МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ \left(x^2 + 14x + y^2 + 45\right)\left(x^2 + y^2 - 9\right) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}\left(7^5\right) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задание 1.

$a, b, c \in \mathbb{N}$

Пусть $\begin{cases} ab = 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14} \cdot x \\ bc = 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18} \cdot y \\ ac = 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43} \cdot z \end{cases}$ $\quad x, y, z \in \mathbb{N}$

тогда $(abc)^2 = 2^{34} \cdot 3^{43} \cdot 5^{75} \cdot x \cdot y \cdot z$

так как $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{N}$, то $(abc) \vdots\, 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$

при этом $ac \vdots\, 5^{43} \Rightarrow abc \vdots\, 5^{43}$ $\Rightarrow$ $(abc) \vdots\, 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

Значит, наименьшее значение (abc) равно $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

Приведём пример таких чисел a, b, c:

$a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^{14}$

$b = 2^3 \cdot 3^5$

$c = 2^{10} \cdot 3^{10} \cdot 5^{29}$

Тогда $ab = 2^7 \cdot 3^{12} \cdot 5^{14} \vdots\, 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$

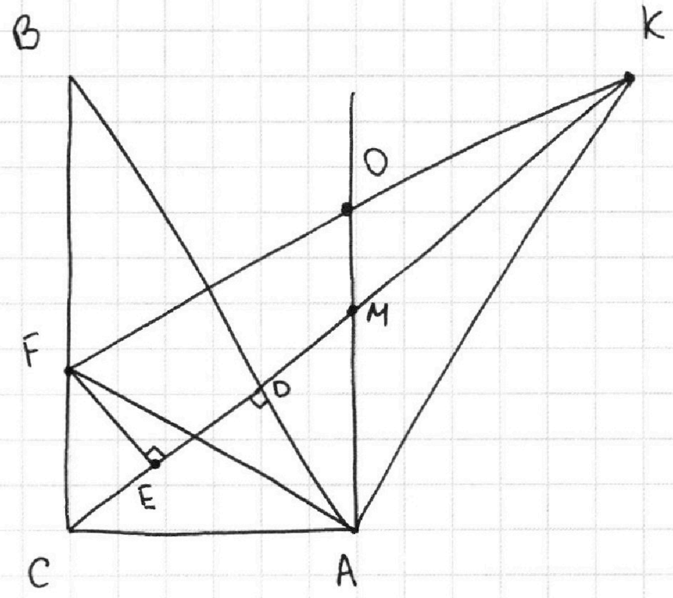
$bc = 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{29} \vdots\, 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$

$ac = 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43} \vdots\, 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$

Таким образом, наименьшее значение abc равно $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

$\boxed{\text{Ответ: } 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}}$

Задание 2



Пусть центр окружности - точка O. Из $FE \parallel BD$ $\angle FED = 90°$, проведём диаметр окружности FK. $\angle FAK = 90°$, $OA \perp AC$.

Пусть $OA \cap CK = M$. $OM \parallel BC$, $OF = OK \Rightarrow OM$ - средняя линия $\triangle FCK$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow CM = MK$. Пусть $AD = 3x$, тогда $BD = 10x$. $CD^2 = 3x \cdot 10x \Rightarrow$

$\Rightarrow CD = x\sqrt{30}$. $AC^2 = 30x^2 + 9x^2 \Rightarrow AC = x\sqrt{39}$.

~~Пусть~~ Из $\triangle ACM$ ($\angle CAM = 90°$, AD - высота) : $AD^2 = CD \cdot DM \Rightarrow$

$\Rightarrow DM = \frac{9x^2}{x\sqrt{30}} = \frac{9x}{\sqrt{30}}$

$CK = 2CM = 2(CD + DM) = 2\left(x\sqrt{30} + \frac{9x}{\sqrt{30}}\right) = 2 \cdot \frac{39x}{\sqrt{30}}$

Запишем степень точки C относительно окружности:

$CE \cdot CK = AC^2 \Rightarrow CE = \frac{AC^2}{CK} = \frac{(x\sqrt{39})^2}{39x \cdot 2} \cdot \sqrt{30} = \frac{x\sqrt{30}}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задание 2 (продолжение)

~~CE~~ Заметим, что $CE = CD:2$ => так как $FE \parallel BD$, то

FE – средняя линия ΔBCD => ~~ED~~ $EF = \frac{1}{2}BD = 5x$

тогда ~~S_{BCD}~~ $S_{CEF} = \frac{1}{2} CE \cdot FE = \frac{1}{2} \cdot \frac{x\sqrt{30}}{2} \cdot 5x = \frac{5x^2\sqrt{30}}{4}$

$S_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot x\sqrt{30} \cdot 3x = \frac{3x^2\sqrt{30}}{2}$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{3\cancel{x^2\sqrt{30}} \cdot 4}{2 \cdot 5\cancel{x^2\sqrt{30}}} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5} = 1{,}2$$

$\boxed{\text{Ответ: } 1{,}2.}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задание 3 (продолжение)

4) $x \in \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right] \Rightarrow \arcsin(\sin x) = x - 2\pi$

$\pi = 5(x - 2\pi) + x$

$\frac{3\pi}{2} < \frac{11\pi}{6} < \frac{5\pi}{2}$
верно

$6x = \cancel{8\pi}\ 11\pi$

$\boxed{x = \frac{11\pi}{6}}$

5) $x \in \left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right] \Rightarrow \arcsin(\sin x) = \cancel{4\pi + x}\ \cancel{2\pi + x}\ 3\pi - x$

$\pi = 5(3\pi - x) + x$

$4x = 14\pi$

$\boxed{x = \frac{7\pi}{2}}$

Таким образом, $x \in \left\{-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \pi; \frac{11\pi}{6}; \frac{7\pi}{2}\right\}$

Преобразования были равносильными, поэтому найденные решения подходят.

Ответ: $-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \pi, \frac{11\pi}{6}, \frac{7\pi}{2}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задание 3 $5\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$ ОДЗ: $-1 \le \sin x \le 1$ верно

$\arccos(\sin x) \in [0; \pi] \Rightarrow 5\arccos(\sin x) \in [0; 5\pi]$

Тогда $0 \le \frac{3\pi}{2} + x \le 5\pi$

$-\frac{3\pi}{2} \le x \le \frac{10\pi - 3\pi}{2} = \frac{7\pi}{2}$

$\arccos(\sin x) + \arcsin(\sin x) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)$

$5\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)\right) = \frac{3\pi}{2} + x$

$\frac{5\pi}{2} - \frac{3\pi}{2} = 5\arcsin(\sin x) + x$

$\pi = 5\arcsin(\sin x) + x$

Разберём несколько случаев:

1) $x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \arcsin(\sin x) = -x - \pi$

$\pi = 5(-x - \pi) + x$

$4x = -6\pi$

$\boxed{x = -\frac{3\pi}{2}}$

2) $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \arcsin(\sin x) = x$

$\pi = 5x + x$

$\boxed{x = \frac{\pi}{6}}$

3) $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right] \Rightarrow \arcsin(\sin x) = \pi - x$

$\pi = 5(\pi - x) + x$

$4x = 4\pi \Rightarrow \boxed{x = \pi}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задание 4 (продолжение)

$$b^2 < \frac{9(9a^2+1)}{49}$$

$$b \in \left(\frac{-3\sqrt{9a^2+1}}{7}; \frac{3\sqrt{9a^2+1}}{7} \right) \quad (*)$$

для всех a

2) Подставим (1) во (2), должно быть ровно 2 решения

$$(-3ay+7b+7)^2 + y^2 - 4 = 0$$

$$\underbrace{(9a^2+1)}_{>0}y^2 - 2(21ab+21a)y + 49b^2 + 2\cdot 49b + 45 = 0$$

$$D = 4(21ab+21a)^2 - 4(9a^2+1)(49b^2+2\cdot 49b+45) > 0$$

$$(21^2a^2 - 49(9a^2+1))b^2 + (2\cdot 21^2a^2 - 2\cdot 49(9a^2+1))b + 21^2a^2 - 45(9a^2+1) > 0$$

$$(\cancel{21^2a^2} - \cancel{21^2a^2} - 49)b^2 + 2(\cancel{21^2a^2} - \cancel{21^2a^2} - 49)b + 21^2a^2 - 49(9a^2+1) + 4(9a^2+1) > 0$$

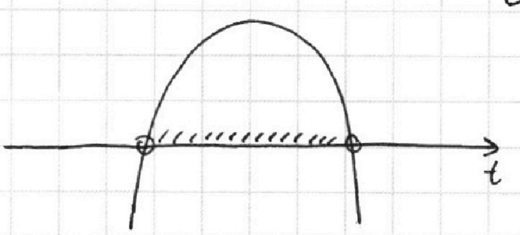
$$49b^2 + 2\cdot 49b + 49 - 4(9a^2+1) < 0$$

$$49b^2 + 2\cdot 49b - 36a^2 + 45 < 0$$

Заменим $7b$ на t, тогда $t^2 + 14t - 36a^2 + 45 < 0$ должно иметь решения относительно t, причём из $(*)$ решения на $(-3\sqrt{9a^2+1}; 3\sqrt{9a^2+1})$

$f(t) = t^2 + 14t - 36a^2 + 45$ парабола с ветвями вверх, $t_0 = -7$

$$D = 14^2 - 4(45 - 36a^2) = 4(49 - 45 + 36a^2) = 4(4 + 36a^2) = 4^2(9a^2+1)$$



$$t \in \left(-7 - 2\sqrt{9a^2+1}; -7 + 2\sqrt{9a^2+1}\right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задание 4

$$\begin{cases} x+3ay-7b=0 \\ (x^2+14x+y^2+45)(x^2+y^2-9)=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-3ay+7b & (1) \\ \left[\begin{array}{ll} (x+7)^2+y^2-4=0 & (2) \\ x^2+y^2-9=0 & (3) \end{array}\right. \end{cases}$$

(1) - линейная зависимость, (2) и (3) - квадратичные. Каждое из (2) и (3) может дать не более 2-х решений (подставляем в них (1)), всего решений должно быть 4 => они имеют по 2 решения.

Заметим, что (2) - окружность с центром в $(-7;0)$ и радиусом 2, (3) - окружность с центром в $(0;0)$ и радиусом 3, они не пересекаются, поэтому решения в (2) и (3) не совпадают.

1) Подставляем (1) во (3), должно быть ровно 2 решения

$(7b-3ay)^2+y^2-9=0$

$\underbrace{(9a^2+1)}_{>0}y^2-42aby+49b^2-9=0$

$D=42^2\cdot a^2b^2-4(9a^2+1)\cdot(49b^2-9)>0$

$21^2a^2b^2-(9a^2+1)\cdot(49b^2-9)>0$ должно существовать b, что неравенство выполнено. Рассмотрим как квадратное относительно b

$(\underbrace{\cancel{21^2a^2}-\cancel{9\cdot 49a^2}-49}_{<0})b^2+9(9a^2+1)>0$

<0, т.к. $49b^2<9(9a^2+1)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задание 4 (продолжение −2)

$(-7-2\sqrt{9a^2+1};\ -7+2\sqrt{9a^2+1})$ и $(-3\sqrt{9a^2+1};\ 3\sqrt{9a^2+1})$ должн иметь хотя бы одну общую точку

~~1 случай:~~

~~$-7+2\sqrt{9a^2+1} > 3\sqrt{9a^2+1}$~~

~~$\sqrt{9a^2+1} < -7$~~

$-7+2\sqrt{9a^2+1} < 3\sqrt{9a^2+1}$, так как $\sqrt{9a^2+1} > -7$

тогда должно выполняться

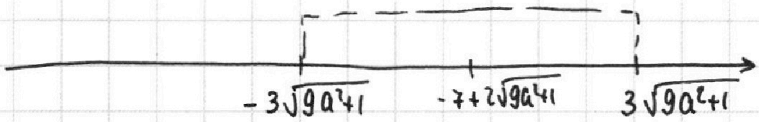
$$-7+2\sqrt{9a^2+1} > -3\sqrt{9a^2+1}$$

$$5\sqrt{9a^2+1} > 7$$

$$9a^2+1 > \frac{49}{25}$$

$$9a^2 > \frac{24}{25}$$

$$a^2 > \frac{24}{25\cdot 9} \Rightarrow a \in \left(-\infty; \frac{-\sqrt{24}}{15}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{24}}{15}; +\infty\right)$$



при $a \in \left(-\infty; -\frac{\sqrt{24}}{15}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{24}}{15}; +\infty\right)$ интервалы $(-3\sqrt{9a^2+1}; 3\sqrt{9a^2+1})$ и $(-7-2\sqrt{9a^2+1}; -7+2\sqrt{9a^2+1})$ будут иметь хотя бы одну общую точку, ~~которой~~ которую можно приравнять $t = 7b \Rightarrow$ будет существовать b, что сист. уравнения (2) и (3) (при подстановке (1)) будут иметь по 2 несовпадающих решения $\Rightarrow$ система имеет ровно 4 решения.

$\boxed{\text{Ответ: } a \in \left(-\infty; \frac{-\sqrt{24}}{15}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{24}}{15}; +\infty\right).}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задание 5 (продолжение 2)

минимум $g(a)$ в точке $a = -\left(\frac{7}{8}\right)^{\frac{1}{5}}$ и равен

$$\frac{2 \cdot \left(-\frac{7}{8}\right)^{\frac{4}{5}} - 8 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^{\frac{1}{5}} - 7}{-2 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^{\frac{1}{5}}} > 0 \Rightarrow g(a) > 0 \Rightarrow f(t) > 0$$

тогда $f(6x) = 0$ и $f(y) = 0$ не имеет решений

Ответ: таких x и y не существует.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задание 5 (продолжение)

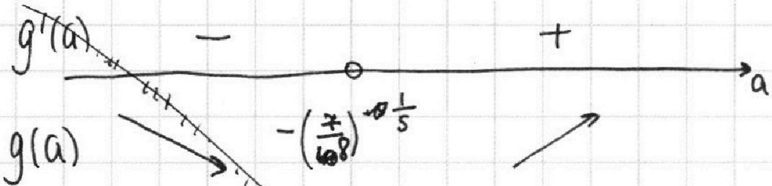
$f_1(a) = 2a^5 + 8a - 7$

$f_1'(a) = 10a^4 + 8 > 0 \Rightarrow f_1(a) \uparrow$

Пусть $f_1(a) = 0$ имеет корень a_0. Он единственный в силу монотонности $f_1(a)$ и $a > 0$, так как $f(0) < 0$.

$$g'(a) = \frac{(10a^4+8)\cdot 2a - 2(2a^5+8a-7)}{4a^2} =$$

$$= \frac{20a^5 + \cancel{16a} - 4a^5 - \cancel{16a} + 14}{4a^2} = \cancel{\frac{10a^5+7}{2a^2}} = \frac{16a^5+14}{4a^2} = \frac{8a^5+7}{2a^2}$$



← это верно

минимум $g(a)$ равен $\left(g\left(-\left(\frac{7}{10}\right)^{\frac{1}{5}}\right)\right) = \dfrac{2\cdot\frac{-7}{10} - 8\cdot\left(\frac{7}{10}\right)^{-\frac{1}{5}} - 7}{-2\cdot\left(\frac{7}{10}\right)^{-\frac{1}{5}}} > 0$

тогда $g(a) > 0 \Rightarrow f(t) > 0 \Rightarrow f(6x) = 0$ и $f(y) = 0$ не имеет решений

$\boxed{\text{Ответ: таких } x \text{ и } y \text{ не существует.}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

5 Задание 5

$$\begin{cases} \log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4 \\ \log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}(7^5) - 4 \end{cases}$$

найти: xy

ОДЗ: $\begin{cases} x>0 \\ x\neq \frac{1}{6} \\ x \neq -\frac{1}{6} \\ y>0 \\ y\neq \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\neq \frac{1}{6} \\ y>0 \\ y \neq 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_7^4(6x) - \frac{2}{\log_7(6x)} = \frac{3}{\log_7(6x)\cdot 2} - 4 \\ \log_7^4 y + \frac{6}{\log_7 y} = \frac{5}{\log_7 y \cdot 2} - 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_7^4(6x) - \frac{7}{2\log_7(6x)} + 4 = 0 \\ \log_7^4 y - \frac{7}{2\log_7 \cancel{(6x)}\, y} + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\cancel{f(t) = \log_7^4 t - \frac{7}{2\log_7 t} + 4 = 0}$$

$$f(t) = \log_7^4 t - \frac{7}{2\log_7 t} + 4 = 0$$

тогда система имеет вид $\begin{cases} f(6x) = 0 \\ f(y) = 0 \end{cases}$

Проанализируем $f(t)$:

Пусть $\log_7 t = a$, тогда $g(a) = a^4 - \frac{7}{2a} + 4 = \frac{2a^5 + 8a - 7}{2a}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$4x_2-4x_1+y_2-y_1=40$

$f(BA)-f(B)=40$

$f(A)=4x_1+y_1$

$t^4-\frac{7}{2}t+4=0$

$f(t)=2t^4-7t+8=0$

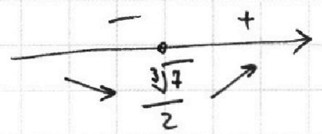
$f'(t)=8t^3-7$

блин, это же $t^4-\frac{7}{2t}+4=0$

$\frac{2t^5-7+8t}{2t}=0$

$f(t)=2t^5+8t-7=0$

$f'(t)=10t^4+8>0$



$f(t)\geq f\left(\frac{7^{\frac{1}{3}}}{2}\right)=2\cdot\frac{7\cdot7^{\frac{1}{3}}}{16}-\frac{7\cdot7^{\frac{1}{3}}}{2}+8=-\frac{7\cdot7^{\frac{1}{3}}\cdot3}{8}+8=$

$=\frac{64-21\sqrt[3]{7}}{8}$

$64 \vee 21\sqrt[3]{7}$

$64^3 \vee 21^3\cdot7=21^3\cdot3+21^3\cdot3+21^3$

$64^3>24^3\cdot8 \quad |:8^3$

$8^3>4^3\cdot8=8\cdot4\cdot8$ юху

кринж

$g(a)\geq$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

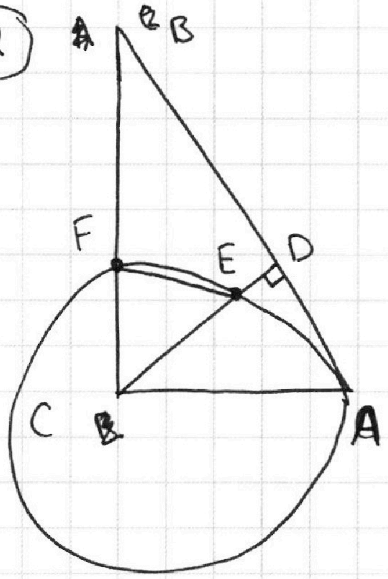
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

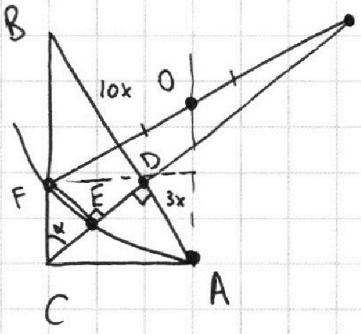
МФТИ

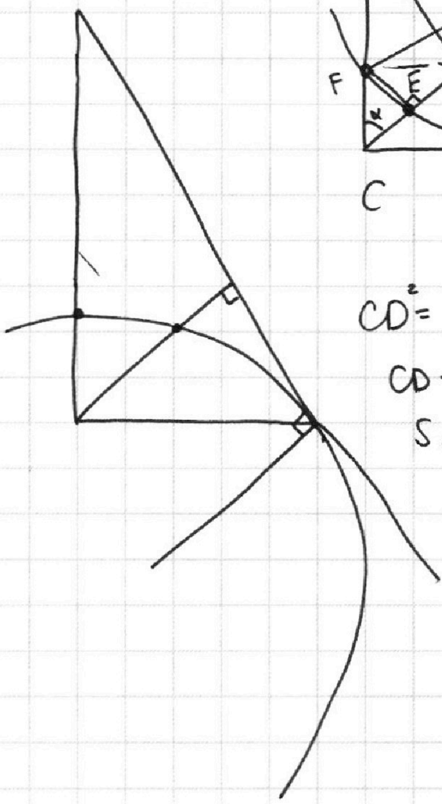
2



$$\frac{AB}{BD} = 1{,}3 = \cancel{\frac{10}{13}}\ \frac{13}{10}$$

$AD = 3x,\ BD = 10x$





$CF = y$

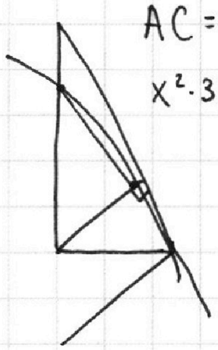
$AC = \sqrt{30x^2 + 9x^2} = x\sqrt{39}$

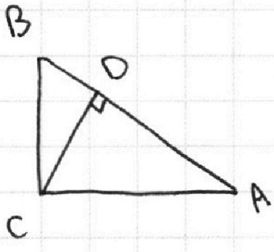
$x^2 \cdot 39 +$

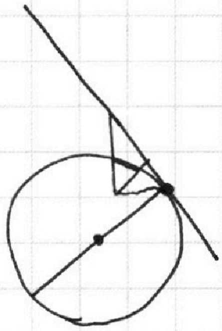
$CD^2 = 3x \cdot 10x = x^2 \cdot 30$

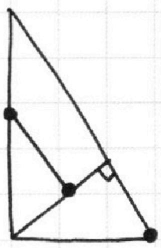
$CD = x\sqrt{30}$

$S_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot x\sqrt{30} \cdot 3x = \frac{3x^2\sqrt{30}}{2}$









На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$21^2a^2 - 7^2(9a^2+1) > 0$

$9a^2 - 9a^2 - 1 > 0$ ну, хоть думал не надо...

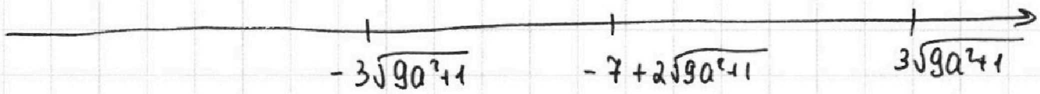
но блин, вы угараете что ли.

$21^2a^2 - 9\cdot 49a^2 - 49 > 0$

$9a^2 -$ ага, да, конечно

$D = 4\cdot 49^2 - 4\cdot 49(45 - 36a^2) = 4\cdot 49(49 - 45 + 36a^2) =$

$= 4\cdot 49(4 + 36a^2)$

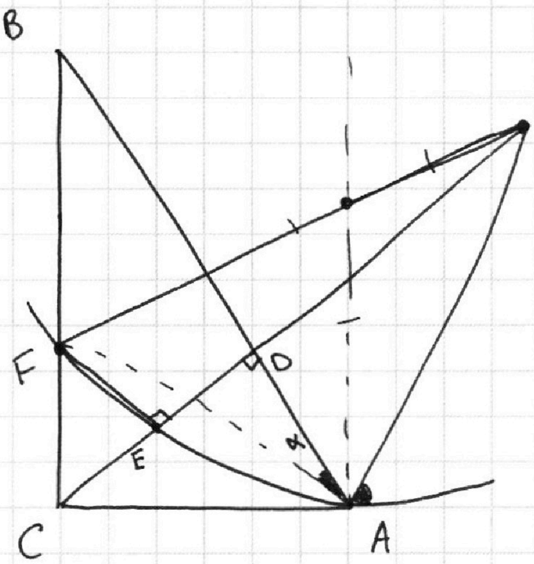


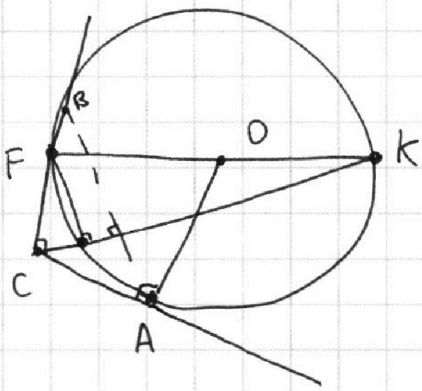
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

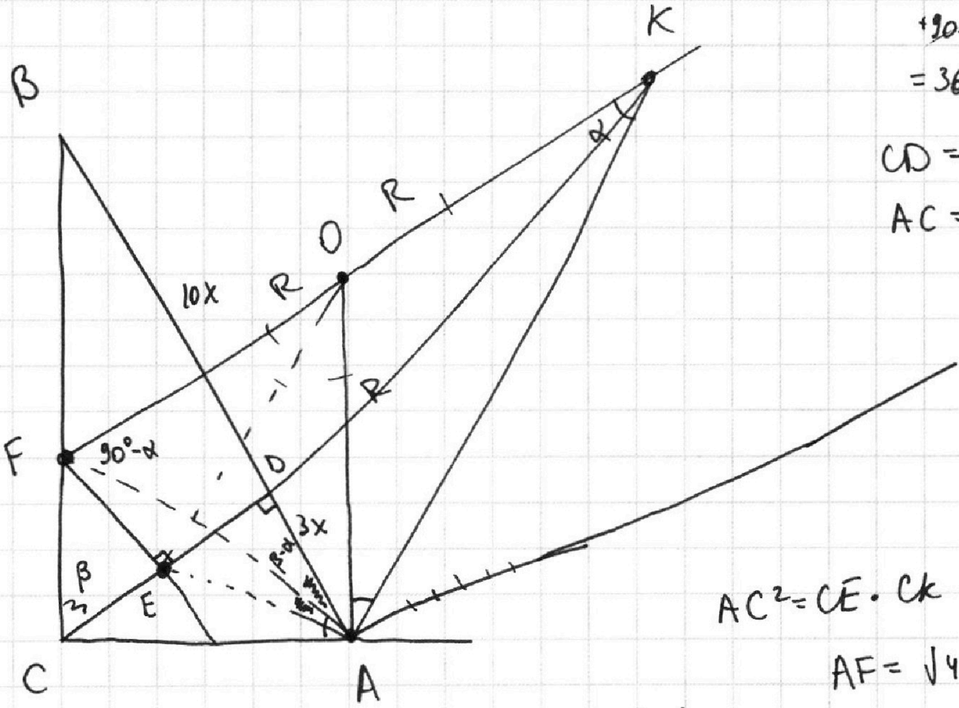
МФТИ





$180^\circ - \alpha + \cancel{2\alpha} + \beta - \cancel{\alpha} \cancel{+90}$
$\cancel{+90 - \alpha} = \cancel{180}$
$= 360 - \alpha + \beta$

$CD = x\sqrt{30}$
$AC = x\sqrt{39}$



$AC^2 = CE \cdot Ck$

$AF = \sqrt{4R^2 \cdot \sin^4\alpha}$

$AF = 2R\sin\alpha$

$CF = AF\sin\alpha = 2R\sin^2\alpha$

$\cancel{EF = 2R\sin\alpha}$

~~пусть CF = y~~

$\sin\beta =$

$\cancel{\frac{AD}{BD}} = \frac{AD}{AC} \cancel{= \frac{AD}{A}}$

$\frac{AD}{AC} = \sin\beta = \frac{3}{\sqrt{39}}$

$EF = CF\sin\beta$
$EC = CF\cos\beta$

$Ek^2 = \cancel{\sqrt{}}4R^2 - CF^2\sin^2\beta = 4R^2 - 4R^2 \cdot \sin^4\alpha \cdot \sin\beta$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

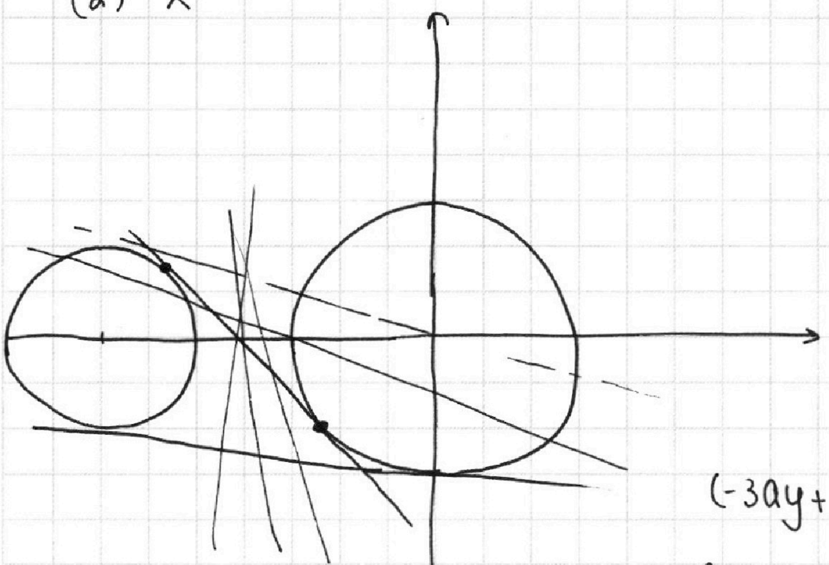
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

(4) $\begin{cases} x+3ay-7b=0 & (1) \\ (x^2+14x+y^2+45)(x^2+y^2-9)=0 & (2) \end{cases}$

Черновик

(2) X



если $a=0$, то прямая параллельна оси Oy =>
=> решений не больше 2-х
$\Downarrow$
$a\neq 0$

если $a>0$, то

можно просто тупо подставить и посмотреть

$(-3ay+7b+7)^2+y^2=4$

$9a^2y^2+49b^2+49-\underline{42aby}+14b-\underline{42ay}+y^2=4$

$(9a^2+1)y^2-42ay(b+1)+49b^2+14b+45=0$

a, для которых $\exists b$, что 2 решения

2 решения если $D>0$

$D=42^2a^2(b+1)^2-4(9a^2+1)\cdot(49b^2+14b+45)>0$

$21^2a^2b^2+21^2a^2\cdot 2b+21^2\cdot a^2-9\cdot 49a^2b^2+9\cdot 14a^2b+9\cdot 45a^2\ldots>0$

есть решение относительно b => при квадратном относительно b $D\geq 0$

выглядит как лютый кринж, в D будут мега страшные числа

21^2a^2

$49\cdot(9a^2+1))b^2+(2\cdot 21^2a^2-(9a^2+1)\cdot 14)b+\cancel{42}\,21^2a^2-(9a^2+1)\cdot 45>0$

~~а не, тут же всегда есть решения, так~~

2 случая: 1) коэф перед $b^2<0$ — кринж, нужен $D\geq 0$
2) коэф перед $b^2>0$ — кайфы, ничего не надо

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

3) $5\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$ ОДЗ: $-1 \le \sin x \le 1$ верно

Пусть $\arccos(\sin x) = \alpha$, $\alpha \in [0; \pi]$

$5\alpha \in [0; 5\pi]$

$0 \le \frac{3\pi}{2} + x \le 5\pi$

$-\frac{3\pi}{2} \le x \le \frac{10\pi - 3\pi}{2} = \frac{7\pi}{2}$

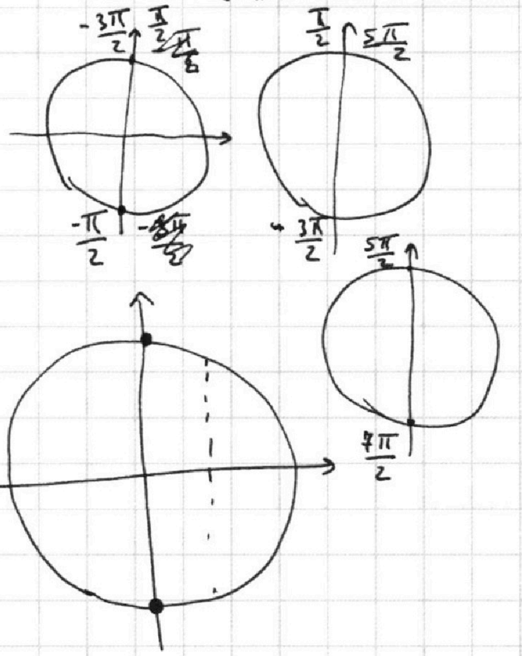
$\cancel{5\alpha = \frac{3\pi}{2} + x}$

$5\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)\right) = \frac{3\pi}{2} + x$

$\frac{5\pi}{2} - 5\arcsin(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$

$\pi = 5\arcsin(\sin x) + x$

$\arcsin(\sin x) + \arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2}$



$\beta = \arcsin(\sin x)$

$\sin\beta = \sin x$

$\left[\begin{array}{l} \beta = x + 2\pi k \\ \beta = \pi - x + 2\pi k \end{array}\right.$ $k \in \mathbb{Z}$

1) $\beta = x + 2\pi k$

$\pi = 5x + 10\pi k + x$

$6x = \pi - 10\pi k = \pi(1 - 10k)$

$-\frac{3\pi}{2} \le x = \frac{\pi(1-10k)}{6} \le \frac{7\pi}{2}$

$-9 \le 1 - 10k \le 21$

$-10 \le -10k \le 20$

$-20 \le 10k \le 10$

$-2 \le k \le 1$

$k = -2$: $x = \frac{\pi(1+20)}{6} = \frac{21\pi}{6}$

$\frac{21\pi}{6} > \frac{5\pi}{2}$

$21 > 15$

не ок

$k = -1$: $x = \frac{\pi(1+10)}{6} = \frac{11\pi}{6}$

$\frac{3\pi}{2} < \frac{11\pi}{6} < 2\pi$

$9\pi < 11\pi$ не ок

$k = 0$: $x = \frac{\pi}{6}$ ок

$k = 1$: $x = \frac{\pi - 10\pi}{6} = -\frac{9\pi}{6} = -\frac{3\pi}{2}$ ок

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\boxed{\text{Черновик}}$

1) $a, b, c \in \mathbb{N}$

$ab \vdots 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$ (1) Найти: $\min(abc)$ - ?

$bc \vdots 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$ (2)

$ac \vdots 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$ (3)

$ab = 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14} \cdot \cancel{k} x$

$43-15=33-5=28$

$a = \frac{2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14} \cdot \cancel{k} x}{b} \to (3)$ $\frac{c \cdot x}{b} \cdot 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14} = 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43} y$

$cx = by \cdot 2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^{28}$

$\cancel{b = }$ $c = \frac{by \cdot \ldots}{x}$

$\frac{b^2 y}{x} \cdot 2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^{28} = 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18} \cdot z$

$b^2 = \frac{\cancel{y} zx \cdot 2^6 \cdot 3^9}{y \cdot 5^{10}}$ кринж

~~Идея~~ $(1)\cdot(2)\cdot(3) \vdots 2^{34} \cdot 3^{43} \cdot 5^{75}$

$a^2b^2c^2$ - причём это квадрат, поэтому $abc \geq 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$

$a = 2^{\cancel{6}}$ $a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^{14}$

$b =$ $b = 2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^0$

$c = 2^{\cancel{8}}$ $c = 2^{10} \cdot 3^{10} \cdot 5^{29}$

$ac \vdots 5^{43} \Rightarrow abc \vdots 5^{43}$ $\frac{3\pi}{2} < \frac{11\pi}{6} < \frac{5\pi}{2}$

$43-14=29$

$9\pi < 11\pi < 15\pi$ верно

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задание 4

$$\begin{cases} x+3ay-7b=0 & (1) \\ (x^2+14x+y^2+45)(x^2+y^2-9)=0 & (2) \end{cases}$$

найти a, для которых $\exists b$, при котором система имеет ровно 4 решения

(2) $(x^2+14x+y^2+45)(x^2+y^2-9)=0$

$$\left[\begin{array}{l} x^2+14x+49+y^2=4 \\ x^2+y^2=9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x+7)^2+y^2=2^2 \\ x^2+y^2=3^2 \end{array}\right.$$

$(x+7)^2+y^2=2^2$ – окружность с центром в $(-7;0)$ и радиусом 2

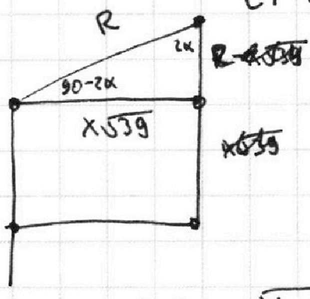
$x^2+y^2=3^2$ – окружность с центром в $(0;0)$ и радиусом 3

(1) $x=-3ay+7b$

Черновик

$EC\cdot(EC+Ek)=AC^2=x^2\cdot 39$

$CF\cos\beta(CF\cos\beta+\sqrt{4R^2}-$



$180^\circ-2\alpha-90^\circ=90^\circ-2\alpha$

$x\sqrt{39}=R\sin 2\alpha=$

$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}$

$\sin 2\alpha=1-co$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задание 6

Пусть $F(A) = x$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!