МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 13

1. [3 балла] В прямоугольном треугольнике длины катетов равны $|2x-2|$ и $|x^2+3x|$, а длина гипотенузы равна $|3x+1|$. Найдите x.

2. [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x\sqrt{8}+y\sqrt{18}+z\sqrt{29}=\sqrt{32}+\sqrt{116}$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2-y^2+z^2$.

3. [4 балла] Назовём числа *хорошими*, если они представимы в виде $a(a+1)$, где $a\in\mathbb{N}$. Найдите количество пар хороших чисел, разность которых равна $81\cdot 10^{2024}$.

4. [5 баллов] Решите неравенство

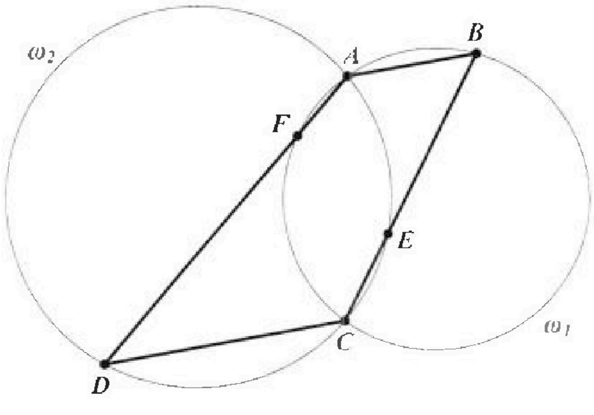
$$\frac{1}{\sqrt{4x-x^2-3}-3}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}-\sqrt{x^2+x-2}}.$$

5. [5 баллов] Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность с центром O, а AA_1 и BB_1 – его высоты. Найдите расстояние от точки O до стороны AC, если $AB_1=6$ и площадь треугольника OBA_1 равна 6.

6. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}x^2-2xy+y^3-3y^2-1=0,\\ 2x-xy-y^3+5y^2-3y+2=0.\end{cases}$$

7. [6 баллов] Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD ($AB<CD$). Окружность ω_1, описанная около треугольника ABC, повторно пересекает сторону AD в точке F, а окружность ω_2, описанная около треугольника ACD, повторно пересекает сторону BC в точке E (точки E и F расположены так, как показано на рисунке). Найдите отношение длин отрезков AF и CE, если отношение радиуса окружности ω_1 к радиусу окружности ω_2 равно $1:2$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№1 По т. Пифагора $(2x-2)^2+(x^2+3x)^2=(3x+1)^2$

$4(x^2-2x+1)+x^2(x^2+6x+9)=9x^2+6x+1$

$4x^2-8x+4+x^4+6x^3+9x^2=9x^2+6x+1$

$x^4+6x^3+4x^2-14x+3=0.$

Заметим, что $x=1$ корень, тогда $(x-1)(x^3+7x^2+11x-3)=0$

Теперь заметим, что $x=-3$ - корень второй скобки $\Rightarrow$

$(x-1)(x+3)(x^2+4x-1)=0$. Очевидно $x=1$, $x=-3$

не подходят. т.к при $x=1 \rightarrow$ первый катет $=0$, а

при $x=-3$ - второй $=0$. Проверим x, удовл.

$x^2+4x-1=0$, т.е $x=-2\pm\sqrt{5}$.

1) По нер-ву треугольника $|2x-2|+|x^2+3x|>|3x+1|$.

Если $x=-2-\sqrt{5}$: $2|-3-\sqrt{5}|+|-2-\sqrt{5}|\cdot|1-\sqrt{5}|=$

$=2(\sqrt{5}+3)+(2+\sqrt{5})(\sqrt{5}-1)=2\sqrt{5}+6+2\sqrt{5}+5-2-\sqrt{5}=$

$=9+3\sqrt{5}>|3\cdot(-2+\sqrt{5})+1|=|-6-3\sqrt{5}+1|=5+3\sqrt{5}.$

Значит $x=-2-\sqrt{5}$ подходит. Проверим $x=-2+\sqrt{5}$.

$2|\sqrt{5}-3|+|\sqrt{5}-2|\cdot|\sqrt{5}+1|=2(3-\sqrt{5})+(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+1)=6-2\sqrt{5}+$

$+5-2\sqrt{5}+\sqrt{5}-2=9-3\sqrt{5}>|3(\sqrt{5}-2)+1|=|3\sqrt{5}-6+1|=$

$=|3\sqrt{5}-5|=3\sqrt{5}-5$. $9-3\sqrt{5}>3\sqrt{5}-5$; $\underset{=\sqrt{196}}{14}>\sqrt{180}$

Ответ: $-2+\sqrt{5}$; $-2-\sqrt{5}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$x\sqrt{8} + y\sqrt{18} + z\sqrt{29} = \sqrt{32} + \sqrt{116} = 2(\sqrt{8} + \sqrt{29})$ №2

Ясно, что т.к. $\{x, y, z\} \subset \mathbb{Z}$, то $x\sqrt{8} + y\sqrt{18} + z\sqrt{29}$ $= k\sqrt{8} + t\sqrt{18} + r\sqrt{29}$. Поэтому $x = 2$, $y = 0$, $z = 2$

$\Rightarrow x^2 - y^2 + z^2 = 4 + 4 - 0 = 8$

Ответ: 8

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№3

$a(a+1) = n$, $b(b+1) = m$. Пусть $a > b$.

$n - m = 81 \cdot 10^{2024} \Rightarrow a(a+1) - b(b+1) = 81 \cdot 10^{2024}$

$a^2 - b^2 + a - b = (a-b)(a+b+1) = 3^4 \cdot 10^{2024} =$

$= 3^4 \cdot 2^{2024} \cdot 5^{2024}$. Ясно, что 1 из скобок четная, другая нет и $a+b+1 > a-b$.

1) ~~$a-b \,\vdots\, 2 \Rightarrow a-b = t \cdot 2^{2024}$, $a+b+1=$~~

$a+b+1 \,\vdots\, 2 \Rightarrow a+b+1 = t \cdot 2^{2024}$. Вместо t может быть любая комбинация из $3^a, 5^b$.

т.е всего $\underline{4 \cdot 2024}$ способов, ~~для 1ой~~ 1 скобка опред. однозначно.

2) $a-b \,\vdots\, 2 \Rightarrow a-b = t \cdot 2^{2024}$. Ясно, что при ~~$t<$~~ $t = 3^1, 3^2 \ldots 3^4$ $a-b < a+b+1 = 5^{2024}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№4 $\frac{1}{\sqrt{4x-x^2-3}-3} \le \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}-\sqrt{x^2+x-2}}$

ОДЗ: $\begin{cases} x^2-4x+3 \le 0 & (1) \\ 4x-x^2-3 \ne 9 & (4) \\ 2x-x^2 \geqslant 0 & (2) \\ x^2+x-2 \geqslant 0 & (3) \\ 2x-x^2 \ne x^2+x-2 & (5) \end{cases}$

Решая (1), (2), (3) получаем:

$(x-3)(x-1) \le 0$, $x(x-2) \le 0$, $(x-1)(x+2) \geqslant 0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $x \in [1;3]$, $x \in [0;2]$, $x \in (-\infty;-2] \cup [1;+\infty)$.

Пересекая получаем $x \in [1;2]$. Теперь заметим, что $4x-x^2-3 < 9$, $x^2-4x+3+9>0$, $x^2-4x+12>0$

$D_1 = 4-12 < 0 \Rightarrow$ верно при $\forall x$. $\Rightarrow \sqrt{4x-x^2-3} < 3$

$\Rightarrow$ дробь слева всегда <0. Теперь посмотрим на правую часть: $2x-x^2 > x^2+x-2$, $2x^2-x-2<0$

$x \in \left(\frac{1-\sqrt{17}}{4}; \frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)$, но $x \in [1;2] \Rightarrow x \in \left[1; \frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)$.

Значит, при таких x правая часть >0, левая <0 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ нер-во выполн. Решим (4) и (5): $\begin{cases} x^2-4x+3+9 \ne 0 \\ 2x^2-x-2 \ne 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x \ne \frac{1\pm\sqrt{17}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x \ne \frac{1\pm\sqrt{17}}{4}$. При $x \in \left(\frac{1+\sqrt{17}}{4}; 2\right]$ обе

части <0 $\Rightarrow$ можно записать, что $\sqrt{2x-x^2}-\sqrt{x^2+x-2} \le \sqrt{4x-x^2-3}-3$

Поймем, что $\sqrt{2x-x^2} = \sqrt{1-(x-1)^2}$, $\sqrt{x^2+x-2} = \sqrt{(x-\frac{1}{2})^2-\frac{9}{4}}$,

$\sqrt{4x-x^2-3} = \sqrt{1-(x^2-4x+4)} = \sqrt{1-(x-2)^2}$. Перепишем в виде:

$\sqrt{1-(x-1)^2}+3 = \sqrt{1-(x-2)^2}+\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2-\frac{9}{4}}$.

Левая часть $\geqslant 3$. А при $x \in [1, 2]$ ~~правая часть~~ :

$\sqrt{1-(x-2)^2} \le 1$, $\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}} \le 2$. равенство достиг при $x = 2$.

Тогда левая часть $\geqslant 3$, правая $\leqslant 3$. Значит

Обе равны 3 : $\begin{cases} \sqrt{2x-x^2} + 3 = 3 \\ \sqrt{1-(x-2)^2} + \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - x^2 = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = 2$. Видим, что $x = 2$ удовл. ОДЗ

Ответ: $x \in \left[1; \frac{1+\sqrt{17}}{4}\right) \cup \{2\}$.

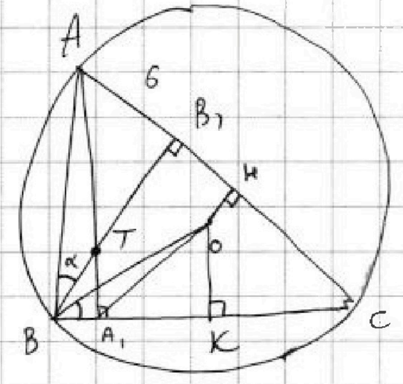
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№5



1) Знаем, что BO и BB_1 изогонали $\Rightarrow \angle OBA_1 = \angle ABB_1 = \alpha$

2) $AB_1 = 6 = AB\sin\alpha = \cancel{2AB\sin\angle C}$. $AB = 2R\sin\angle C$

$\Rightarrow R\cdot\sin\alpha\sin\angle C = 6.$

3) ~~SO~~ $S_{OBA_1} = \frac{1}{2}\cdot OB\cdot BA_1 = \frac{1}{2}\cdot R\cdot BA_1 = 6 \Rightarrow R\cdot BA_1 = 12$

4) Как известно, пусть $AA_1 \cap BB_1 = T$ - ортоцентр, тогда ~~BO~~ $BT = 2OH$, ~~из (3) 12 = R BA₁ = R~~.

С др. стороны $S = \frac{1}{2}OK\cdot BK = \frac{OK\cdot BC}{4}$, причем $OK = \frac{1}{2}\cdot AT \Rightarrow S = \frac{AT\cdot BC}{8}$, $BC = 2R\cdot\sin(90^\circ-\alpha) = 2R\cos\alpha$.

$\Rightarrow S = \frac{AT\cdot R\cos\alpha}{4} = 6 \Rightarrow AT\cdot R\cos\alpha = 24 = 2R\cdot BA_1$

5) $\Delta ATB_1 \sim \Delta BTA_1$: $\frac{AT}{BT} = \frac{TB_1}{TA_1} = \frac{AB_1}{BA_1} \Rightarrow BT = \frac{AT\cdot A_1B}{AB_1} =$

$= \frac{AT\cdot A_1B}{6} = 2OH \Rightarrow OH = \frac{AT\cdot A_1B}{12} = \frac{2OK\cdot A_1B}{12} =$

$= \frac{4\cdot\frac{1}{2}OK\,A_1B}{12} = \frac{4\cdot S}{12} = \frac{4\cdot 6}{12} = 2 \Rightarrow OH = 2$

Ответ: 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x^2-2xy+y^3-3y^2\cancel{4}-1=0 \quad (1)\\ 2x-xy-y^3+5y^2-3y+2=0 \quad (2)\end{cases} \Big|+$$

$x^2+2x-3xy+2y^2-3y+1=0$; $(x-y)(x-2y)+2x-3y+1=0$

$(x-y)(x-2y)+(x-y)+(x-2y)+1=0$

$(x-y+1)(x-2y+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cancel{y=x+1} \quad x=y-1\\ x=2y-1\end{array}\right.$

1) Пусть $x=y-1$, тогда подставим в (1):

$y^2-2y+1-2y(y-1)+y^3-3y^2-1=0$

$y^2-2y+1-2y^2+2y+y^3-3y^2-1=0$

$y^3-4y^2=0 \Leftrightarrow y=0$ или $y=2$, или $y=-2$.

если $y=0$, то $x=-1$. $y=2 \Rightarrow x=1$, $y=-2 \Rightarrow x=-3$.

2) Пусть $x=2y-1$: Подставим в (1):

$4y^2-4y+1-2(2y-1)y+y^3-3y^2-1=0$

$4y^2-4y-4y^2+2y+y^3-3y^2=0$; $y^3-2y-3y^2=0$;

$y(y^2-3y-2)=0$; $\cancel{y(y-2)(y-1)}$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0\\ y=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}\end{array}\right.$

тогда $x=-1$, $x=3+\sqrt{17}-1=2+\sqrt{17}$, $x=3-\sqrt{17}-1=2-\sqrt{17}$.

~~Ответ~~: Проверка: 1) $x=-1, y=0$ (Подставлю во (2))

$-2-0-0+0-0+2=0$. 2) $x=1, y=2$: $2-2-8+20-6+2\neq 0$

3) $x=-3, y=-2$: $-6-6+8+20+6+2\neq 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

4) $x = 2+\sqrt{17},\ y = \frac{3+\sqrt{17}}{2}.$

$$4+2\sqrt{17} - \frac{(2+\sqrt{17})(3+\sqrt{17})}{2} - \frac{(3+\sqrt{17})^3}{8} + 5\cdot\frac{(3+\sqrt{17})^2}{4} - \frac{9+3\sqrt{17}}{2} + 2$$

$$= 6+2\sqrt{17} - \frac{6+17+5\sqrt{17}}{2} - \frac{\cancel{153}^{180}+44\sqrt{17}}{8} + \frac{65+15\sqrt{17}}{2} - \frac{9+3\sqrt{17}}{2} =$$

$$= \frac{12+4\sqrt{17}}{2} - \frac{23+5\sqrt{17}}{2} + \frac{65+15\sqrt{17}}{2} - \frac{9+3\sqrt{17}}{2} - \frac{\cancel{153}^{180}+44\sqrt{17}}{8}$$

$$= \frac{12-23+65-9+4\sqrt{17}-5\sqrt{17}+15\sqrt{17}-3\sqrt{17}}{2} - \frac{\cancel{153}^{180}+44\sqrt{17}}{8} =$$

$$= \frac{45+11\sqrt{17}}{2} - \frac{\cancel{153}^{180}+44\sqrt{17}}{8} = \frac{180-\cancel{153}^{180}}{8} \cancel{\neq 0} = 0$$

5) $x = 2-\sqrt{17},\ y = \frac{3-\sqrt{17}}{2}:$

$13-3\sqrt{17}$

$$4-2\sqrt{17} - \frac{(2-\sqrt{17})(3-\sqrt{17})}{2} + \frac{(\sqrt{17}-3)^3}{8} + 5\cdot\frac{9-6\sqrt{17}+17}{4} - \frac{9+3\sqrt{17}}{2} + 2$$

$$= \frac{\cancel{8}^{12}-4\sqrt{17}-23+5\sqrt{17}+65-15\sqrt{17}-9+3\sqrt{17}}{2} + \frac{(\sqrt{17}-3)^3}{8} =$$

$$= \frac{45-11\sqrt{17}}{2} + \frac{44\sqrt{17}-180}{8} = 0$$

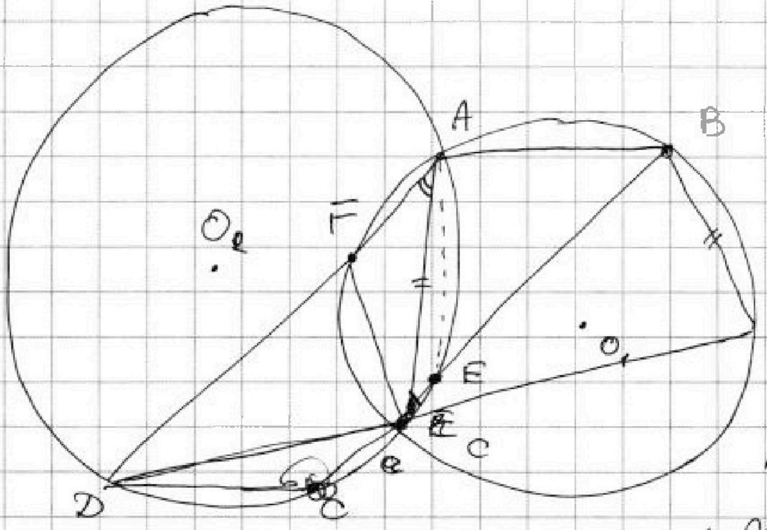
Ответ: $(-1;0)$; $\left(2+\sqrt{17}, \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$, $\left(2-\sqrt{17}; \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА 1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



Дано:

$\frac{R_2}{R_1} = 2.$

$ABCD$ – трап.

$AB \parallel CD$

1) Проведем AC.

по т. синусов для $\triangle ADC$ и $\triangle ABC$:

$\frac{AC}{\sin D} = 2R_2$, $\frac{AC}{\sin B} = 2R_1 \Rightarrow \frac{R_2}{R_1} = \frac{\sin B}{\sin D} = \frac{2}{1}$. Аналогично

проведя FC: $\frac{\sin FAC}{\sin FDC} = 2$ и аналогично $\frac{\sin FAE}{\sin}$

$\frac{\sin ABE}{\sin ACE} = 2$. Теперь по т. синусов для $\triangle ACD$ и $\triangle CAB$:

$\frac{AD}{2\sin ACD} = 2 \cdot \frac{BC}{\sin CAB} \Rightarrow AD = 2BC$ ($AB \parallel CD \Rightarrow$ углы равны).

~~для $\triangle DAC$ и $\triangle CAB$:~~

~~2024~~ | 4

506

Ответ: $\frac{1}{2}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{\sqrt{4x-x^2-3}-3} \le \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}-\sqrt{x^2+x-2}}$$

$$\frac{-x^2+4x-3}{x^2+x-2} \quad -x^2+2x$$

$$-(x^2-4x+3) = -(x-3)(x-1) \ge 0$$

$$-x(x-2) \ge 0 \qquad (x+2)(x-1) \ge 0$$

$$\begin{cases} x \in [1;3] \\ x \in (0;2) \\ x \in (-\infty;-2) \cup (1;+\infty) \end{cases}$$

$$x \in (1;2)$$

$-2 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3$

$$2x-x^2 \ge x^2+x-2$$

$$4x^2-x^2-3 \ge 9$$

$$2x-x^2-x^2-x+2 \ge 0$$

$$x^2-4x+12 \le 0 \qquad -2x^2+x+2 \ge 0$$

$$2x^2-x-2 \le 0$$

$$D = 1+4\cdot2\cdot2 = 17$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$$

$$x \in \left(\frac{1-\sqrt{17}}{4}; \frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)$$

$$\frac{1+\sqrt{17}}{4} < 2 \qquad 1+\sqrt{17} < 8 \qquad \sqrt{17} < 7 \qquad 17 < 49$$

$$12-9 = 3$$

$$\begin{cases} x^2-2xy+y^3-3y^2-1=0 \\ 2x-xy-y^3+5y^2-3y+2=0 \end{cases}$$

$$x^2-2xy-3y^2-1+2x-xy+5y^2-3y+2=0$$

$$x^2-3xy+2y^2+2x-3y+1=0 \qquad y^2(y-3)$$

$$y^2\left(\left(\frac{x}{y}\right)^2-3\frac{x}{y}+2\right) = y^2\left(\frac{x}{y}-2\right)\left(\frac{x}{y}-1\right) = (x-2y)(x-y)$$

$$(x-2y)(x-y)+(x-2y)+(x-y)+1$$

$$x^2-2xy+y^2+y^3-4y^2-1=0$$

$$(x-y)^2+y^3-4y^2-1=0$$

$$\begin{cases} y(2x-3y)+x^2+y^3-1=0 \\ (2x-3y)-y^3-xy+5y^2+2=0 \end{cases}$$

$$2x-x^2, \quad x^2+x-2, \quad 4x-x^2-3$$

$$6x-3x^2 \qquad 2x^2+2x-4$$

$$-x^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$(2x-2)^2+(x^2+3x)^2=(3x+1)^2=$

$= 4(x-1)^2+x^2(x+3)^2=(3x+1)^2$

$4(x^2-2x+1)+x^2(x^2+6x+9)=9x^2+6x+1$

$4x^2-8x+4+x^4+6x^3+9x^2=9x^2+6x+1$

$x^4+6x^3+4x^2-14x+3=0$

$x=1$ - корень, $1+6+4-14+3=0$

	1	6	4	-14	3
1	1	7	11	-3	0

$(x-1)(x^3+7x^2+11x-3)=0$

$(x-1)(x+3)(x^2+4x-1)$

	1	7	11	-3
-3	1	4	-1	0

~~Проверим~~ ~~$x=1$~~: $x=-2\pm\sqrt5$ $\quad -2-\sqrt5$

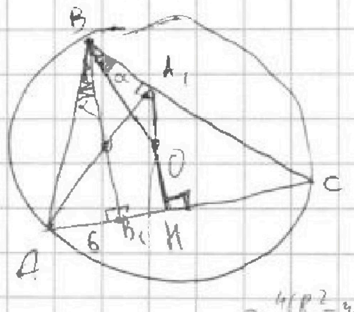
$2|x-1|+|x||x+3|>|3x+1|$ $\quad -6-3\sqrt5+1=5+3\sqrt5$

$2(3+\sqrt5)+(2+\sqrt5)(\sqrt5-1)=6+2\ 2+\sqrt5$

$6+2\sqrt5+2\sqrt5+5-2-\sqrt5=9+3\sqrt5$

$R^2-4R^2+16=3$

$16-3R^2$



$S_{OBA_1}=6$ $\quad \rho(O,AC)$

$S_{OBA_1}=\frac12 R\cdot BA_1\sin\alpha=6$

$AB_1=AB\sin\alpha=6$

$R\cdot BA_1=2AB\Rightarrow \frac{BA_1}{AB}$

$\frac{AC}{\sin B}=2R$ $\quad AC^2=4R^2-16$

$\frac{AB}{BA_1}=\frac{1}{\cos\angle B}$ $\quad \frac{BA_1}{AB}=\cos B=\frac{2}{R}$

$\frac{AC^2\cdot R^2}{R^2-4}=4R^2$ $\quad AC=2\sqrt{R^2-4}$

$\sin B=\sqrt{1-\frac{4}{R^2}}=\sqrt{\frac{R^2-4}{R^2}}=\frac{\sqrt{R^2-4}}{R}$

$9-3\sqrt5 \vee 3\sqrt5-5$ $\quad 14>6\sqrt5$ $\quad 196>180$

$12-2\ 3+6\sqrt5-9=3-2\sqrt3$

$-4+5-15+3=-1-10$

$(2-\sqrt{17})(3-\sqrt{17})=6+17-5\sqrt{17}=23-5\sqrt{17}$

$17\sqrt{17}+-9\cdot17+27\sqrt{17}-27=-180$

$27-27\sqrt{17}+9\cdot17+17\sqrt{17}$

$-27+63-33-3$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$\frac{h}{R} = \frac{6}{AB}$, $\begin{cases} h \cdot BC = 24 \\ h \cdot AB = 6R \end{cases}$

$\frac{BC}{AB} = \frac{4}{R} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{R}{4}$

$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} = 2R$

$\frac{AB}{BC} = \frac{\sin C}{\sin A} = \frac{R}{4}$ $\qquad \frac{\cos\alpha}{\sin\angle C} = \frac{R}{4}$

$\sin\angle C = \sin(\alpha+\varphi) = \frac{\sin\alpha\cos\varphi + \sin\varphi\cos\alpha}{\cos\alpha} = \frac{4}{R}$

$\cancel{\operatorname{tg}\alpha\cos\varphi + \sin\varphi = \frac{4}{R}}$ $\qquad BC = \frac{24}{h} = \frac{24}{R\sin\alpha}$

$\frac{\frac{1}{2}BP \cdot h}{\frac{1}{2}BB_1 \cdot AB_1} = \frac{3}{3 \cdot BB_1} = \frac{1}{BB_1} = R^2$

$\frac{BB_1}{BP} = \frac{6}{h} = \frac{1}{\sqrt{BB_1}}$ $\qquad BB_1^{3/2} = BP$

$BB_1^{3/2} = \frac{BC}{2}$

$BB_1 = \left(\frac{BC}{2}\right)^{2/3}$

$\sin\angle C = \frac{\sqrt[3]{BC^2}}{\sqrt[3]{4} \cdot BC}$

$\frac{TB_1}{A_1T} = \frac{AT}{BT} = \frac{6}{BA_1} = \frac{\sqrt{4h^2-36}}{A_1T}$

$BT = \quad 1^{?} \quad 81$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

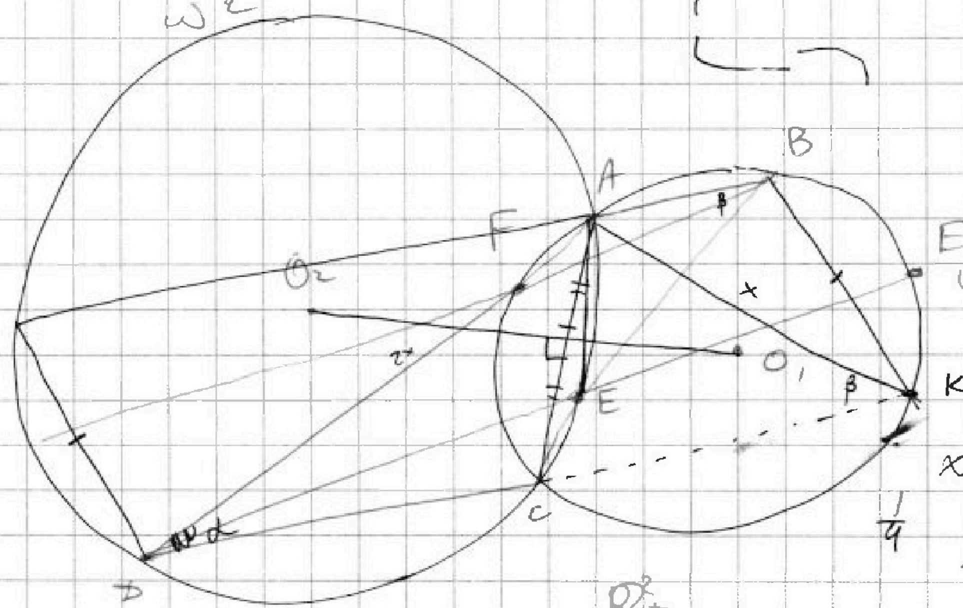
$\frac{A_1T}{B_1C} = \frac{BT}{BC} = \frac{BA_1}{BB_1} \Rightarrow BC \cdot \cancel{BB}\, BA_1 =$

$\sqrt{2x-x^2}+3 \le \sqrt{x^2+x-2}$

$\frac{R_{\omega 2}}{R_{\omega 1}} = 2$

$\frac{AF}{CE}$?

$AD = 2BC$



x^2-4x+3

$\frac{1}{4}$

$-2-\frac{1}{4}-$

$2R^2 - 2R^2\cdot\cos 2\alpha = 4R^2\cos^2\alpha$

$2R^2 - 2R^2(2\cos^2\alpha - 1) =$

$= \cancel{2R^2 - 2R^2 + 2R^2}$

$R \cdot BA_1 \cdot \sin\alpha = 12$

$\cancel{AB} = BC = 2R\cdot\cos\alpha$

$2x - x^2 - 1 + 1 = \cancel{(x-1)^2}$

$\sqrt{1-(x-1)^2} - \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}} \le \sqrt{1-(x-2)^2} + 3$

$(0;1)$ $(0;2)$

$\sqrt{1-(x-1)^2} + 3 \le \sqrt{1-(x-2)^2} + \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}}$

$AD = \cancel{2R\sin\alpha}$

$7/3$

$x - \frac{1}{2} = -\frac{9}{4}$ $\cancel{2x}$ $4x - 2 = -9$ $x = -\frac{11}{4} =$

$\frac{AC}{\sin\alpha} = 2\cdot\frac{AC}{\sin\beta} \Rightarrow$

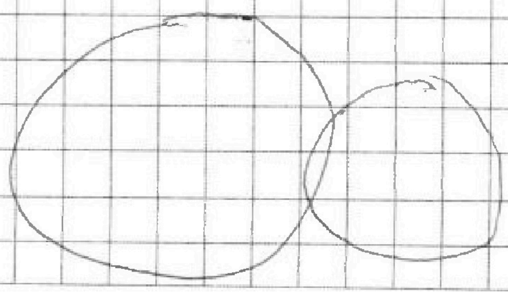
$\Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{1}{2}$

$\frac{AF}{\sin\alpha} =$

$AD = 2R_1\cdot\sin\alpha$

$BC = 2R_2\cdot\sin\alpha_1$

$\frac{AD}{BC} = \frac{R_1}{R_2} = 2$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7 СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$x\sqrt{8} + y\sqrt{18} + z\sqrt{29} = \sqrt{32} + \sqrt{116}$ $x, y, z \in \mathbb{Z}$

$\min(x^2 - y^2 + z^2)$ ~~$R \cdot BA_1$~~

$BC \cdot BA_1 \cdot tg\alpha = 24$ $\triangle ABB_1 \sim \triangle KA_1B$:

$R \cdot BA_1 \cdot \sin\alpha = 12$ $6\frac{AB_1}{KA_1} = \frac{AB}{BK} = \frac{BB_1}{BA_1} = \frac{\sqrt{BB_1}\frac{3}{8}}{\sqrt{6}}$

$BA_1 = \frac{12}{R\sin\alpha}$

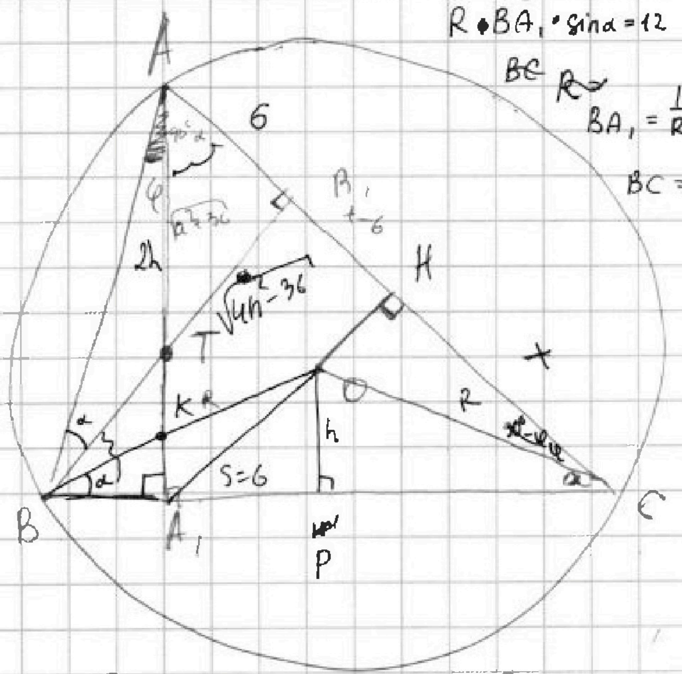
$BC = 2R\cos\alpha$

$1 - 2\sin^2\frac{\varphi}{2}$

$\cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1$

$\cos\varphi = 2\cos^2\frac{\varphi}{2} - 1$

$\cos\frac{\varphi}{2} = \pm\sqrt{\frac{\cos\varphi + 1}{2}}$



$BB_1 = 6\cos\alpha$

$A_1B = BK\cos\alpha$

$$\boxed{R = \frac{BC}{2\cos\alpha}}$$

$S_{OBA_1} = \frac{1}{2} \cdot R \cdot BA_1 \cdot \sin\alpha = 6AB_1 \Rightarrow R = \frac{6}{\sin\alpha} \cdot 2 \cdot \frac{1}{BA_1}$

$AB = \frac{6}{\sin\alpha}$ TB_1 $\frac{BC}{\cos\alpha} = 2R$ $\frac{AB}{A_1B} = \frac{R}{2} = \frac{1}{\sin\varphi}$

$\sin\varphi = \frac{2}{R}$, $\cos\angle B = \sqrt{1 - \frac{4}{R^2}}$

$(x^2 + 2x + 1) + 2y^2 - 3y - 3xy = 0$

$y(2y - 3 - 3x)$

$\frac{x}{R} = \frac{x^2}{R^2} = \frac{\sqrt{1 - \frac{4}{R^2}}}{2}$

$x^2 + 3y^3 + 13y^2 + 6y - 4x + 3 = 0$ $-3y(x+1) + 2y^2$

$y(3y^2 + 13y + 6)$

$(x+1)(x - 3y + 1) + 2y^2 = 0$

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + y^3 - 3y^2 - 1 = 0 \\ 2x - xy - y^3 + 5y^2 - 3y + 2 = 0 \quad | \cdot 2 \end{cases}$$

$\frac{h}{R} = \frac{6}{AB}$

$x^2 + 3y^3 - 3y^2 - 10y^2 - 1 - 4x + 6y + 4 = 0$ $S_{OA_1B} = \frac{h \cdot BC}{4} = 6$

$h \cdot BC = 24$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$x\sqrt{8}+y\sqrt{18}+z\sqrt{29} \geq \sqrt{(x^2+y^2+z^2)(8+18+29)} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\sqrt{65}$

$26+29$, $25+30$, 65

$a(a+1)-b(b+1)=81\cdot 10^{1024}$

$8x^2+18y^2+29z^2+2xy\cdot$

$4x-x^2-3-9$ $4x-x^2-83$

116

$$\frac{1}{\sqrt{4x-x^2-3}-3} \leq \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}-\sqrt{x^2+x-2}},$$

$x\in(1,2)$

$2\sqrt{2},\ 3\sqrt{2},\ \sqrt{29}$

при $x\in(1,2)$ слева <0. спра

3×29, 4, 116

$2x-x^2 > x^2+x-2$

$1+4\cdot 2\cdot 2=$

$2x^2-x-2<0$; x $D=\frac{1\pm\sqrt{17}}{4}$ $x\in\left(1,\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)$

$x\in\left(-\infty;\frac{1-\sqrt{17}}{4}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{17}}{4};+\infty\right)\Rightarrow x\in\left(\frac{1+\sqrt{17}}{4};2\right)$

$\sqrt{2x-x^2}-\sqrt{x^2+x-2} \leq \sqrt{4x-x^2-3}-3$

$2(\sqrt{8}+\sqrt{29})$

$\sqrt{2x-x^2}+3 \leq \sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{-x^2+4x-3}$

?

$(2x-x^2+3)^2-(\sqrt{x^2+x-2}+(-x^2+4x-3)^{\cdot})$

$4-8+3$, $-4+3$, $x=2$, $2x-4$, $=-1$

$x\sqrt{8}+z\sqrt{29}+y\sqrt{18} = 2\sqrt{8}+2\sqrt{29}+0\sqrt{18}$

pow(2,w,?)

$\cancel{\min}(\cancel{x^2}+x-2)=\min(x^2-4x+3)$

$f(x)=\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{-x^2+4x-3}$

$f'(x)=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x-2}}+\frac{-2x+4}{2\sqrt{-x^2+4x-3}}=0$

x^2-4x+3

$\begin{cases} x^2-4x+3\leq 0\\ x^2-2x\leq 0\\ x^2+x-2\leq 0\end{cases}$

$(x-3)(x-1)\leq 0$

$x(x-2)\leq 0$

$(x+2)(x-1)\geq 0$

$2x-x^2<0$

$x(x-2)>0$

$x\in(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$

$(1;2)$

-2 0 1 2 3 x