



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^7 3^{11} 5^{14}$ ,  $bc$  делится на  $2^{13} 3^{15} 5^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{14} 3^{17} 5^{43}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1,3$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-17;68)$ ,  $Q(2;68)$  и  $R(19;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что  $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 60,  $SA = BC = 10$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 3$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 4.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1.

$$a, b, c \in \mathbb{N}$$

$$\text{Пусть } \begin{cases} ab = 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14} \cdot x \\ bc = 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18} \cdot y \\ ac = 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43} \cdot z \end{cases} \quad x, y, z \in \mathbb{N}$$

$$\text{Тогда } (abc)^2 = 2^{34} \cdot 3^{43} \cdot 5^{75} \cdot x \cdot y \cdot z$$

$$\text{Так как } a, b, c, x, y, z \in \mathbb{N}, \text{ то } (abc): 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$$

$$\text{при этом } ac: 5^{43} \Rightarrow abc: 5^{43} \Rightarrow (abc): 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$$

Значит, наименьшее значение  $(abc)$  равно  $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

Приведём пример таких чисел  $a, b, c$ :

$$a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^{14}$$

$$b = 2^3 \cdot 3^5$$

$$c = 2^{10} \cdot 3^{10} \cdot 5^{29}$$

$$\text{Тогда } ab = 2^7 \cdot 3^{12} \cdot 5^{14} : 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$$

$$bc = 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{29} : 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$$

$$ac = 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43} : 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$$

Таким образом, наименьшее значение  $abc$  равно  $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

Ответ:  $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

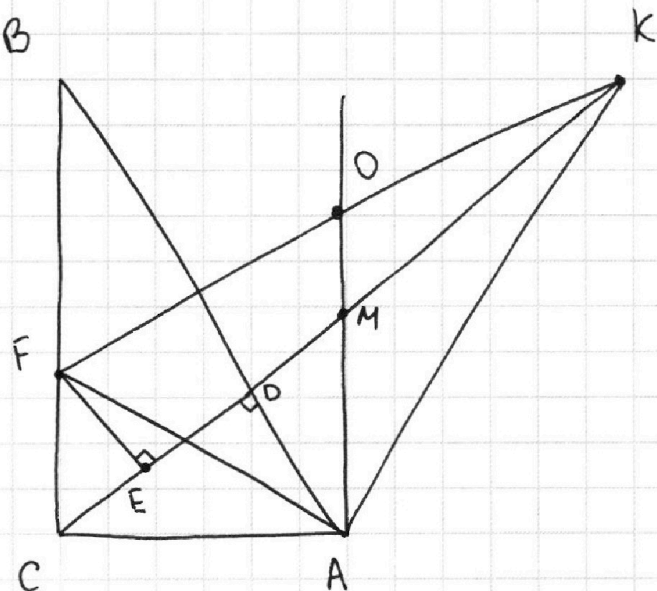
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



## Задача 2



Пусть центр окружности - точка  $O$ . Из  $FE \parallel BD$   $\angle FED = 90^\circ$ ,  
проведём диаметр окружности  $FK$ .  $\angle FAK = 90^\circ$ ,  $OA \perp AC$ .

Пусть  $OA \cap CK = M$ .  $OM \parallel BC$ ,  $OF = OK \Rightarrow OM$  - средняя линия в  $FCK$ .  $\Rightarrow$

$\Rightarrow CM = MK$ . Пусть  $AD = 3x$ , тогда  $BD = 10x$ .  $CD^2 = 3x \cdot 10x \Rightarrow$

$\Rightarrow CD = x\sqrt{30}$ .  $AC^2 = 30x^2 + 9x^2 \Rightarrow AC = x\sqrt{39}$ .

Пусть  $\triangle ACM$  ( $\angle CAM = 90^\circ$ ,  $AD$  - высота):  $AD^2 = CD \cdot DM \Rightarrow$

$$\Rightarrow DM = \frac{9x^2}{x\sqrt{30}} = \frac{9x}{\sqrt{30}}$$

$$CK = 2CM = 2(CD + DM) = 2\left(x\sqrt{30} + \frac{9x}{\sqrt{30}}\right) = 2 \cdot \frac{39x}{\sqrt{30}}$$

Запишем степень точки  $C$  относительно окружности:

$$CE \cdot CK = AC^2 \Rightarrow CE = \frac{AC^2}{CK} = \frac{(x\sqrt{39})^2}{39x \cdot 2} \cdot \sqrt{30} = \frac{x\sqrt{30}}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1    2    3    4    5    6    7  
                 

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

### Задача 2 (Продолжение)

~~СР~~ Заметим, что  $CE = CD : 2 \Rightarrow$  так как  $FE \parallel BD$ , то

$FE$  — средняя линия  $\triangle BCD \Rightarrow EF = \frac{1}{2} BD = 5x$

Тогда  $S_{CEEF} = \frac{1}{2} CE \cdot FE = \frac{1}{2} \cdot \frac{x\sqrt{30}}{2} \cdot 5x = \frac{5x^2\sqrt{30}}{4}$

$S_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot x\sqrt{30} \cdot 3x = \frac{3x^2\sqrt{30}}{2}$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEEF}} = \frac{3x^2\sqrt{30} \cdot 4}{2 \cdot 5x^2\sqrt{30}} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5} = 1,2$$

Ответ: 1,2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

### Задача 3 (продолжение)

$$4) x \in \left[ \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2} \right] \Rightarrow \arcsin(\sin x) = x - 2\pi$$

$$\pi = 5(x - 2\pi) + x$$

$$\frac{3\pi}{2} < \frac{11\pi}{6} < \frac{5\pi}{2}$$

верно

$$6x = 11\pi$$

$$x = \frac{11\pi}{6}$$

$$5) x \in \left[ \frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2} \right] \Rightarrow \arcsin(\sin x) = 3\pi - x$$

$$\pi = 5(3\pi - x) + x$$

$$4x = 14\pi$$

$$x = \frac{7\pi}{2}$$

Таким образом,  $x \in \left\{ -\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \pi; \frac{11\pi}{6}; \frac{7\pi}{2} \right\}$

Преобразования были равносильными, поэтому найденные решения подходят.

Ответ:  $-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \pi, \frac{11\pi}{6}, \frac{7\pi}{2}$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

**Задача 3**  $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$  ОДЗ:  $-1 \leq \sin x \leq 1$  верно

$$\arccos(\sin x) \in [0; \pi] \Rightarrow 5 \arccos(\sin x) \in [0; 5\pi]$$

Тогда  $0 \leq \frac{3\pi}{2} + x \leq 5\pi$

$$-\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{10\pi - 3\pi}{2} = \frac{7\pi}{2}$$

$$\arccos(\sin x) + \arcsin(\sin x) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)$$

$$5\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)\right) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\frac{5\pi}{2} - \frac{3\pi}{2} = 5 \arcsin(\sin x) + x$$

$$\pi = 5 \arcsin(\sin x) + x$$

Разберём несколько случаев:

1)  $x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \arcsin(\sin x) = -x - \pi$

$$\pi = 5(-x - \pi) + x$$

$$4x = -6\pi$$

$$x = -\frac{3\pi}{2}$$

2)  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \arcsin(\sin x) = x$

$$\pi = 5x + x$$

$$x = \frac{\pi}{6}$$

3)  $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right] \Rightarrow \arcsin(\sin x) = \pi - x$

$$\pi = 5(\pi - x) + x$$

$$4x = 4\pi \Rightarrow x = \pi$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4 (продолжение)

$$b^2 < \frac{9(9a^2+1)}{49}$$

$$b \in \left( \frac{-3\sqrt{9a^2+1}}{7}; \frac{3\sqrt{9a^2+1}}{7} \right) \quad (*)$$

для всех  $a$

2) Подставим (1) в (2), должно быть ровно 2 решения

$$(-3ay + 7b + 7)^2 + y^2 - 4 = 0$$

$$(9a^2y + 1)y^2 - 2(21ab + 21a)y + 49b^2 + 2 \cdot 49b + 45 = 0$$

$$D = 4(21ab + 21a)^2 - 4(9a^2 + 1)(49b^2 + 2 \cdot 49b + 45) > 0$$

$$(21^2a^2 - 49(9a^2+1))b^2 + (2 \cdot 21^2a^2 - 2 \cdot 49(9a^2+1))b + 21^2a^2 - 45(9a^2+1) > 0$$

$$(21^2a^2 - 21^2a^2 - 49)b^2 + 2(21^2a^2 - 21^2a^2 - 49)b + 21^2a^2 - 49(9a^2+1) + 4(9a^2+1) > 0$$

$$49b^2 + 2 \cdot 49b + 49 - 4(9a^2+1) < 0$$

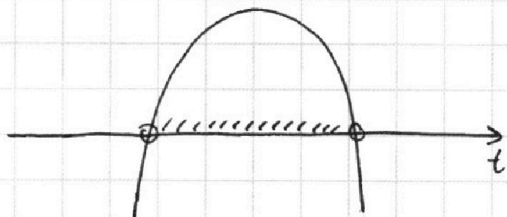
$$49b^2 + 2 \cdot 49b - 36a^2 + 45 < 0$$

Заменим  $7b$  на  $t$ , тогда  $t^2 + 14t - 36a^2 + 45 < 0$  должно иметь

решения относительно  $t$ , причём из (\*) решения на  $(-3\sqrt{9a^2+1}; 3\sqrt{9a^2+1})$

$f(t) = t^2 + 14t - 36a^2 + 45$  парабола с ветвями вверх,  $t_0 = -7$

$$\begin{aligned} D &= 14^2 - 4(45 - 36a^2) = \\ &= 4(49 - 45 + 36a^2) = \\ &= 4(4 + 36a^2) = 4^2(9a^2 + 1) \end{aligned}$$



$$t \in (-7 - 2\sqrt{9a^2+1}; -7 + 2\sqrt{9a^2+1})$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases} \quad (\Rightarrow)$$

$$(\Rightarrow) \begin{cases} x = -3ay + 7b & (1) \\ (x^2 + 7)^2 + y^2 - 4 = 0 & (2) \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 & (3) \end{cases}$$

(1) - линейная зависимость, (2) и (3) - квадратичные. каждое из

(2) и (3) может дать не более 2-х решений (подставляем в них (1)), ~~и~~

всего решений должно быть 4  $\Rightarrow$  они имеют по 2 решения.

Заметим, что (2) - окружность с центром в  $(-7; 0)$  и радиусом 2,

(3) - окружность с центром в  $(0; 0)$  и радиусом 3, они не пересекаются,

поэтому решения в (2) и (3) не совпадают.

1) подставляем (1) во (2), должно быть ровно 2 решения

$$(7b - 3ay)^2 + y^2 - 9 = 0$$

$$(9a^2 + 1)y^2 - 42aby + 49b^2 - 9 = 0$$

$$D = 42^2 \cdot a^2 b^2 - 4(9a^2 + 1) \cdot (49b^2 - 9) > 0$$

$21^2 a^2 b^2 - (9a^2 + 1) \cdot (49b^2 - 9) > 0$  должно существовать  $b$ , что неравенство  
выполнено. Рассмотрим как квадратное

$$(21^2 a^2 - 9 \cdot 49 a^2 - 49)b^2 + 9(9a^2 + 1) > 0 \quad \text{относительно } b$$

$$\text{т.е. } 49b^2 < 9(9a^2 + 1)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4 (продолжение - 2)

$(-7 - 2\sqrt{9a^2+1}; -7 + 2\sqrt{9a^2+1})$  и  $(-3\sqrt{9a^2+1}; 3\sqrt{9a^2+1})$  должны иметь хотя бы одну общую точку

1 случай:

$$-7 + 2\sqrt{9a^2+1} < 3\sqrt{9a^2+1}, \text{ так как}$$

$$-7 + 2\sqrt{9a^2+1} > 3\sqrt{9a^2+1}$$

$$\sqrt{9a^2+1} > -7$$

$$\sqrt{9a^2+1} < -7$$

тогда должно выполняться

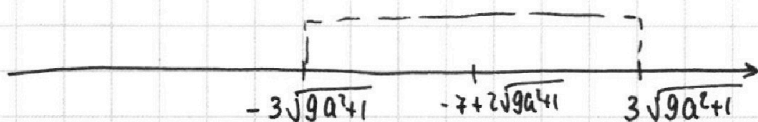
$$-7 + 2\sqrt{9a^2+1} > -3\sqrt{9a^2+1}$$

$$5\sqrt{9a^2+1} > 7$$

$$9a^2+1 > \frac{49}{25}$$

$$9a^2 > \frac{24}{25}$$

$$a^2 > \frac{24}{25 \cdot 9} \Rightarrow a \in (-\infty; -\frac{\sqrt{24}}{15}) \cup (\frac{\sqrt{24}}{15}; +\infty)$$



при  $a \in (-\infty; -\frac{\sqrt{24}}{15}) \cup (\frac{\sqrt{24}}{15}; +\infty)$  интервалы  $(-3\sqrt{9a^2+1}; 3\sqrt{9a^2+1})$

и  $(-7-2\sqrt{9a^2+1}; -7+2\sqrt{9a^2+1})$  будут иметь хотя бы одну общую

точку, которую можно приравнять  $t = 7b \Rightarrow$  будет существовать

$b$ , что система уравнения (2) и (3) (при подстановке (1)) будут иметь по

2 несовпадающих решения  $\Rightarrow$  система имеет ровно 4 решения.

$$\text{Ответ: } a \in (-\infty; -\frac{\sqrt{24}}{15}) \cup (\frac{\sqrt{24}}{15}; +\infty).$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5 (продолжение 2)

минимум  $g(a)$  в точке  $a = -\left(\frac{7}{8}\right)^{\frac{1}{5}}$  и равен

$$\frac{2 \cdot \left(-\frac{7}{8}\right)^{\frac{2}{5}} - 8 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^{\frac{1}{5}} - 7}{-2 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^{\frac{1}{5}}} > 0 \Rightarrow g(a) > 0 \Rightarrow f(t) > 0$$

тогда  $f(6x) = 0$  и  $f(y) = 0$  не имеет решений

Ответ: таких  $x$  и  $y$  не существует.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



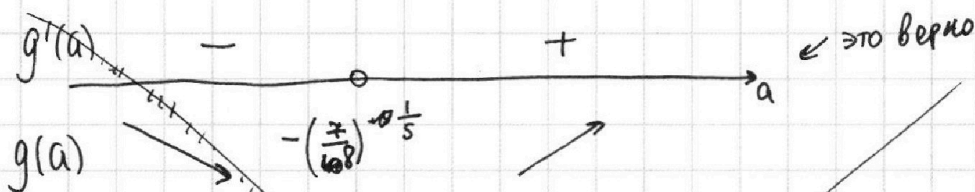
### Задача 5 (продолжение)

$$f_1(a) = 2a^5 + 8a - 7$$

$$f_1'(a) = 10a^4 + 8 > 0 \Rightarrow f_1(a) \uparrow$$

Пусть  $f_1(a) = 0$  имеет корень  $a_0$ . Он единственный в силу  
монотонности  $f_1(a)$  и  $\epsilon > 0$ , так как  $f_1(0) < 0$ .

$$g'(a) = \frac{(10a^4 + 8) \cdot 2a - 2(2a^5 + 8a - 7)}{4a^2} =$$
$$= \frac{20a^5 + 16a - 4a^5 - 16a + 14}{4a^2} = \frac{10a^5 + 14}{4a^2} = \frac{5a^5 + 7}{2a^2}$$



минимум  $g(a)$  равен  $g\left(-\left(\frac{7}{10}\right)^{\frac{1}{5}}\right) = \frac{2 \cdot \frac{-7}{10} - 8 \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^{-\frac{1}{5}} - 7}{-2 \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^{-\frac{1}{5}}} > 0$

тогда  $g(a) > 0 \Rightarrow f_1(a) > 0 \Rightarrow f_1(x) = 0$  и  $f_1(y) = 0$  не имеет  
решений

Ответ: таких  $x$  и  $y$  не существует.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



### Задача 5

$$\begin{cases} \log_7^y(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4 \\ \log_7^y y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^9) - 4 \end{cases}$$

Найти:  $xy$

ОДЗ:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{6} \\ x \neq -\frac{1}{6} \\ y > 0 \\ y \neq \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{6} \\ y > 0 \\ y \neq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_7^y(6x) - \frac{2}{\log_7(6x)} = \frac{3}{\log_7(6x) \cdot 2} - 4 \\ \log_7^y y + \frac{6}{\log_7 y} = \frac{5}{\log_7 y \cdot 2} - 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_7^y(6x) - \frac{7}{2 \log_7(6x)} + 4 = 0 \\ \log_7^y y - \frac{7}{2 \log_7 \frac{6x}{y}} + 4 = 0 \end{cases}$$

~~$$f(t) = \log_7^y t - \frac{7}{2 \log_7 t} + 4 = 0$$~~

$$f(t) = \log_7^y t - \frac{7}{2 \log_7 t} + 4 = 0$$

Тогда система имеет вид

$$\begin{cases} f(6x) = 0 \\ f(y) = 0 \end{cases}$$

Проанализируем  $f(t)$ :

Пусть  $\log_7 t = a$ , тогда  $g(a) = a^4 - \frac{7}{2a} + 4 = \frac{2a^5 + 8a - 7}{2a}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$$

$$f(x_2) - f(x_1) = f(A) - f(B) = 40$$

$$f(A) = 4x_1 + y_1$$

$$t^4 - \frac{7}{2}t + 4 = 0$$

$$f(t) = 2t^4 - 7t + 8 = 0$$

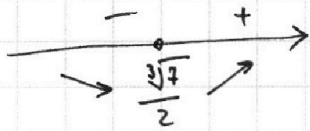
$$f'(t) = 8t^3 - 7$$

Близи, это же  $t^4 - \frac{7}{2}t + 4 = 0$

$$\frac{2t^5 - 7 + 8t}{2t} = 0$$

$$f(t) = 2t^5 + 8t - 7 = 0$$

$$f'(t) = 10t^4 + 8 > 0$$



$$f(t) \geq f\left(\frac{7}{2}\right) = 2 \cdot \frac{7 \cdot 7^{\frac{1}{3}}}{16} - 7 \cdot \frac{7 \cdot 7^{\frac{1}{3}}}{2} + 8 = -\frac{7 \cdot 7^{\frac{1}{3}} \cdot 3}{8} + 8 =$$

$$= \frac{64 - 21\sqrt[3]{7}}{8}$$

$$64 \cup 21\sqrt[3]{7}$$

$$64^3 \cup 21^3 \cdot 7 = 21^3 \cdot 3 + 21^3 \cdot 3 + 21^3$$

$$64 \geq 64^3 > 24^3 \cdot 8 \quad | : 8^3$$

$$8^3 > 4^3 \cdot 8 = 8 \cdot 4 \cdot 8 \quad \text{юкх}$$

Крестик

$$g(a) \geq$$



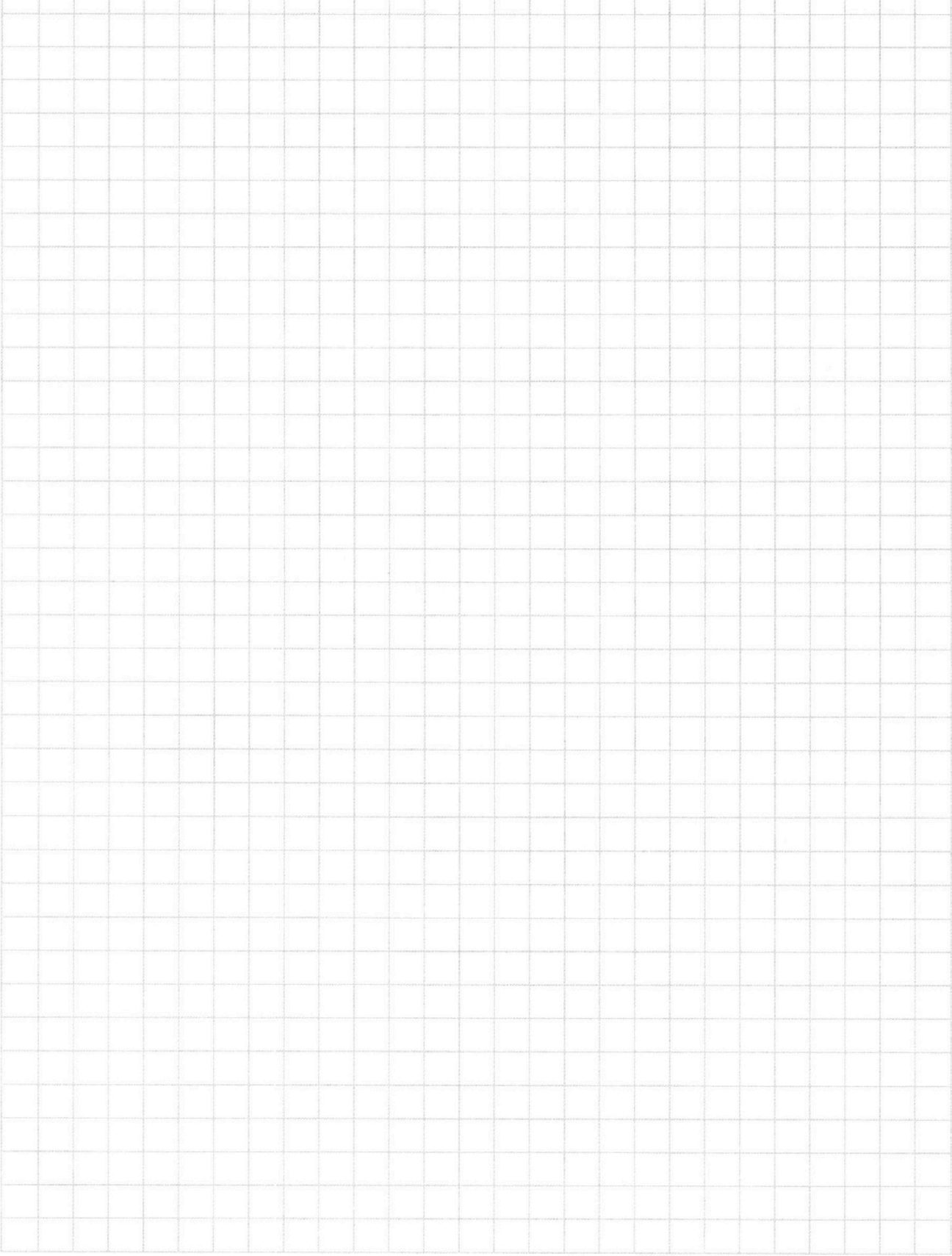
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

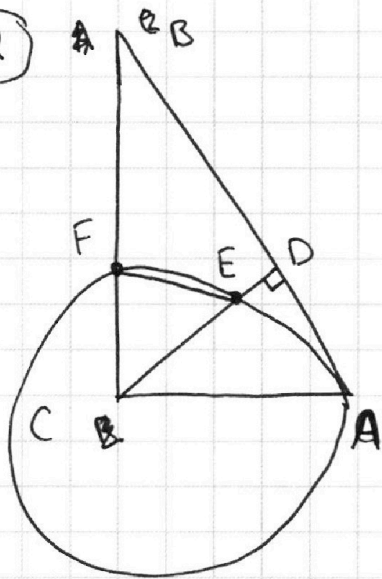
- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

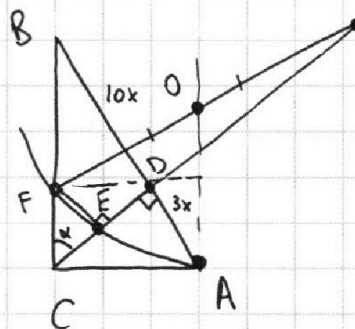


2



$$\frac{AB}{BD} = 1,3 = \frac{10}{13} = \frac{13}{10}$$

$$AD = 3x, BD = 10x$$



$$CF = y$$

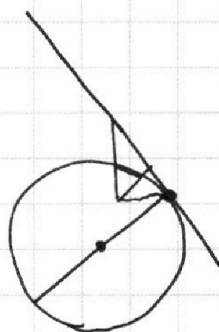
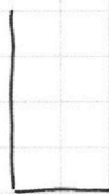
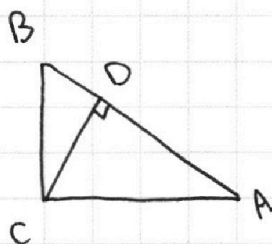
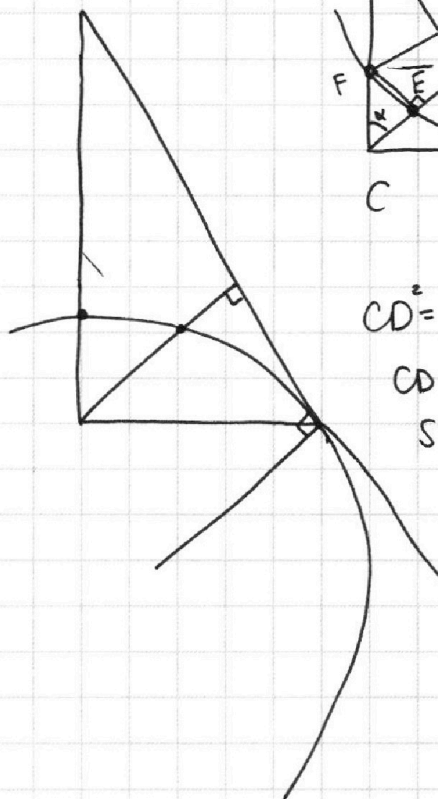
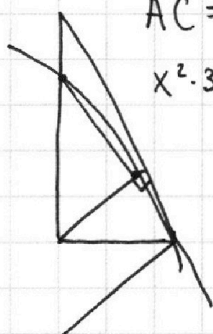
$$AC = \sqrt{30x^2 + 9x^2} = x\sqrt{39}$$

$$x^2 \cdot 39 +$$

$$CD^2 = 3x \cdot 10x = x^2 \cdot 30$$

$$CD = x\sqrt{30}$$

$$S_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot x\sqrt{30} \cdot 3x = \frac{3x^2\sqrt{30}}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$21^2 a^2 - 7^2(9a^2 + 1) > 0$$

$$9a^2 - 9a^2 - 1 > 0 \text{ ну, ладно думал не надо...}$$

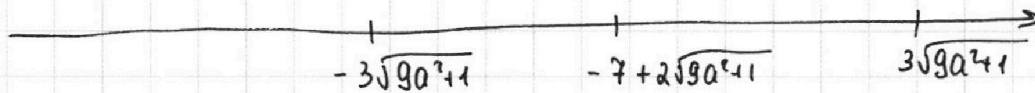
но блин, вы узнаете что ли.

---

$$21^2 a^2 - 9 \cdot 49 a^2 - 49 > 0$$

$$9a^2 - 49a^2 - 49, \text{ конечно}$$

$$D = 4 \cdot 49^2 - 4 \cdot 49(45 - 36a^2) = 4 \cdot 49(49 - 45 + 36a^2) =$$
$$= 4 \cdot 49(4 + 36a^2)$$





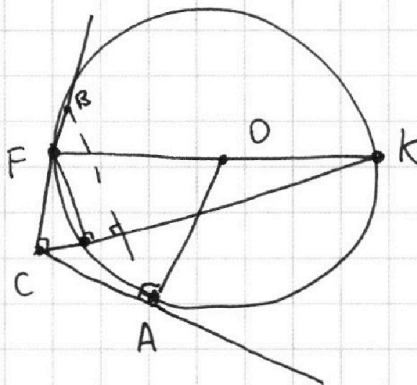
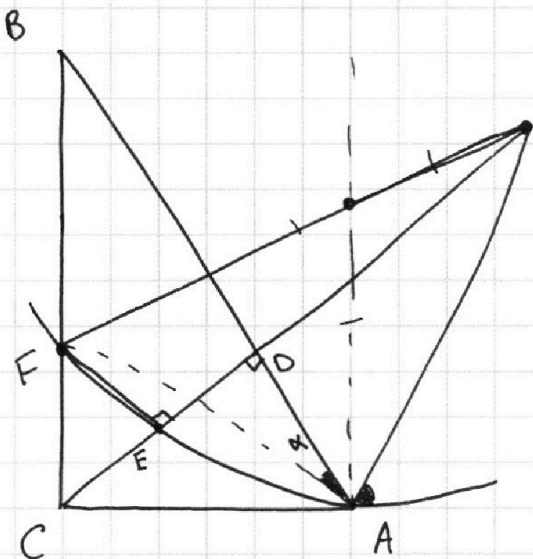
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



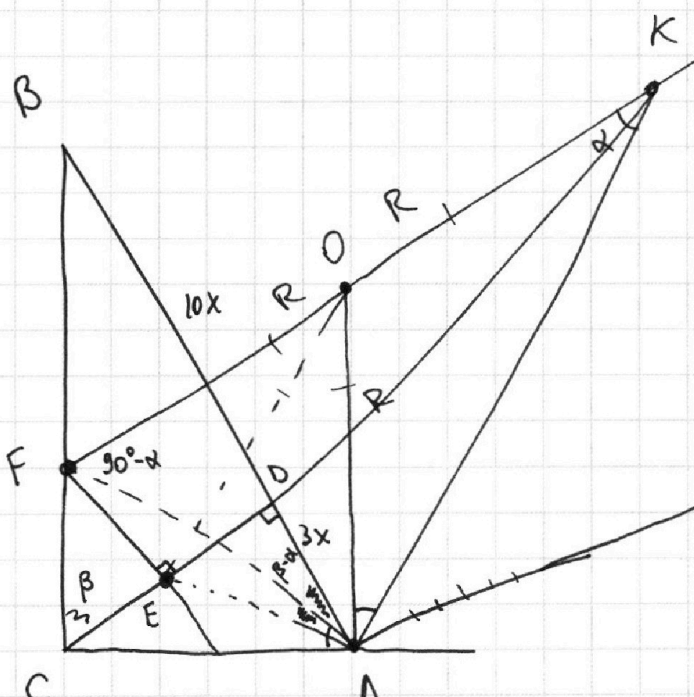
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$180^\circ - \alpha + 2\alpha + \beta - \alpha + 90^\circ + 90^\circ - \alpha = 180^\circ \rightarrow = 360^\circ - \alpha + \beta$$

$$CD = x\sqrt{30}$$

$$AC = x\sqrt{39}$$



$$AC^2 = CE \cdot CK$$

$$AF = \sqrt{4R^2 \sin^2 \alpha}$$

$$AF = 2R \sin \alpha$$

$$CF = AF \sin \alpha = 2R \sin^2 \alpha$$

$$EF = 2R \sin \alpha$$

$\frac{AD}{BC} = \frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AF}$ 
 $\frac{AD}{AC} = \sin \beta = \frac{3}{\sqrt{39}}$ 
 $EK^2 = 4R^2 - CF^2 \sin^2 \beta = 4R^2 - 4R^2 \cdot \sin^4 \alpha \cdot \sin^2 \beta$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4

$$x + 3ay - 7b = 0 \quad (1)$$

Черновик

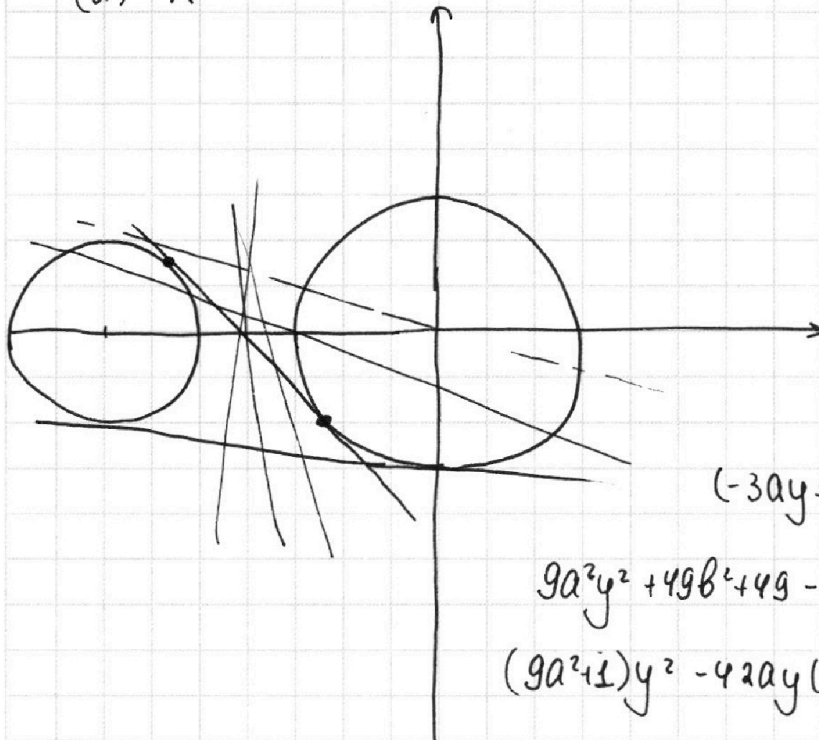
$$(x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \quad (2)$$

(2) x

если  $a = 0$ , то прямая  
параллельна оси  $Oy \Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  решений не больше 2-х  
 $\Downarrow$   
 $a \neq 0$

если  $a > 0$ , то

можно просто тут подставить  
и посмотреть



$$(-3ay + 7b + 7)^2 + y^2 = 4$$

$$9a^2y^2 + 49b^2 + 49 - 42aby + 14b - 42ay + y^2 = 4$$

$$(9a^2 + 1)y^2 - 42ay(b + 1) + 49b^2 + 14b + 45 = 0$$

$a$ , для которых  $\exists b$ , что 2 решения  
а решения если  $D > 0$

$$D = 42^2 a^2 (b + 1)^2 - 4(9a^2 + 1)(49b^2 + 14b + 45) > 0$$

$$21^2 a^2 b^2 + 21^2 a^2 \cdot 2b + 21^2 \cdot a^2 - 9 \cdot 49 a^2 b^2 + 9 \cdot 14 a^2 b + 9 \cdot 45 a^2 \dots > 0$$

есть решение относительно  $b \Rightarrow$  при квадратном относительно  $b$   $D \geq 0$

$(21^2 a^2)$  выглядит как лютий криж, в  $D$  будут мега страшные числа

$$49 \cdot (9a^2 + 1)b^2 + (2 \cdot 21^2 a^2 - (9a^2 + 1) \cdot 14)b + 42^2 21^2 a^2 - (9a^2 + 1) \cdot 45 > 0$$

а не, тут же всегда есть решение, так

2 случая: 1) коэф перед  $b^2 < 0$  - криж, нужен  $D \geq 0$

2) коэф перед  $b^2 > 0$  - кайри, ничего не надо

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3)  $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$

ОДЗ:  $-1 \leq \sin x \leq 1$  верно

Пусть  $\arccos(\sin x) = \alpha$ ,  $\alpha \in [0; \pi]$

$5\alpha \in [0; 5\pi]$

$0 \leq \frac{3\pi}{2} + x \leq 5\pi$

$-\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{10\pi - 3\pi}{2} = \frac{7\pi}{2}$

$5\alpha = \frac{3\pi}{2} + x$

$5(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)) = \frac{3\pi}{2} + x$

$\frac{5\pi}{2} - 5 \arcsin(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$

$\pi = 5 \arcsin(\sin x) + x$

β = arcsin(sin x)

sin β = sin x

$\beta = x + 2\pi k$   $k \in \mathbb{Z}$   
 $\beta = \pi - x + 2\pi k$

1)  $\beta = x + 2\pi k$

$\pi = 5x + 10\pi k + x$

$6x = \pi - 10\pi k = \pi(1 - 10k)$

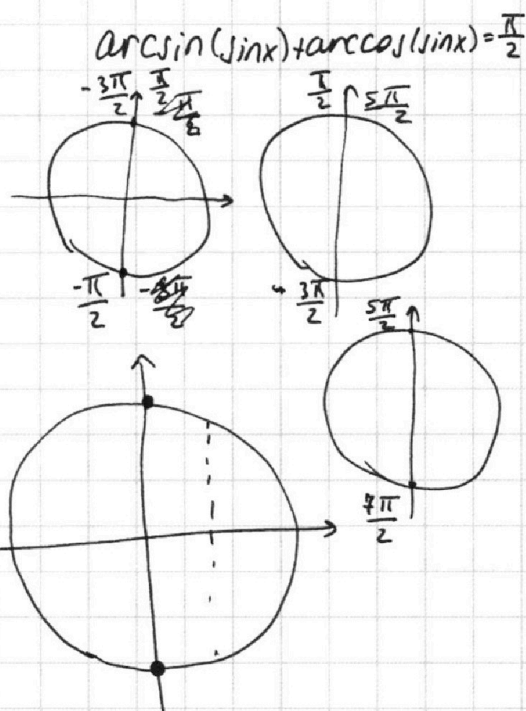
$-\frac{3\pi}{2} \leq x = \frac{\pi(1 - 10k)}{6} \leq \frac{7\pi}{2}$

$-9 \leq 1 - 10k \leq 21$

$-10 \leq -10k \leq 20$

$-20 \leq 10k \leq 10$

$-2 \leq k \leq 1$



$k = -2: x = \frac{\pi(1 + 20)}{6} = \frac{21\pi}{6}$

$\frac{21\pi}{6} > \frac{5\pi}{2}$

$21 > 15$

не ОК

$k = -1: x = \frac{\pi(1 + 10)}{6} = \frac{11\pi}{6}$

$\frac{3\pi}{2} < \frac{11\pi}{6} < 2\pi$

$9\pi < 11\pi$  не ОК

$k = 0: x = \frac{\pi}{6}$  ОК

$k = 1: x = \frac{11\pi - 9\pi}{6} = -\frac{2\pi}{6}$

$= -\frac{3\pi}{2}$  ОК

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



**Черновик**

1)  $a, b, c \in \mathbb{N}$

$ab : 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^{14}$  (1)

$bc : 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$  (2)

$ac : 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$  (3)

Найти:  $\min(abc) - ?$

$ab = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^{14} \cdot \frac{1}{2} x$

$a = \frac{2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^{14} \cdot \frac{1}{2} x}{b} \rightarrow (3) \frac{c \cdot x}{b} \cdot 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^{14} = 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43} y$

$43 - 15 = 33 - 5 = 28$

$cx = by \cdot 2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^{28}$

$b = \frac{cx}{a} \quad c = \frac{by \cdot \dots}{x}$

$\frac{b^2 y}{x} \cdot 2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^{28} = 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18} \cdot 2$

$b^2 = \frac{y \cdot 2^6 \cdot 3^9}{y \cdot 5^{10}}$  *кривж*

Идея (1)·(2)·(3) :  $2^{34} \cdot 3^{43} \cdot 5^{75}$

$a^2 b^2 c^2$  - причём это квадрат, поэтому  $abc \geq 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$

$a = 2^8$   
 $b = 2^8$   
 $c = 2^8$

$a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^{14}$

$b = 2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^0$

$c = 2^{10} \cdot 3^{10} \cdot 5^{29}$

$ac : 5^{43} \Rightarrow abc : 5^{43}$

$43 - 14 = 29$

$\frac{3\pi}{2} < \frac{11\pi}{6} < \frac{5\pi}{2}$

$9\pi < 11\pi < 15\pi$  верно

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4

$$x + 3ay - 7b = 0 \quad (1)$$

$$(x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \quad (2)$$

найти  $a, b$ , для  
которых  $\exists b$ , при  
котором система  
имеет ровно 4  
решения

$$(2) (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0$$

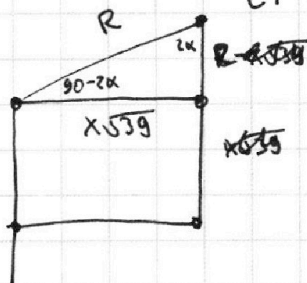
$$\begin{cases} x^2 + 14x + 49 + y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+7)^2 + y^2 = 2^2 \\ x^2 + y^2 = 3^2 \end{cases}$$

- окружность с центром в  $(-7; 0)$  и радиусом 2  
и радиусом 3

$$(1) x = -3ay + 7b$$

Черновик

$$EC \cdot (EC + EK) = AC^2 = x^2 \cdot 39$$



$$CF \cos \beta (CF \cos \beta + \sqrt{4R^2 -$$

$$180^\circ - 2\alpha - 90^\circ = 90^\circ - 2\alpha$$

$$x\sqrt{39} = R \sin 2\alpha =$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

$$\sin 2\alpha = 1 - \cos$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6

Пусть  $F(A) = \times$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

