



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 11



1. [3 балла] Углы выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию, имеющую разность 2° и начинающуюся с угла 143° . Какое наибольшее число вершин может быть у такого многоугольника?
2. [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x \ln 16 + y \ln 8 + z \ln 24 = \ln 6$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$.
3. [4 балла] Из множества M , состоящего из семи подряд идущих натуральных чисел, выбираются шестёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из шестёрок – простое число. Пусть p и q – две из таких сумм. Найдите множество M , если $p^2 - q^2 = 792$.
4. [5 баллов] Диагонали BD и AC трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M , а отношение оснований $AD : BC = 1 : 2$. Точки I_1 и I_2 – центры окружностей ω_1 и ω_2 , вписанных в треугольники BMC и AMD соответственно. Прямая, проходящая через точку M , пересекает ω_1 в точках X и Y , а ω_2 – в точках Z и W (X и Z находятся ближе к M). Найдите радиус окружности ω_1 , если $I_1I_2 = 13/2$, а $MZ \cdot MY = 5$.
5. [5 баллов] Что больше: $5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14}$ или $4 \cos \frac{\pi}{7} - 5 \sin \frac{\pi}{14}$?
6. [4 балла] Даны 12 точек: 7 из них лежат на одной окружности в плоскости α , а остальные 5 расположены вне плоскости α . Известно, что если четыре точки из всех 12 лежат в одной плоскости, то эта плоскость – α . Сколько существует выпуклых пирамид с вершинами в данных точках?
7. [6 баллов] Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ (S – вершина) со стороной основания 2 и боковым ребром 4. Точка X лежит на прямой SF , точка Y – на прямой AD , причём отрезок XY параллелен плоскости SAB (или лежит в ней). Найдите наименьшую возможную длину отрезка XY .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть a - возрастающая арифметическая прогрессия, которую образуют углы многоугольника. d - разность $d = 2^\circ$, а $a_1 = 143^\circ$. Как известно, сумма углов выпуклого n -угольника определяется по формуле $S_n = 180^\circ \cdot (n-2)$. С другой стороны можно определить S_n как сумму первых n членов прогрессии a :

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_1 + d(n-1)}{2} n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n$$

$$S_n = S_n \Rightarrow 180(n-2) = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n \Rightarrow 180(n-2) = (a_1 + \frac{d}{2}(n-1))n$$

Подставим известные значения:

$$180(n-2) = (143 + \frac{n-1}{2})n \Rightarrow 180n - 360 = 142n + \frac{n^2}{2}$$

Получаем квадратное уравнение:

$$n^2 - 38n + 360 = 0$$

$$D = 38^2 - 4 \cdot 360 = 1444 - 1440 = 4 > 0 \Rightarrow 2 \text{ корня}$$

$$n = \frac{38 \pm 2}{2} = 18; 20.$$

$20 > 18$. Проверим, что при $n = 20$, многоугольник выпуклый:

$$a_n = a_1 + d(n-1) = 143^\circ + 2^\circ \cdot (20-1) = 143^\circ + 38^\circ = 181^\circ > 180^\circ \Rightarrow \text{многоугольник невыпуклый. } n \neq 20.$$

$$n = 18: a_n = 143^\circ + 2^\circ \cdot 17 = 143^\circ + 34^\circ = 177^\circ < 180^\circ \Rightarrow \text{многоугольник выпуклый.}$$

Покажем, что прогрессия не убывает, т.е. если $d = -2^\circ$, то каждый из углов не превышает $143^\circ \Rightarrow S_n \leq 143n$. Тогда:

$$143n > 180(n-2)$$

$$317n < 360$$

$$n < 10 \cdot \frac{36}{37}$$

$$n < 10, \text{ а } 10 < 18 \Rightarrow n_{\max} = 18.$$

Ответ: 18.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x^2, y^2, z^2 \geq 0$, поэтому для них справедливо нерав-во о средних:

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}$$

I. Пусть $x, y, z > 0, x, y, z \neq 0$

Тогда, $x^2, y^2, z^2 > 0$

По нерав-ву о средних:

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3} \geq \sqrt[3]{x^2 y^2 z^2}$$

Равенство достигается при $x = y = z$. Найдем x :

$$x \ln 16 + x \ln 8 + x \ln 24 = \ln 6$$

$$x \ln(16 \cdot 8 \cdot 24) = \ln 6$$

$$x \ln(2^4 \cdot 2^3 \cdot 2 \cdot 3) = \ln 6 \Rightarrow x = \log_{2^7 \cdot 3} 6 > 0$$

$$\text{Тогда } x^2 + y^2 + z^2 = 3x^2 = 3 \log_{2^7 \cdot 3}^2 6 = 3 \left(\frac{\ln 6}{\ln(2^7 \cdot 3)} \right)^2$$

II. Пусть $z = 0$:

Заметим, что $\ln 16 = \ln 2^4 = 4 \ln 2$; $\ln 8 = \ln 2^3 = 3 \ln 2$;

$$\ln 24 = \ln 8 + \ln 3 = 3 \ln 2 + \ln 3$$

Исходное рав-во принимает вид:

$$4x \ln 2 + 3y \ln 2 + 3z \ln 2 + z \ln 3 = \ln 6$$

$$\ln 6 = \ln 2 + \ln 3, \text{ подставим:}$$

$$\ln 2 (4x + 3y + 3z - 1) = \ln 3 (1 - z) \quad (:\ln 2 \neq 0)$$

$$4x + 3y + 3z - 1 = \log_2 3 (1 - z) \quad (*)$$

Левая часть рав-ва явл-ся целым числом, а правая произведение целого $(1 - z)$ на иррациональное $\log_2 3$. Единственной случай равенства возможен, если обе части равны 0 (т.к. произведение целого числа на иррациональное иррационально, кроме случая, когда произведение равно 0).

Докажем, что $\log_2 3$ иррационально. Допустим $a = \log_2 3$ явл-ся рациональным $\Rightarrow 2^a = 3$. Если a рационально, то оно представимо в виде $\frac{p}{q}, q \neq 0 \Rightarrow 2^{\frac{p}{q}} = 3$. Возведем обе части рав-ва в степень $q \Rightarrow 2^p = 3^q$. Графики показательных функ-



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Кривые 2^x и 3^x пересекаются в единственной точке $(0; 1)$.
Тогда $p = q = 0$, однако $q > 0$. Противоречие! $\Rightarrow a = \log_2 3$
иррационально.

Значит (*) обращается в $0 = 0$:

$$\begin{cases} 4x + 3y + 3z - 1 = 0 \\ \log_2 3 (1 - z) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - z = 0 \quad (\text{т.к. } \log_2 3 > 0) \\ 4x + 3y + 3z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = 1 \\ 4x + 3y + 3 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 1 \\ 4x + 3y = -2 \end{cases}$$

$x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + 1$, т.е. $x^2 + y^2$ должно быть минимумом.

По первому из условий:

$\frac{x^2 + y^2}{2} \geq \sqrt{|x| \cdot |y|} = |xy| \Rightarrow x^2 + y^2 \geq 2|xy|$. При чём равенство достигается только при $|x| = |y|$:

$$\begin{cases} 4x + 3y = -2 \\ |x| = |y| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-3y - 2}{4} \\ |x| = |y| \end{cases} \Rightarrow \text{Тогда } x = y \text{ или } x = -y.$$

Далее разобьём на все возможные случаи

При раскрытии модуля

I. $x = y$:

$$4x + 3x = -2 \Rightarrow x = -\frac{2}{7}. \text{ Однако } x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \neq y.$$

II. $x = -y$:

$$4x - 3x = -2 \Rightarrow x = -2, \frac{x}{2} \in \mathbb{Z}. \text{ Т.к. } y = -x \Rightarrow y = 2.$$

Значит $x^2 + y^2 \geq 2|xy|$, $2|xy| = 2 \cdot |(-2) \cdot (2)| = 8 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq 8$, равенство достигается при $x = -2, y = 2$.

Итого имеем, что $x^2 + y^2 + z^2 \geq 9$, а $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ при $z = 1$, $x = -2, y = 2$.

Проверка $4 \cdot (-2) \ln 2 + 3 \cdot 2 \ln 2 + 3 \cdot 1 \cdot \ln 2 + \ln 3 = \ln 6$. \checkmark Верно!

Ответ: 9, при $x = -2, y = 2, z = 1$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
9 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

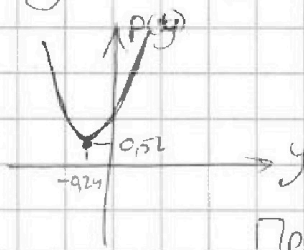
Пусть $\rho = x^2 + y^2$. Т.к. $4x + 3y = -2 \Rightarrow x = \frac{-3y-2}{4}$.

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \rho &= y^2 + \left(\frac{-3y-2}{4}\right)^2 = y^2 + \left(-\frac{3}{4}y - \frac{1}{2}\right)^2 = \\ &= y^2 + \left(\frac{3}{4}y + \frac{1}{2}\right)^2 = y^2 + \left(\frac{9}{16}y^2 + \frac{3}{4}y + \frac{1}{4}\right) = \frac{25}{16}y^2 + \frac{3}{4}y + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Но минимум ρ можно искать, как вершину параболы $\rho(y)$.

$$y_0 = \frac{-\frac{3}{4}}{2 \cdot \frac{25}{16}} = -\frac{\frac{3}{4}}{\frac{25}{8}} = -\frac{3 \cdot 8}{4 \cdot 25} = -0,24 \quad \rho(y_0) = 0,52 > 0, \text{ т.е. } \rho(y) > 0 \text{ при } y \in \mathbb{R}.$$

$y \in \mathbb{Z}$. Из $4x + 3y = -2$ ясно, что $y \equiv 2$, а также $y \neq 0$, иначе $x \notin \mathbb{Z}$.



Т.к. $y \neq 0$, то ближайший целый чётный $y = -2$ (с удалением от y_0 растёт $\rho(y)$).

При $y = -2$, $x = 1$. Т.к. $x \in \mathbb{Z}$, то это и есть искомым минимум!

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 1 + 4 + 1 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq 6, \text{ равенство достигается при } x = 1, y = -2, z = 1.$$

Проверка:

$$4 \cdot 1 \ln 2 + 3 \cdot (-2) \ln 2 + 3 \cdot 1 \ln 2 + \ln 3 = \ln 6 \quad \checkmark \text{ Верно!}$$

Ответ: 6, при $x = 1, y = -2, z = 1$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$p^2 - q^2 = 492 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11$$

$$(p-q)(p+q) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11$$

Сумма первых 6 натуральных чисел $\frac{1+6}{2} \cdot 6 = 21$, так что $p, q > 21$.
Тогда $p, q \div 2 \Rightarrow (p-q) \text{ и } (p+q) \div 2$.

$$(p-q) + (p+q) = 2p, \text{ т.е. такая сумма делится только}$$

на 2, на 1 и на некоторое простое число, большее 21. Это означает, что только одно число из $(p-q)$ и $(p+q)$ делится на 3^2 , ибо если каждое из них $\div 3$, то и $p \div 3$. Также ясно, что $p-q < p+q$. Рассмотрим все допустимые варианты разложения $p-q$ и $p+q$ на простые множители:

$$\text{I } \begin{cases} p-q = 2 \cdot 3^2 \\ p+q = 2 \cdot 2 \cdot 11 \end{cases} \Rightarrow \text{I } \begin{cases} p-q = 18 \\ p+q = 44 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 31 \\ q = 13 \end{cases} \quad 13 < 21 \Rightarrow \begin{matrix} \text{разложение} \\ \text{не} \\ \text{реализуется} \end{matrix}$$

$$\text{II } \begin{cases} p-q = 2 \cdot 2 \\ p+q = 2 \cdot 3^2 \cdot 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p-q = 4 \\ p+q = 198 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 101 \\ q = 97 \end{cases}$$

$$\text{III } \begin{cases} p-q = 2 \cdot 11 \\ p+q = 2 \cdot 2 \cdot 3^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p-q = 22 \\ p+q = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 29 \\ q = 7 \end{cases} \quad 7 < 21 \Rightarrow \begin{matrix} \text{разложение} \\ \text{не} \\ \text{реализуется} \end{matrix}$$

IV случай, когда $p-q=2, p+q=2 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 11$.

Очевидно, что разобраны все случаи разложения, так 2 обязательно входит в каждое разложение, а в наборе $\{3^2; 2; 11\}$ произведение любых 2-ух чисел больше третьего, т.е. $(p-q)$ раскладывается на произведение 2 и какого-либо числа из набора.

Тогда $p=101, q=97$ (II)

Оцени Пусть M начинается с n , т.е. $M = \{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5, n+6\}$.

Оценим n сверху.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$q = 94$ и $q = S_m$ и $q = S_m - n - 6$ \Rightarrow разность сумм всех чисел из M и S_m и q \Rightarrow $S_m - n - 6 = q$ \Rightarrow $S_m - (n+6) = q$

$$S_m = n + (n+1) + (n+2) + \dots + (n+1) = 4n + \frac{1+n}{2} \cdot 6 = 4n + 21$$

Тогда:

$$q \Rightarrow S_m - n - 6$$

$$94 \geq 4n + 21 - n - 6 \Rightarrow 82 \geq 3n \Rightarrow n \leq \frac{41}{3} \Rightarrow n \leq 13$$

$$S_m = 4n + 21 \Rightarrow 7n + 21 \geq 101 + n \Rightarrow 6n \geq 80 \Rightarrow n \geq \frac{40}{3}$$

Т.е. $n \in \emptyset$ при $n \in \mathbb{Z}$.

Тогда остаётся лишь IV случай:

$$\begin{cases} p - q = 2 \\ p + q = 2 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p - q = 2 \\ p + q = 396 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 199 \\ q = 194 \end{cases}$$

Оценим n сверху:

$$q \Rightarrow S_m - n - 6 \Rightarrow 194 \geq 4n + 21 - n - 6 \Rightarrow 182 \geq 3n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n \leq \frac{91}{3} \Rightarrow n \leq 30$$

Оценим n снизу:

$$S_m \geq p + n \Rightarrow 4n + 21 \geq 199 + n \Rightarrow 3n \geq 178 \Rightarrow n \geq \frac{89}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n \geq 30 \Rightarrow n = 30, \text{ т.е. } M = \{30; 31; 32; 33; 34; 35; 36\}$$

$$p = 30 + 31 + 33 + 34 + 35 + 36; q = 30; 31; 32; 33; 35; 36.$$

Ответ: $M = \{30; 31; 32; 33; 34; 35; 36\}$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4 \sin\left(\frac{3\pi}{14}\right) = 4 \cdot \sin\left(3 \cdot \frac{\pi}{14}\right) = 4 \cdot \left(3 \sin \frac{\pi}{14} - 4 \sin^3 \frac{\pi}{14}\right)$$

$$4 \cos \frac{\pi}{7} = 4(1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{14})$$

Тогда сравниваем:

$$5 - 4(3 \sin \frac{\pi}{14} - 4 \sin^3 \frac{\pi}{14}) \quad \vee \quad 4(1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{14}) - 5 \sin \frac{\pi}{14}$$

Пусть $t_0 = \sin \frac{\pi}{14}$, $t_0 > 0$.

$$5 - 4(3t_0 - 4t_0^3) \quad \vee \quad 4(1 - 2t_0^2) - 5t_0$$

$$5 - 12t_0 + 16t_0^3 \quad \vee \quad 4 - 8t_0^2 - 5t_0$$

$$16t_0^3 + 8t_0^2 - 7t_0 + 1 \quad \vee \quad 0 \quad (*)$$

Пусть $f(t) = 16t^3 + 8t^2 - 7t + 1$

Найдем нули производной $f'(t) = 48t^2 + 16t - 7$

$$48t^2 + 16t - 7 = 0; \quad D = 16^2 + 48 \cdot 7 \cdot 4 = 1600 > 0 \Rightarrow 2k$$

$$t_{1,2} = \frac{-16 \pm 40}{2 \cdot 48} = \frac{-2 \pm 5}{12} = -\frac{7}{12}; \frac{1}{4}$$

$$\begin{array}{c} + \quad - \quad + \\ \hline -\frac{7}{12} \quad \frac{1}{4} \end{array} \quad f'(t)$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = 16 \cdot \frac{1}{64} + 8 \cdot \frac{1}{16} - 7 \cdot \frac{1}{4} + 1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{7}{4} + 1 = 0$$

$$f\left(-\frac{7}{12}\right) = 16 \cdot \left(-\frac{7}{12}\right)^3 \quad f(0) = +1$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 16 \cdot \frac{1}{8} + 8 \cdot \frac{1}{4} - 7 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 2 + 2 - \frac{7}{2} + 1 = \frac{5}{2} - \frac{7}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$0 < \frac{\pi}{14} < \frac{\pi}{6}$$

, т.к. $\sin x$ возрастает при $x \in (0; \frac{\pi}{2})$, то

$$\sin(0) < \sin \frac{\pi}{14} < \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow 0 < \sin \frac{\pi}{14} < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < t_0 < \frac{1}{2}$$

При $t \in [0; \frac{1}{4}]$ $f(t)$ убывает — \rightarrow ^{наименьшее} значение функции на отрезке равно $f\left(\frac{1}{4}\right) = 0$. При $t \in [\frac{1}{4}; \frac{1}{2}]$ $f(t)$ возрастает — \rightarrow ^{наибольшее} значение на отрезке равно $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Тогда наибольшее значение на отрезке $t \in [0; \frac{1}{2}]$ соответствует $f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} < 0$. Т.к. t_0 принадлежит данному отрезку, то $f(t_0) < f(\frac{1}{2}) < 0$.~~

~~Приходим к исходному нер-ву:~~

~~(*) : $f(t_0) < 0 \Rightarrow 4\cos\frac{\pi}{7} - 5\sin\frac{\pi}{14}$ больше.~~

~~Ответ: $4\cos\frac{\pi}{7} - 5\sin\frac{\pi}{14}$.~~

Очевидно, $t_0 \in [0; \frac{1}{2}]$. $f(t)$ на данном отрезке остаётся положительной и лишь в точке $t = \frac{1}{4}$ обращается в 0. ~~$f(t) \neq 0$~~ $t_0 \neq \frac{1}{4} \Rightarrow f(t_0) > 0$.

Тогда левая часть больше правой в (*)

$\sin \alpha < \alpha \Rightarrow \sin\frac{\pi}{14} < \frac{\pi}{14} < \frac{1}{4}$ (т.к. $4\pi < 14$), ~~т.к.~~ ^(поэтому) $t_0 \neq \frac{1}{4}$

Ответ: $5 - 4\sin\frac{3\pi}{14}$ больше.

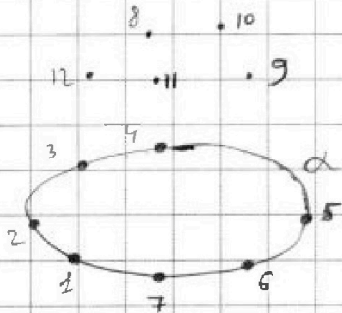


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Прокумеруем точки. Т.к. любая 4 точки могут лежать только в α , то 4-х и более угловых пирамид имеют основания, лежащие в α . То 4-х и более угловых оснований пирамид лежат именно в α .

Треугольные Пирамиды с треугольным основанием:

Такую пирамиду задают две любые 4 точки. Единственное ограничение: хотя бы одна из них не лежит в α , иначе пирамида невыпуклая. Такие рассуждения обоснованы тем, что любые 3т. задают плоскость.

Всего множеств из 4-х точек: $C_{12}^4 = \frac{12!}{4! \cdot 8!} = \frac{9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 495$ шт.

Из них все 4 в α в $C_7^4 = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{6} = 35$ множеств.

Всего выпуклых треугольных пирамид $495 - 35 = 460$ шт.

4-х и более угловых оснований лежат в α . Тогда вершиной может стать любая из 5 не лежащих в α точек, а основания n-угловых оснований можно выбрать C_7^n способами. Приведем таблицу с кол-вом n-угловых оснований в α :

n	C_7^n	кол-во	пирамид = кол-во * 5
4	$\frac{7!}{4! \cdot 3!}$	35	
5	$\frac{7!}{5! \cdot 2!}$	21	
6	$\frac{7!}{6! \cdot 1!}$	7	
7	$\frac{7!}{7! \cdot 0!}$	1	

Кол-во пирамид = кол-во оснований * 5:

$$N_{24} = 5 \cdot (35 + 21 + 7 + 1) = 64 \cdot 5 = 320$$

Суммарно пирамид $320 + 460 = 780$ шт.

Ответ: 780 шт.

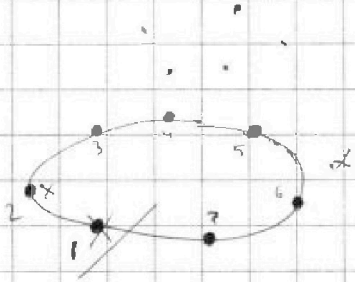


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
___ ИЗ ___

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



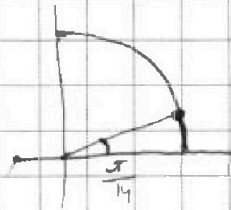
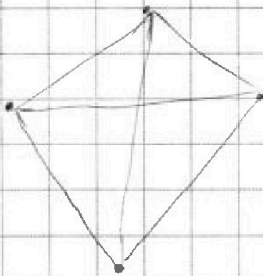
$$C_{12}^3 + C_{12}^4$$

$$\frac{12!}{3! \cdot 9!} + \frac{10 \cdot 11 \cdot 12}{24} = 220$$

$$C_7^3 = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{6} = 35$$

$$\frac{5+1}{2} \cdot 5 = 15 + \frac{4+1}{2} \cdot 4 + \frac{3+1}{2} \cdot 3 + \frac{2+1}{2} \cdot 2 + 1 =$$

$$= \frac{15+10}{2} + \frac{6+3}{2} = 34$$



$$\frac{\pi}{6} = \frac{14}{63} = \frac{14}{9 \cdot 7}$$

$$\frac{3\pi}{14} = \frac{7}{9}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{9} = \frac{7}{18}$$

$$\frac{\pi}{14} < \frac{1}{4}$$

$$0,25 \cdot 4 = 1$$

$$1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} = \frac{7}{28}$$

$$\sin \alpha < \frac{1}{4}$$

$$\sin \frac{\pi}{14} < \frac{\pi}{14} < \frac{1}{4}$$

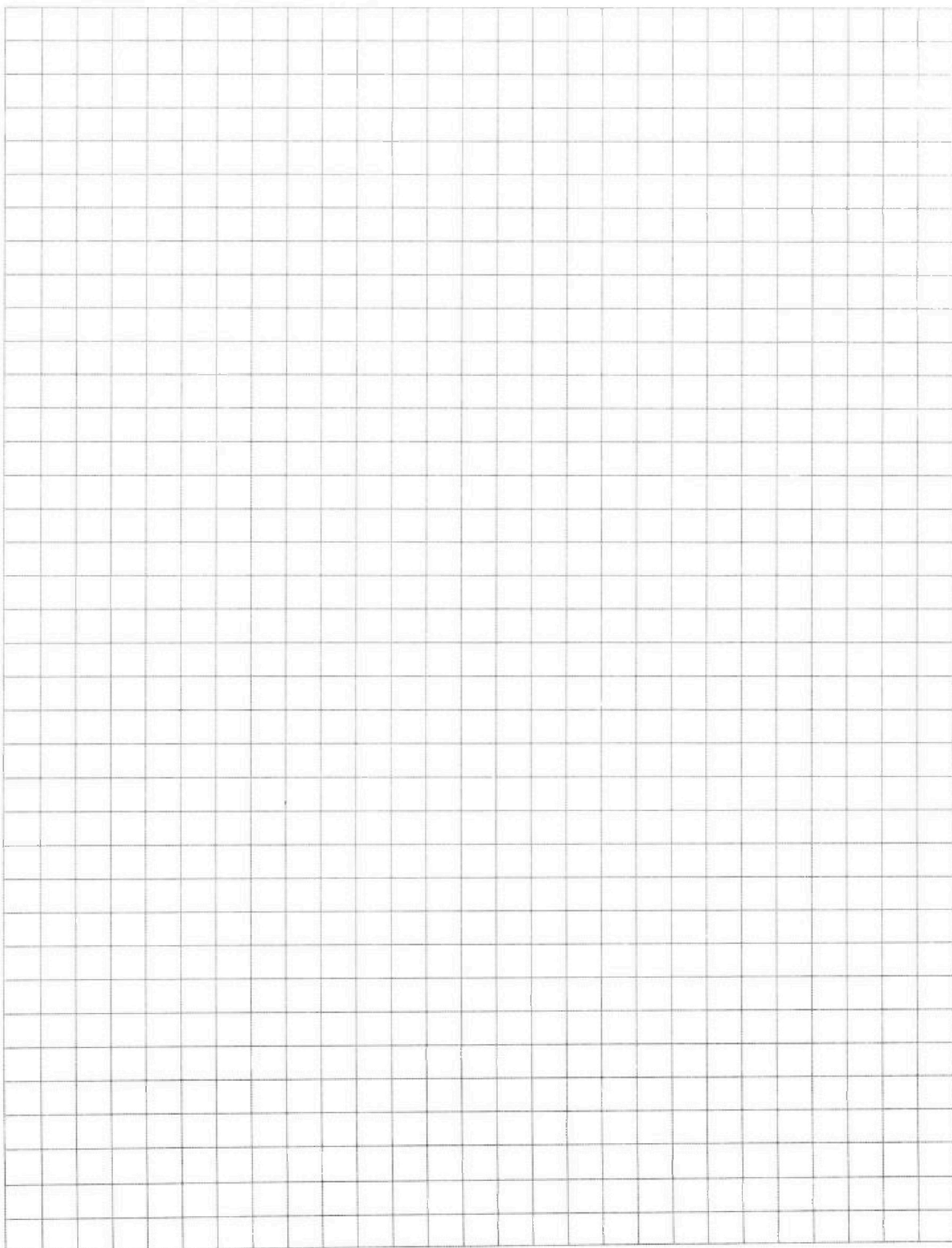


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



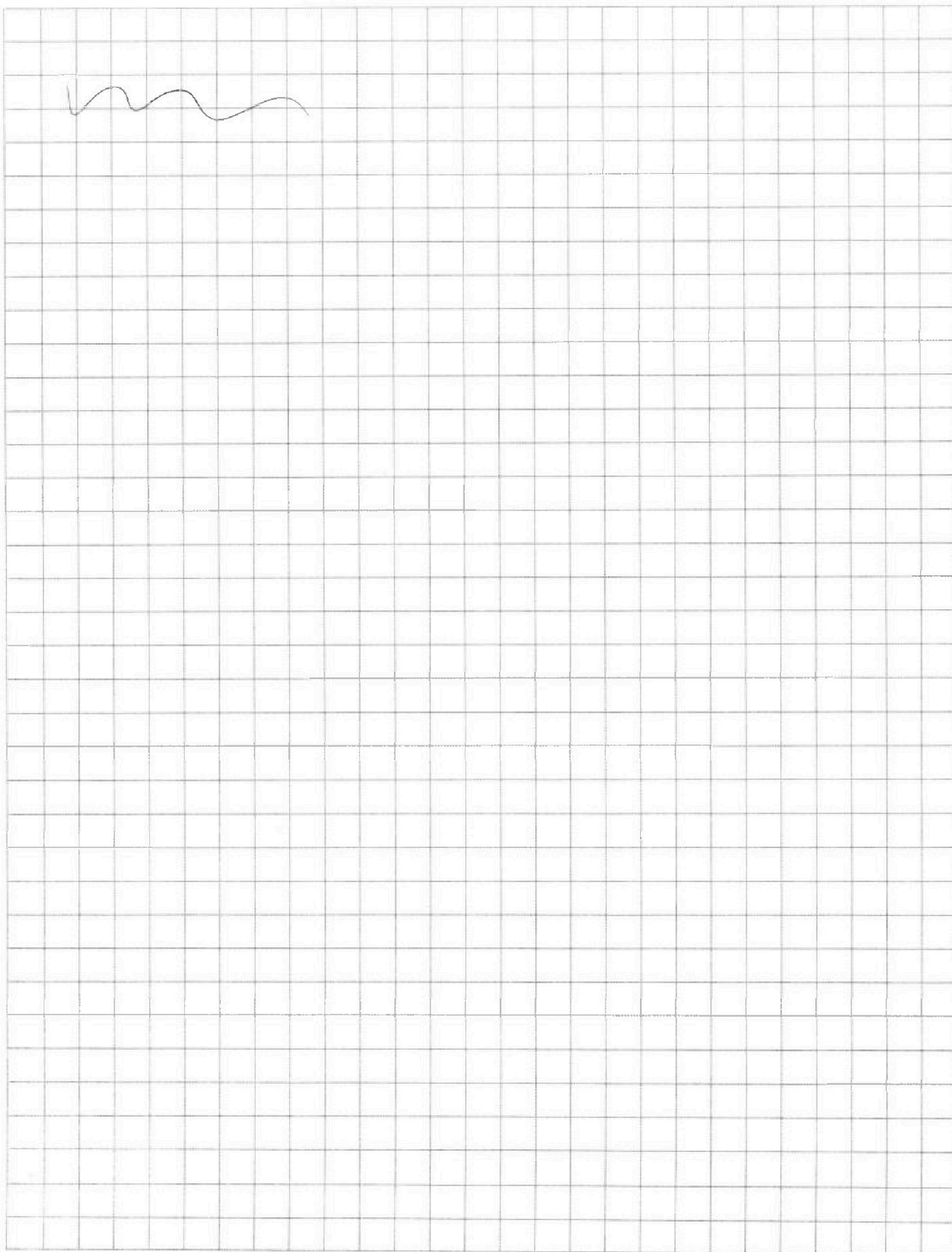


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x(\ln 16 \cdot 8) = \ln 6$
 $x = \log_2 6$
 $2x^2 = 2 \log_2^2 6$

$4x \ln 2 + 3y \ln 2 + 3z \ln 2 + 2 \ln 3 = \ln 6$
 $\ln 2(4x + 3y + 3z) + 2 \ln 3 = \ln 2 + \ln 3$
 $\ln 2(4x + 3y + 3z - 1) = \ln 3(1 - 2)$

$4x + 3y + 3z - 1 = \ln 3(1 - 2)$
 $4x + 3y + 3z = 2$

$2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 3^2$
 $2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 3^2$
 $2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 3^2$

$3(2) + 4x = 2$
 $4x = -4$
 $x = -1$
 $2x + 4y = 2$
 $4y = 4$
 $y = 1$

$4 \cos \frac{\pi}{7} = 4 \left(\cos^2 \frac{\pi}{14} - \sin^2 \frac{\pi}{14} \right)$
 $\sin^2 x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$
 $97 + n + 6 = 2 \sin x \cos x + \cos^2 x \sin x - \sin^3 x = 36 \cdot 11 = 396 + 36$

$48t^2 + 16t - 7 > 0$
 $256 + 48 \cdot 7 \cdot 4 = (50 - 2)(30 - 2) = 1500 - 100 - 60 - 4$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$a_1 = 143$ $d = 2$ $\frac{x^2+y^2}{2} \Rightarrow \sqrt{2xy}$ $\sin 3d = \sin(2d+d) = \sin 2d \cos d + \cos 2d \sin d = 2 \sin d \cos^2 d + \sin d - 2 \sin^3 d = 2 \sin d \cos^2 d - 2 \sin^3 d$

Δ 180° $180(n-2)$ $5 \cdot 6 \cdot 7$
 \square 360° $4x \ln 2 +$ $\frac{6 \cdot 7}{2} = 21$
 $= 7 \cdot 3 = 21$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{a_1 + a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$$

$$180(n-2) = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$$

$$180n - 360 = (143 + n - 1)n$$

$$180n - 360 = 143n + n^2 - 142n + n^2$$

$$38n = n^2 - 38n + 360 = 0$$

$$n = \frac{38 \pm 2}{2} = 18; 20$$

$$S_n \leq 143n$$

$$143n \geq 180(n-2)$$

$$143n \geq 180n - 360$$

$$360 \geq 37n$$

$$10 \cdot \frac{3}{7} \geq n$$

$$(40-2)(40-2) = 1600 - 80 - 80 + 4 = 1440$$

$$x \ln 16 + y \ln 8 + z \ln 24 = \ln 6$$

$$2x \ln 4 + 4x \ln 2 + 3y \ln 2 + 3z \ln 2 + z \ln 3 = \ln 2 + \ln 3$$

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{3} \Rightarrow \sqrt{2xy} \cdot \sqrt{2yz} \cdot \sqrt{2xz}$$

$$4x + 3y + 3z + z \frac{\ln 3}{\ln 2} = 1 + \frac{\ln 3}{\ln 2}$$

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{3} \Rightarrow \sqrt{2xy} \cdot \sqrt{2yz}$$

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{3} \Rightarrow \sqrt{27xyz}$$

$$x = y = z$$

$$x^2 = \frac{(\ln 2 + \ln 3)^2}{(10 \ln 2 + \ln 3)^2} = \frac{\ln^2 6}{\ln^2(2^3 \cdot 3)} = \left(\frac{\log_2 6}{3}\right)^2$$

$$x(10 \ln 2 + \ln 3) = \ln 2 + \ln 3$$

$$x = \frac{\ln 2 + \ln 3}{10 \ln 2 + \ln 3}$$