

$$3(x_1 - x_2) + (6x_1 - 9x_2) = 33$$

$$3x + 6y = 33$$



Значит количество людей
 7 и 11 человек с заработной платой
 соответственно, 20 и 25
 из (зарплата) количества 7 и 11 человек
 всего людей 18
 28 человек · 17 человек · 74 человек
 +
 28 человек · 72 человек · 75 человек
 11

8 5
 11 12
 a = 20 a = 25
 $\frac{b}{3} = 74$ $\frac{b}{3} + 1 = 75$
 $\frac{74}{3}$ $\frac{75}{3}$
 $\frac{74}{3} + 1 = \frac{77}{3}$
 $\frac{77}{3} \cdot 11 = 154$
 $\frac{75}{3} \cdot 7 = 175$
 $\frac{72}{3} \cdot 32 = 768$
 $\frac{75}{3} \cdot 32 = 800$
 4372

6882

4372
 2670
 6882

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~2-304~~

$$\begin{cases} \frac{2}{a^4} + 2a + 16 = 0 \\ \frac{2}{b^4} - 2b - 16 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{2}{a^4} - \frac{2}{b^4} + 2a + 2b = 0$$

$$2(a+b) = \frac{2}{b^4} - \frac{2}{a^4}$$

$$2(a+b) = \frac{2a^4 - 2b^4}{a^4 b^4}$$

~~2-304~~

$$a = -b$$

$$\frac{1}{a} = \log_3 x$$

$$\frac{1}{b} = \log_5 y$$

$$a = \log_x 3$$

$$b = \log_{5y} 3$$

$$\log_x 3 = -\log_5 y$$

$$\log_x x = -\log_5 y$$

$$x = -\frac{1}{5y}$$

$$x y = -\frac{1}{5}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a, b = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$b, c = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$a, c = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$a = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z \cdot k_1$$

$$b = 2^{9-x} \cdot 3^{10-y} \cdot 5^{10-z} \cdot k_2$$

$$c = 2^{x+5} \cdot 3^{y+3} \cdot 5^{z+3} \cdot k_3$$

$$a = 2^{x+14} \cdot 3^{y+5} \cdot 5^{z+3}$$

$$a = 2^{14-x} \cdot 3^{15-y} \cdot 5^{27-z}$$

$$\begin{cases} 14-x = x & x = 7 \\ 15-y = y & y = 7 \\ 27-z = z & z = 13 \end{cases}$$

$$a = 2^7 \cdot 3^7 \cdot 5^{13}$$

$$b = 2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^3$$

$$\begin{aligned} x+y &= 9 \\ y+z &= 10 \\ z+x &= 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= 9-x \\ 9-x+z &= 10 \\ x+z &= 13 \\ 8+x &= 13 \\ x &= 5 \\ z &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} c = 2^7 \cdot 3^7 \cdot 5^7 \\ a = 2^7 \cdot 3^7 \cdot 5^{13} \\ b = 2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \end{cases}$$

$a, b, c = \min$

$$\begin{aligned} &2 \cdot 13 \\ &+ 78 \\ &79 \\ &42 \end{aligned}$$

$$a, b, c = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$a, b, c = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$a, b, c = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$a, b = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$b, c = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$a, c = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$a = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$$

$$b = 2^{9-x} \cdot 3^{10-y} \cdot 5^{10-z}$$

$$c = 2^{x+5} \cdot 3^{y+4} \cdot 5^{z+1}$$

$$a = 2^{14-x} \cdot 3^{14-y} \cdot 5^{16-z}$$

$$14-x = x \quad x = 7$$

$$14-y = y \quad y = 7$$

$$16-z = z \quad z = 8$$

$$a, b, c = 2^7 \cdot 3^7 \cdot 5^8$$

$$a, b, c = 2^7 \cdot 3^7 \cdot 5^8$$

Ответ: $2^7 \cdot 3^7 \cdot 5^8$

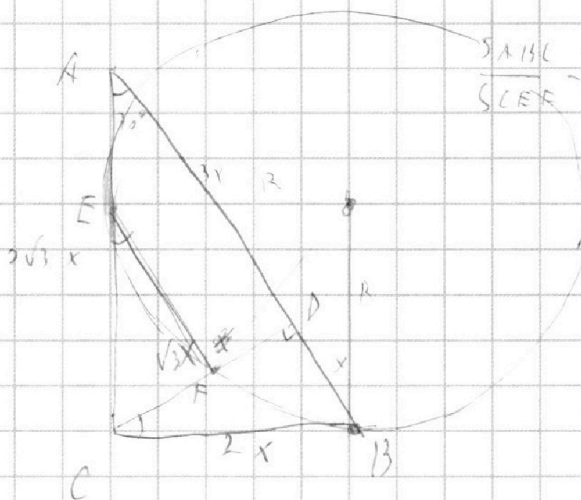
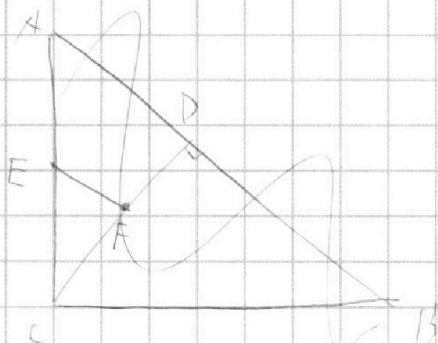
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{4r}{AC} = \frac{r}{3x}$$

$$4r^2 = AC^2$$

~~$$AC = 2\sqrt{3}x$$~~

$$AC = 2\sqrt{3} \cdot x$$

$$BC = 2x$$

$$\frac{x}{BC} = \frac{BC}{4x}$$

$$BC^2 = 4x^2$$

$$BC = 2x$$

$$\frac{2\sqrt{3}x \cdot 2x}{4x} = \frac{4\sqrt{3}x}{4} = \sqrt{3}x$$

$$BC^2 =$$

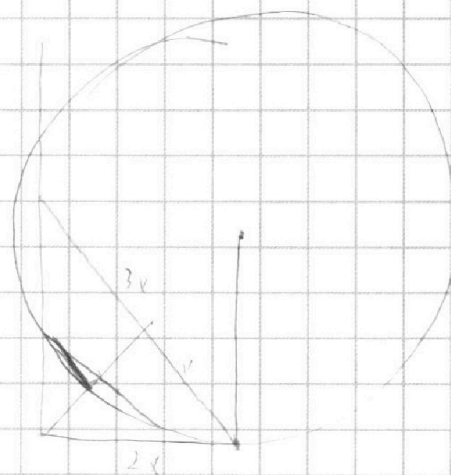
$$\therefore x = \frac{1}{2}$$

$$x = 30^\circ$$

1502

$$\begin{array}{r} x 26 \\ \times 26 \\ \hline 252 \\ 250 \\ \hline 402 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 92 \\ -15 \\ \hline 27 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5 \sin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{x + \frac{\pi}{2}}{5}\right)$$

$$\frac{x + \frac{\pi}{2}}{5} = x$$

~~$$\cos x = 2x$$~~

$$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x + \frac{\pi}{2}}{5}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{5} - x\right) = \cos\left(\frac{x - 4\pi}{5}\right)$$

$$\begin{cases} x = \frac{x - 4\pi}{5} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{3\pi - x}{5} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{\pi}{2} \\ x &= \frac{-2\pi}{4} \end{aligned}$$

$$5x = x - 4\pi + 10\pi n$$

$$5x = 3\pi - x + 10\pi n$$

~~$$4x = 3\pi$$~~

$$4x = -4\pi + 10\pi n$$

$$4x = 3\pi + 10\pi n$$

$$6x = 3\pi + 10\pi n$$

$$-12\pi \leq 2\pi + 5\pi n \leq 8\pi$$

$$-10\pi \leq 3\pi + 5\pi n \leq 12\pi$$

$$\begin{cases} -12 \leq 2 + 5n \leq 8 \\ -10 \leq 3 + 5n \leq 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 \leq n \leq 1 \\ -14 \leq 5n \leq 6 \\ -27 \leq 5n \leq 9 \\ -4 \leq n \leq 1 \end{cases}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{4} n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{6} n$$

~~$$-1 \leq 5n \leq 8$$~~

~~$$n = -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9, -10, -11, -12, -13, -14, -15, -16, -17, -18, -19, -20, -21, -22, -23, -24, -25, -26, -27, -28, -29, -30, -31, -32, -33, -34, -35, -36, -37, -38, -39, -40, -41, -42, -43, -44, -45, -46, -47, -48, -49, -50, -51, -52, -53, -54, -55, -56, -57, -58, -59, -60, -61, -62, -63, -64, -65, -66, -67, -68, -69, -70, -71, -72, -73, -74, -75, -76, -77, -78, -79, -80, -81, -82, -83, -84, -85, -86, -87, -88, -89, -90, -91, -92, -93, -94, -95, -96, -97, -98, -99, -100, -101, -102, -103, -104, -105, -106, -107, -108, -109, -110, -111, -112, -113, -114, -115, -116, -117, -118, -119, -120, -121, -122, -123, -124, -125, -126, -127, -128, -129, -130, -131, -132, -133, -134, -135, -136, -137, -138, -139, -140, -141, -142, -143, -144, -145, -146, -147, -148, -149, -150, -151, -152, -153, -154, -155, -156, -157, -158, -159, -160, -161, -162, -163, -164, -165, -166, -167, -168, -169, -170, -171, -172, -173, -174, -175, -176, -177, -178, -179, -180, -181, -182, -183, -184, -185, -186, -187, -188, -189, -190, -191, -192, -193, -194, -195, -196, -197, -198, -199, -200, -201, -202, -203, -204, -205, -206, -207, -208, -209, -210, -211, -212, -213, -214, -215, -216, -217, -218, -219, -220, -221, -222, -223, -224, -225, -226, -227, -228, -229, -230, -231, -232, -233, -234, -235, -236, -237, -238, -239, -240, -241, -242, -243, -244, -245, -246, -247, -248, -249, -250, -251, -252, -253, -254, -255, -256, -257, -258, -259, -260, -261, -262, -263, -264, -265, -266, -267, -268, -269, -270, -271, -272, -273, -274, -275, -276, -277, -278, -279, -280, -281, -282, -283, -284, -285, -286, -287, -288, -289, -290, -291, -292, -293, -294, -295, -296, -297, -298, -299, -300, -301, -302, -303, -304, -305, -306, -307, -308, -309, -310, -311, -312, -313, -314, -315, -316, -317, -318, -319, -320, -321, -322, -323, -324, -325, -326, -327, -328, -329, -330, -331, -332, -333, -334, -335, -336, -337, -338, -339, -340, -341, -342, -343, -344, -345, -346, -347, -348, -349, -350, -351, -352, -353, -354, -355, -356, -357, -358, -359, -360, -361, -362, -363, -364, -365, -366, -367, -368, -369, -370, -371, -372, -373, -374, -375, -376, -377, -378, -379, -380, -381, -382, -383, -384, -385, -386, -387, -388, -389, -390, -391, -392, -393, -394, -395, -396, -397, -398, -399, -400, -401, -402, -403, -404, -405, -406, -407, -408, -409, -410, -411, -412, -413, -414, -415, -416, -417, -418, -419, -420, -421, -422, -423, -424, -425, -426, -427, -428, -429, -430, -431, -432, -433, -434, -435, -436, -437, -438, -439, -440, -441, -442, -443, -444, -445, -446, -447, -448, -449, -450, -451, -452, -453, -454, -455, -456, -457, -458, -459, -460, -461, -462, -463, -464, -465, -466, -467, -468, -469, -470, -471, -472, -473, -474, -475, -476, -477, -478, -479, -480, -481, -482, -483, -484, -485, -486, -487, -488, -489, -490, -491, -492, -493, -494, -495, -496, -497, -498, -499, -500, -501, -502, -503, -504, -505, -506, -507, -508, -509, -510, -511, -512, -513, -514, -515, -516, -517, -518, -519, -520, -521, -522, -523, -524, -525, -526, -527, -528, -529, -530, -531, -532, -533, -534, -535, -536, -537, -538, -539, -540, -541, -542, -543, -544, -545, -546, -547, -548, -549, -550, -551, -552, -553, -554, -555, -556, -557, -558, -559, -560, -561, -562, -563, -564, -565, -566, -567, -568, -569, -570, -571, -572, -573, -574, -575, -576, -577, -578, -579, -580, -581, -582, -583, -584, -585, -586, -587, -588, -589, -590, -591, -592, -593, -594, -595, -596, -597, -598, -599, -600, -601, -602, -603, -604, -605, -606, -607, -608, -609, -610, -611, -612, -613, -614, -615, -616, -617, -618, -619, -620, -621, -622, -623, -624, -625, -626, -627, -628, -629, -630, -631, -632, -633, -634, -635, -636, -637, -638, -639, -640, -641, -642, -643, -644, -645, -646, -647, -648, -649, -650, -651, -652, -653, -654, -655, -656, -657, -658, -659, -660, -661, -662, -663, -664, -665, -666, -667, -668, -669, -670, -671, -672, -673, -674, -675, -676, -677, -678, -679, -680, -681, -682, -683, -684, -685, -686, -687, -688, -689, -690, -691, -692, -693, -694, -695, -696, -697, -698, -699, -700, -701, -702, -703, -704, -705, -706, -707, -708, -709, -710, -711, -712, -713, -714, -715, -716, -717, -718, -719, -720, -721, -722, -723, -724, -725, -726, -727, -728, -729, -730, -731, -732, -733, -734, -735, -736, -737, -738, -739, -740, -741, -742, -743, -744, -745, -746, -747, -748, -749, -750, -751, -752, -753, -754, -755, -756, -757, -758, -759, -760, -761, -762, -763, -764, -765, -766, -767, -768, -769, -770, -771, -772, -773, -774, -775, -776, -777, -778, -779, -780, -781, -782, -783, -784, -785, -786, -787, -788, -789, -790, -791, -792, -793, -794, -795, -796, -797, -798, -799, -800, -801, -802, -803, -804, -805, -806, -807, -808, -809, -810, -811, -812, -813, -814, -815, -816, -817, -818, -819, -820, -821, -822, -823, -824, -825, -826, -827, -828, -829, -830, -831, -832, -833, -834, -835, -836, -837, -838, -839, -840, -841, -842, -843, -844, -845, -846, -847, -848, -849, -850, -851, -852, -853, -854, -855, -856, -857, -858, -859, -860, -861, -862, -863, -864, -865, -866, -867, -868, -869, -870, -871, -872, -873, -874, -875, -876, -877, -878, -879, -880, -881, -882, -883, -884, -885, -886, -887, -888, -889, -890, -891, -892, -893, -894, -895, -896, -897, -898, -899, -900, -901, -902, -903, -904, -905, -906, -907, -908, -909, -910, -911, -912, -913, -914, -915, -916, -917, -918, -919, -920, -921, -922, -923, -924, -925, -926, -927, -928, -929, -930, -931, -932, -933, -934, -935, -936, -937, -938, -939, -940, -941, -942, -943, -944, -945, -946, -947, -948, -949, -950, -951, -952, -953, -954, -955, -956, -957, -958, -959, -960, -961, -962, -963, -964, -965, -966, -967, -968, -969, -970, -971, -972, -973, -974, -975, -976, -977, -978, -979, -980, -981, -982, -983, -984, -985, -986, -987, -988, -989, -990, -991, -992, -993, -994, -995, -996, -997, -998, -999, -1000$$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 4

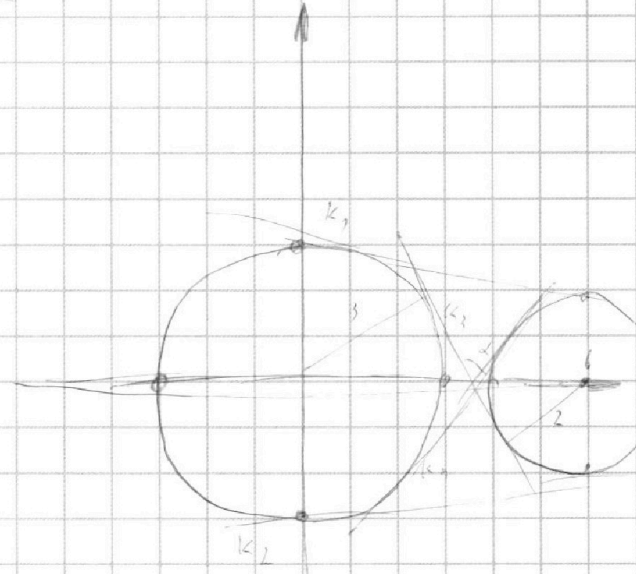
$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

все a
 $\exists b$
чрпм.

$$\begin{aligned} x^2 - 12x + 36 + y^2 + 32 &= 0 \\ x^2 - 12x + 36 - 36 + y^2 &= -32 \\ (x-6)^2 + y^2 &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ (x-6)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b$$



$$a \in (k_3; k_4)$$

$$k_3 = \frac{5}{\sqrt{6^2 - 5^2}} = \frac{5}{\sqrt{11}}$$

$$k_4 = \frac{5}{\sqrt{11}}$$

$$\frac{5}{\sqrt{11}} < -\frac{a}{2} < \frac{5}{\sqrt{11}}$$

$$-\frac{10}{\sqrt{11}} < -a < \frac{10}{\sqrt{11}}$$

$$a \in \left(-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}}\right)$$

$$a \text{ или } -a \in \left(-\frac{5}{\sqrt{11}}; \frac{5}{\sqrt{11}}\right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten mathematical work on a grid background. The work includes several equations and graphs.

Equations shown:

- $\frac{2}{t^2} = 2\sqrt{t} - 76$
- $t = a^2$
- $f = -a^2$
- $t = a^2$
- $\sqrt{-f} = a$
- $\frac{2}{(-a)^2} = 2\sqrt{-f} - 76$
- $\frac{2}{t^2} = 2\sqrt{-t} - 76$
- $\frac{\sqrt{5}}{2}$
- $\sqrt{2,5} =$
- $\sqrt{\frac{2,5}{2,5}} =$
- $= \frac{\sqrt{2,5}}{\sqrt{2,5}}$
- $\frac{2}{6,25} = 2\sqrt{2,5} - 76$

Graphs shown:

- A coordinate system with a curve in the first quadrant, possibly representing $y = \sqrt{x}$ or similar, with points marked.
- A coordinate system with a curve in the second quadrant, possibly representing $y = -\sqrt{-x}$ or similar, with points marked.

The work is heavily crossed out with diagonal lines, indicating it is a draft or incorrect solution.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{2}{a^4} + 7a = 5a - 7b$$

$$\frac{2}{a^4} + 4b = 7a - 7b$$

$$\frac{2}{a^4} + 7a + 7b = 0$$

$$\frac{2}{b^4} - 7b + 7a = 0$$

~~$$2 + 7a + 7b = 0$$~~

$$a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2) = 0$$

$$\begin{cases} \frac{2}{a^4} + 7a + 7b = 0 \\ \frac{2}{b^4} - 7b + 7a = 0 \end{cases}$$

$$xy = \log_3 xy = \dots$$

$$\frac{2}{a^4} - \frac{2}{b^4} + 7(a+b) = 0$$

$$= \frac{\log_3 xy + \log_3 xy}{5} = \dots$$

$$7(a+b) = \frac{2(a^4 - b^4)}{a^4 b^4}$$

$$\boxed{a = -b}$$

$$= \frac{\log_3 5 + \log_3 5}{5} = \frac{3}{5} = \frac{3}{5}$$

~~$$7a^4 b^4 = 2(a-b)(a^2 + b^2)$$~~

$$7a^4 b^4 = 2(a-b)(a^2 + b^2)$$

$$a - b = \alpha \quad a - b = 2a$$

$$ab = \beta \quad ab = -a^2$$

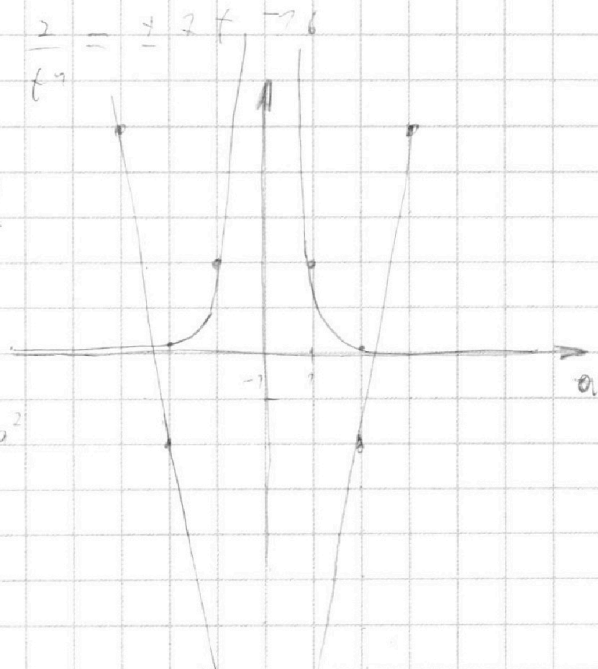
$$7\beta^4 = 2\alpha(\alpha^2 + 2\beta)$$

$$7\beta^4 = 2\alpha^3 + 4\alpha\beta$$

$$2\alpha^3 + 4\alpha\beta - 7\beta^4 = 0$$

$$-6\alpha^3 + 8\alpha^3 - 7 - \alpha^2 = 0$$

$$2\alpha^2 = 7 - \alpha^2 \quad \alpha = \sqrt{\frac{7}{3}}$$



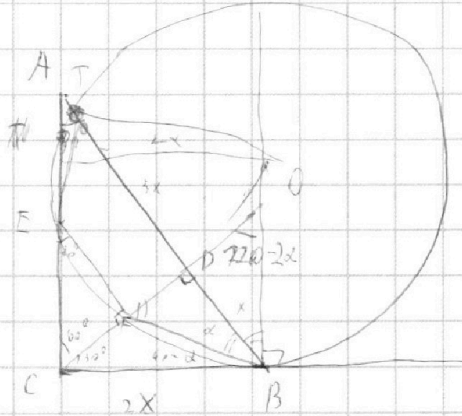
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$T O B = 72^\circ$$

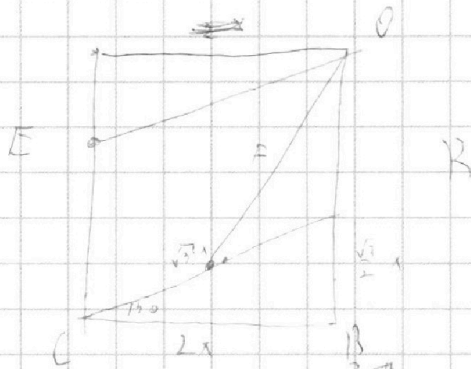
$$ET = FB$$

$$72 - 1x = d$$

$$x = 40$$

$$72 - 2x = 28 \quad x = 40^\circ$$

$$x = 60$$

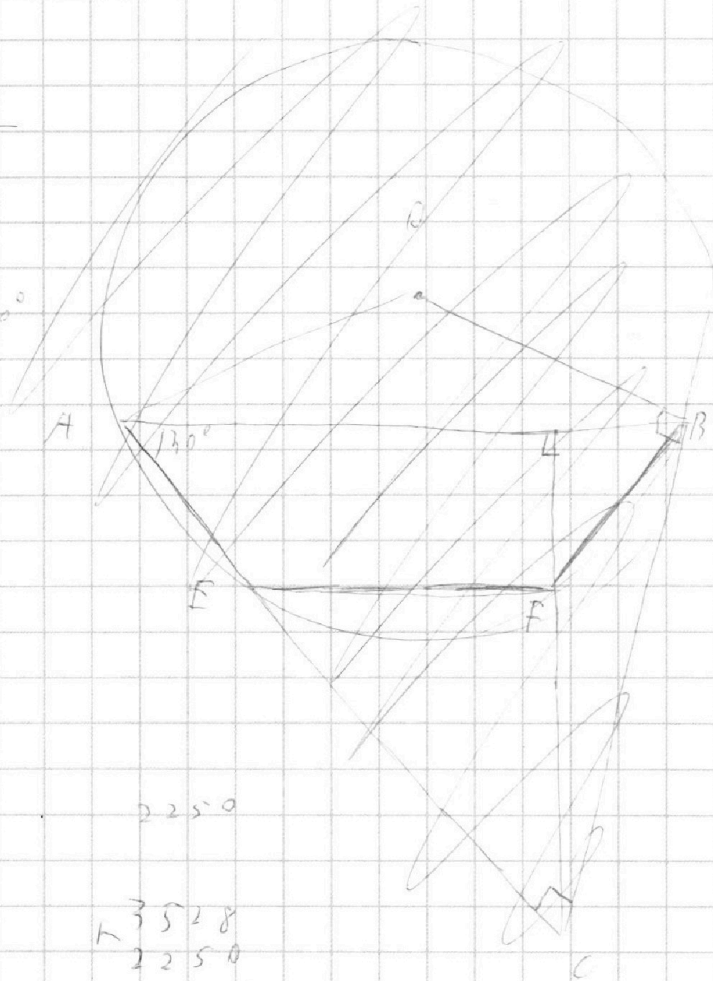


$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 74 \\ \hline 222 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 726 \\ \quad 28 \\ \hline \times 7008 \\ \quad 252 \\ \hline \underline{3528} \end{array}$$

$$225^\circ$$

$$\begin{array}{r} \times 3528 \\ \quad 2250 \\ \hline \underline{5778} \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

NS

$$\begin{cases} \log_3^7 x + 6 \log_x 3 = \log_x^2 273 - 8 \\ \log_3^7 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{5y}^2 (3^{11}) - 8 \end{cases}$$

~~$\log_3 x = a$~~

$$6 \log_x 3 = 6a$$

$$\log_x^2 273 = \frac{1}{3} \log_x 3^5 = \frac{5}{2} a$$

~~$\log_{5y} 3 = b$~~

$$\log_{5y}^4 x = \frac{1}{24}$$

$$\log_{5y} 5y = 6$$

$$\log_{5y} x = \frac{1}{24}$$

$$2 \log_{5y} 3 = 2b$$

$$\log_{5y}^2 3 = \frac{1}{24}$$

$$\log_{5y}^2 3^{11} = \frac{11}{2} b$$

$$\log_{5y}^4 5y = \frac{1}{24}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{24} + 6a = \frac{5}{2} a - 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{24} + 2b = \frac{11}{2} b - 8 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 3^5 &= \\ &= 85.3 = \\ &= 27.3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{85.3} &= \\ &= 9.23 \end{aligned}$$