МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 12

1. [3 балла] Углы выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию, имеющую разность 2° и начинающуюся с угла 132°. Какое наибольшее число вершин может быть у такого многоугольника?

2. [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x\ln 25 + y\ln 75 + z\ln 125 = \ln 45$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$.

3. [4 балла] Из множества M, состоящего из семи подряд идущих натуральных чисел, выбираются шестёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из шестёрок – простое число. Пусть p и q – две из таких сумм. Найдите множество M, если $p^2 - q^2 = 1080$.

4. [5 баллов] Диагонали BD и AC трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M, а отношение оснований $AD : BC = 1 : 2$. Точки I_1 и I_2 – центры окружностей ω_1 и ω_2, вписанных в треугольники BMC и AMD соответственно. Прямая, проходящая через точку M, пересекает ω_1 в точках X и Y, а ω_2 – в точках Z и W (X и Z находятся ближе к M). Найдите радиус окружности ω_1, если $I_1I_2 = 8$, а $MZ \cdot MY = 9$.

5. [5 баллов] Что больше: $5 - 4\sin\dfrac{9\pi}{14}$ или $3\sin\dfrac{3\pi}{14} - 4\cos\dfrac{3\pi}{7}$?

6. [4 балла] Даны 12 точек: 8 из них лежат на одной окружности в плоскости α, а остальные 4 расположены вне плоскости α. Известно, что если четыре точки из всех 12 лежат в одной плоскости, то эта плоскость – α. Сколько существует выпуклых пирамид с вершинами в данных точках?

7. [6 баллов] Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ (S – вершина) со стороной основания 1 и боковым ребром $\sqrt{2}$. Точка X лежит на прямой SF, точка Y – на прямой AD, причём отрезок XY параллелен плоскости SAB (или лежит в ней). Найдите наименьшую возможную длину отрезка XY.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

1. Пусть разность прогрессии $d = 2^\circ$, а её членов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — n штук

Тогда $\alpha_1 = 132^\circ$; $\alpha_2 = 132^\circ + d$; ...; $\alpha_n = 132^\circ + (n-1)d$.

Посчитаем сумму углов многоугольника 2мя способами:

1) По формуле для суммы членов арифм. прогр:

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_n}{2} \cdot n = \frac{132^\circ + 132^\circ + (n-1)d}{2} \cdot n = \frac{132 \cdot 2 + (n-1) \cdot 2}{2} \cdot n$$

2) Сумма углов выпуклого ~~четырех~~многоугольника есть: $(n-\cancel{1}2) \cdot 180^\circ$ по известной формуле, где n - кол-во углов.

Тогда получаем:

$$\frac{132 \cdot 2 + (n-1) \cdot 2}{2} \cdot n = (n-2) \cdot 180$$

$$(132 + n - 1) \cdot n = 180n - \cancel{180}\ 360$$

$$131n + n^2 = 180n - 180$$

$$n^2 - 49n + 180 = 0$$

$$D = 49^2 - 4 \cdot 180 = 961 = 31^2$$

$$n = \frac{49 \pm 31}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 40 \\ n = 9 \end{array}\right.$$

Если $n = 40$, то $a_n = 132 + (40-1) \cdot 2 = 132 + 39 \cdot 2 = 132 + 60 + 18 = 210 > 180$, однако многоугольник выпуклый $\Rightarrow$ ~~все его углы не могут~~ любой его угол не может быть $> 180^\circ \Rightarrow n = 40$ не реализуется.

Если $n = 9$, то $a_1 = 132^\circ$, $a_2 = 134^\circ$; ...; $a_9 = 132^\circ + 2^\circ \cdot 8 = 132^\circ + 16^\circ = 148^\circ$. Очевидно, такой многоугольник сущ.

Ответ: наибольшее число вершин: 9.

2. $x \cdot \ln 25 + y \cdot \ln 75 + z \cdot \ln 125 = \ln 45$

$$\Updownarrow$$

$$\ln 25^x + \ln 75^y + \ln 125^z = \ln 45$$

$$\Updownarrow$$

$$\ln(25^x \cdot 75^y \cdot 125^z) = \ln 45$$

Т.к. ~~ln~~ $f(x) = \ln x$ – ~~возраст.~~ монотонная функция, то:

$$25^x \cdot 75^y \cdot 125^z = 45 \text{ – равносильное условие}$$

$$(5^2)^x \cdot (5^2 \cdot 3)^y \cdot (5^3)^z = 3^2 \cdot 5$$

$$5^{2x} \cdot 5^{2y} \cdot 3^y \cdot 5^{3z} = 3^2 \cdot 5$$

$$5^{2x+2y+3z} \cdot 3^y = 5^1 \cdot 3^2.$$

По основной теореме арифметики каждое нат. число единств. образом раскладывается на простые множители; а значит последнее условие равносильно:

$$\begin{cases} 2x+2y+3z = 1 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3z+4 = 1 \\ y = 2. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3\cancel{y}z = -3 \quad (1) \\ y = 2 \quad (2) \end{cases}$$

$\vdots$ – делится на

Рассмотрим (1): $2x + 3\cancel{y}z = -3$. $3\cancel{y}z \vdots 3$, $-3 \vdots 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x \vdots 3 \Rightarrow x \vdots 3$. Пусть $x = 3x_1$ (x_1 – целое). Подставим:

$$2 \cdot 3x_1 + 3\cancel{y}z = -3$$

$$2x_1 + \cancel{y}z = -1.$$ $2x_1$ – чётное число; -1 – нечётное $\Rightarrow$ z – также нечётное число как разность нечётного и чётного. Пусть $z = 2\cancel{x}z_1 + 1$ (z_1 – целое). Под-

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

ставим: $2x_1 + (2z_1+1) = -1$

$2x_1 + 2z_1 = -2$

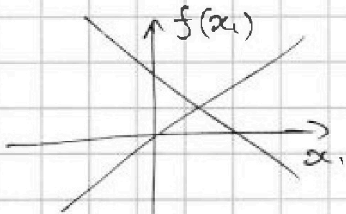
$x_1 + z_1 = -1 \Leftrightarrow z_1 = -1 - x_1$.

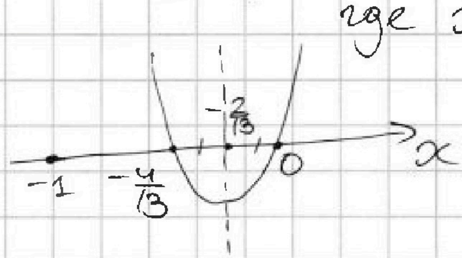
Выражение $x^2+y^2+z^2$ минимально $\Leftrightarrow$ x^2+z^2 минимально, ведь $y=2$, как было показано ранее.

$x^2+z^2 = (3x_1)^2+(2z_1+1)^2 = (3x_1)^2+(2\cdot(-1-x_1)+1)^2 =$
$= 9x_1^2+(-2x_1-1)^2 = 9x_1^2+(2x_1+1)^2 = 9x_1^2+4x_1^2+1+4x_1 =$
$= 13x_1^2+4x_1+1$.

$13x_1^2+4x_1+1$ — минимально $\Leftrightarrow$ $13x_1^2+4x_1$ — минимально. Исследуем ~~$f(x_1)=13x_1^2+4x_1=x_1(13x_1+4)$~~

$f(x)=13x^2+4x=x(13x+4)$, где $x\in\mathbb{R}$





Графиком $f(x)$ является парабола с ветвями вверх.

Минимум $f(x)$ достигается при $x_0 = \frac{-\frac{4}{13}+0}{2} = -\frac{2}{13}$, и чем больше модуль разности между абсциссой произвольной точки графика и x_0, тем больше значение $f(x)$ в этой точке $\Rightarrow$ т.к. $x_1 \in \mathbb{Z}$, то минимальное значение $13x_1^2+4x_1 = 13\cdot 0^2+4\cdot 0 = 0$ при $x_1=0$, т.к. $x_1=0$ — ближайшая целая абсцисса к $-\frac{2}{13}$

$\Rightarrow$ наим. значение $x^2+y^2+z^2 = (3x_1)^2+2^2+(-2x_1-1)^2 =$
$= 4+1=5$ и достигается при $x=3x_1=0$; $y=2$; $z=(-2x_1-1)=-1$.

Ответ: наим. значение равно 5; достиг. при $x=0; y=2; z=-1$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

3. Пусть n - наим. элемент множества

$$M = \{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5, n+6\}$$ n-нат

Минимальная сумма в шестёрке есть сумма 6 самых маленьких элементов M:

$$n+(n+1)+\ldots+(n+5) = \frac{2n+5}{2}\cdot 6 = (2n+5)\cdot 3 = 6n+15$$

Максимальная сумма в шестёрке есть сумма 6 самых больших элементов M:

$$(n+1)+(n+2)+\ldots+(n+6) = \frac{2n+7}{2}\cdot 6 = (2n+7)\cdot 3 = 6n+21$$

Т.е. любая сумма, подходящая под условие (обозначим её Σ) удовлетворяет нер-ву:

$$6n+15 \le \Sigma \le 6n+21.$$

Заметим, что $6n+21 > 21$, а также $6n+21 \vdots 3 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ это не простое число $\Rightarrow \Sigma \ne 6n+21$. Также $6n+20 > 20$ и $6n+20 \vdots 2 \Rightarrow 6n+20$ - составное и $\Sigma \ne 6n+20$.

Аналогично, $6n+15 > 15$ и $6n+15 \vdots 3 \Rightarrow \Sigma \ne 6n+15$

А ещё $6n+16 > 16$ и $6n+16 \vdots 2 \Rightarrow \Sigma \ne 6n+16$

Получаем улучшенную оценку на Σ:

$$6n+17 \le \Sigma \le 6n+19,$$ но $\Sigma \ne 6n+18$, т.к. это число $\vdots 2$ и > 18

Таких сумм только две: $6n+17$ и $6n+19$

По условию: $p^2 - q^2 = 1080$ (*) $\Rightarrow p^2 > q^2 \Rightarrow p > q$, т.к. $p, q \in \mathbb{N}$.

Значит: $p = 6n+19$

$q = 6n+17$. Подставим в равенство (*):

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Получим: $(6n+19)^2 - (6n+17)^2 = 1080$

$$((6n+19)-(6n+17))((6n+19)+(6n+17)) = 1080$$

$$2\cdot(12n+36) = 1080$$

$$12n+36 = 540$$

$$2n+6 = 90$$

$$2n = 84 \Leftrightarrow n = 42.$$

по условию существует

Значит искомое множество $M = \{42, 43, 46, 45, 46, 47, 48\}$. Тогда $p = 6\cdot42+19 = 271$ и $q = 6\cdot42+17 = 269$ действ. простые числа.

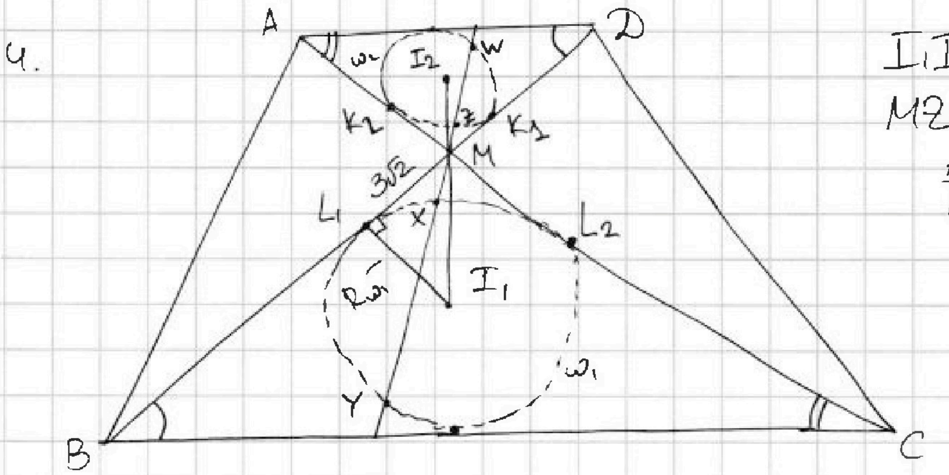
Ответ: $M = \{42, 43, 44, 45, 46, 47, 48\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

4.



$I_1I_2 = 8$

$MZ \cdot MY = 9$

$\frac{AD}{BC} = \frac{1}{2}$

K_1, K_2, L_1, L_2 – точки касания окр. со сторонами

Решение: Т.к. $AD \parallel BC$ (~~это трапеция~~) в трапеции, то $\angle CBM = \angle ADM$; $\angle BCM = \angle DAM$ как накрест-лежащие при параллельных прямых AD и BC, а значит $\triangle MBC \sim \triangle MDA$ по 2ум углам.

Из подобия следует, что все соответственные ~~их~~ элементы данных треугольников относятся друг к другу как коэффициент подобия, т.е. $k = \frac{BC}{AD} = 2$. Тогда понятно, что $\frac{MX}{MZ} = 2$, ведь лучи MW и MY являются соответственными в $\triangle MDA$ и $\triangle MBC$, т.к. отложены под равными углами от соответственных сторон MB и MD ($\cancel{\angle BAX} = \angle BMY = \angle DMW$, как верт.), ну и сами вписанные окружности треугольников также подобны. Тогда:

$$MZ \cdot MY = 9$$

$$\frac{MX}{2} \cdot MY = 9$$

для т. M и ω_1 $\quad MX \cdot MY = 18$

По Th. о касательной и секущей к окружности: $MX \cdot MY = ML_1^2 = 18$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Тогда $ML_1 = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

Из подобия $\triangle MBC$ и $\triangle MDA$ можно сделать вывод о том, что точки I_1, M, I_2 лежат на одной прямой, т.к. точки I_1 и I_2 — соответственные в этих треугольниках, а значит соответственные отрезки MI_1 и MI_2 исходят под равными углами к соответственным сторонам видимо, т.е. $\angle BMI_1 = \angle DMI_2$, а значит MI_2 и MI_1 сливаются в I_1I_2, проходящий через M. Кроме того из соображений подобия $\frac{MI_1}{MI_2} = 2 = k$, т.е. $MI_1 = 2MI_2$.

$$I_1I_2 = I_1M + I_2M = MI_1 + \frac{MI_1}{2} = \frac{3}{2}MI_1 = 8$$

$\Rightarrow MI_1 = \frac{8 \cdot 2}{3} = \frac{16}{3}$. Проведём радиус I_1L_1 в точку касания L_1, который перпендикулярен касательной по свойству. Тогда по теореме Пифагора:

$$MI_1^2 = ML_1^2 + I_1L_1^2$$

$$\left(\frac{16}{3}\right)^2 = (3\sqrt{2})^2 + R_{\omega_1}^2 \Rightarrow R_{\omega_1}^2 = \frac{16^2}{9} - 18 = \frac{256 - 18 \cdot 9}{9} =$$

$= \frac{256 - 162}{9} = \frac{94}{9} \Rightarrow R_{\omega_1} = \frac{\sqrt{94}}{3}$ — искомый радиус окружности ω_1.

Ответ: $R_{\omega_1} = \frac{\sqrt{94}}{3}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

5. $5-4\sin\frac{9\pi}{14} \vee 3\sin\frac{3\pi}{14}-4\cos\frac{3\pi}{7}$

$\cancel{\sin\frac{3\pi}{14}}$ $\sin\frac{9\pi}{14}=\sin(3\cdot\frac{3\pi}{14})=3\sin(\frac{3\pi}{14})-4\sin^3(\frac{3\pi}{14})$ по формуле синуса тройного угла.

$\cos\frac{3\pi}{7}=\cos(2\cdot\frac{3\pi}{14})=\cancel{2\cos}\ 1-2\sin^2(\frac{3\pi}{14})$ по формуле косинуса двойного угла.

$5-4(3\sin(\frac{3\pi}{14})-4\sin^3(\frac{3\pi}{14})) \vee 3\sin\frac{3\pi}{14}-4(1-2\sin^2(\frac{3\pi}{14}))$

Пусть $\sin(\frac{3\pi}{14})=x$

$5-4(3x-4x^3) \vee 3x-4(1-2x^2)$

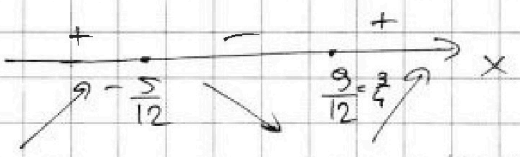
$5-12x+16x^3 \vee 3x-4+8x^2$

$16x^3-8x^2-15x+9 \vee 0$

Рассмотрим $f(x)=16x^3-8x^2-15x+9$

Найдём произв: $f'(x)=16\cdot3x^2-16x-15=$

$=\frac{1}{16\cdot3}(x^2-\frac{1}{3}x-\frac{5}{16})=\frac{1}{16\cdot3}(x-\frac{9}{12})(x+\frac{5}{12})$



Видим, что на промежутке $[0;\frac{3}{4}]$ функция $f(x)$ убывает. Заметим, что $\sin(\frac{3\pi}{14})<\frac{3}{4}$, т.к.

$\sin(\frac{3\pi}{14})<\sin(\frac{3\pi}{12})=\sin(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{3}{4}$ ($\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{3}{4}$; $4\sqrt{2}<6$; $2\sqrt{2}<3$; $8<9$)

~~при этом При этом~~ $\cancel{\sin(\frac{3\pi}{14})>0}$, ~~т.к.~~ $\cancel{\frac{3\pi}{14}\in(0;\frac{\pi}{2})}$.

~~Заметим, что~~ $\cancel{\sin(\frac{3\pi}{12})}$ $\overset{0}{}$ ~~sin(…)~~, ~~т.к. оба угла в I четверти~~ и $\frac{3\pi}{18}<\frac{3\pi}{14}\Rightarrow$

~~$\Rightarrow$ Если $f(\sin(\frac{3\pi}{18}))<0$, то и sin $f(\sin(\frac{3\pi}{14}))<0$,~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

~~Т.к. $f(x)$ на $[0; \frac{3}{4}]$ убывает, как было доказано ранее.~~

~~Найдём $f(\sin(\frac{3\pi}{18})) = f(\sin(\frac{\pi}{6})) = f(\frac{1}{2})$~~

~~$f(\frac{1}{2}) = 16\cdot(\frac{1}{2})^3 - 8\cdot(\frac{1}{2})^2 - 15\cdot\frac{1}{2} + 9 = 2 - 2 - 7{,}5 + 9$~~

Также $\sin(\frac{3\pi}{14}) > 0$, т.к. $\frac{3\pi}{14} \in (0; \frac{\pi}{2})$.

Заметим, что $\sin(\frac{3\pi}{14}) < \sin(\frac{3\pi}{12}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, т.к. $\frac{3\pi}{12} > \frac{3\pi}{14}$ и оба угла в I четверти.

Найдём $f(\sin(\frac{\pi}{4})) = f(\frac{1}{\sqrt{2}})$:

$$f(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 16\cdot(\frac{1}{\sqrt{2}})^3 - 8\cdot(\frac{1}{\sqrt{2}})^2 - 15\cdot(\frac{1}{\sqrt{2}}) + 9 =$$

$$= 16\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - 8\cdot\frac{1}{2} - 15\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + 9 = \frac{8}{\sqrt{2}} - 4 - \frac{15}{\sqrt{2}} + 9 =$$

$$= -\frac{7}{\sqrt{2}} + 5 > 0$$, т.к. $5 > \frac{7}{\sqrt{2}}$ $\Rightarrow$

$$25 > \frac{49}{2}$$

$$50 > 49$$

$\Rightarrow$ $f(\sin\frac{3\pi}{14})$ также больше нуля, поскольку $f(x)$ убывает на $[0; \frac{3}{4}]$, как было доказано ранее. $\Rightarrow$ ~~$f(x)>$~~ знак в исходном неравенстве $>$, т.е.

$$5 - 4\sin\frac{9\pi}{14} > 3\sin\frac{3\pi}{14} - 4\cos\frac{3\pi}{7}.$$

Ответ: $5 - 4\sin\frac{9\pi}{14} > 3\sin\frac{3\pi}{14} - 4\cos\frac{3\pi}{7}$.

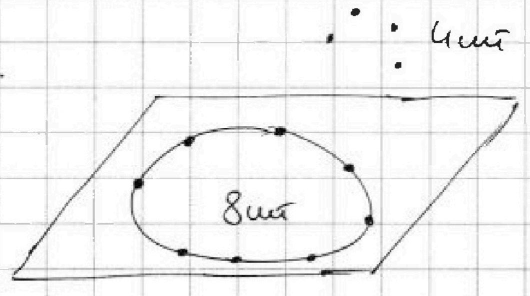
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА 1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

6.



Кол-во трёхугольных пирамид равно кол-ву способов выбрать четыре точки, не лежащие на все в одной плоскости, т.е.

Это кол-во равно:

1) Три точки на окр. одна во вне α: $C_8^3 \cdot 4 = \frac{8\cdot7\cdot6}{3!}\cdot 4 = 56\cdot 4 = 224$.

2) две точки на окр, две во вне α: $C_8^2 \cdot C_4^2 = \frac{8\cdot 7}{2}\cdot\frac{4\cdot 3}{2} = \frac{56}{2}\cdot\frac{12}{2} = 28\cdot 6 = 120+48 = 168$

3) Три точки во вне, одна на окр:

$C_4^3 \cdot 8 = \frac{4\cdot3\cdot2}{3!}\cdot 8 = 32$

~~Всего:~~

4) все четыре точки снаружи: 1 способ (берём все 4 точки)

Всего: $224+168+32+1 = 225+200 = 425$ сп.

Посчитаем кол-во n угольных пирамид, где $8 \geq n \geq 4$: Это есть $C_8^{n-1}\cdot 4$ (выбираем $n-1$ точку на окр и одну ~~во~~ из четырех во вне)

$(C_8^3 + C_8^4 + C_8^5 + C_8^6 + C_8^7 + C_8^8)\cdot 4 = (2^8 - C_8^2 - C_8^1 - C_8^0)\cdot 4 =$

$= (256 - 28 - 8 - 1)\cdot 4 = (255 - \cancel{23}\ 36)\cdot 4 = 219\cdot 4 = 876$

по известному тождеству $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Итого общее кол-во сп:

$425+876=1200+101=1301$

Ответ: 1301

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$5-4\sin\frac{9\pi}{14} \vee 3\sin\frac{3\pi}{14}-4\cos\frac{3\pi}{7}$

$x=\sin\frac{3\pi}{14}$

$16x^3-8x^2-15x+9 \vee 0$

$16\cdot 3x^2-16x-15 \vee 0$

$3x^2-x-\frac{15}{16} \vee 0$

$\cancel{3x^2-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{9}{16}} \vee 0$

$x^2-\frac{1}{3}x-\frac{5}{16} \vee 0$

$x^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{36}-\frac{5}{16}-\frac{1}{36} \vee 0$

$(x-\frac{1}{6})^2-\frac{5}{16}-\frac{1}{36} \vee 0$

$(x-\frac{1}{6}-\frac{7}{12})(x-\frac{1}{6}+\frac{7}{12}) \vee 0$

$(x-\frac{9}{12})(x+\frac{5}{12}) \vee 0$

$\frac{5}{16}+\frac{1}{36}=$

$=\frac{45+4}{36\cdot 4}=\frac{49}{36\cdot 4}=\frac{7}{2\cdot 6}$ $(\frac{7}{12})^2$

$\frac{\pi}{6}<\frac{3\pi}{14}<$

$<\frac{3\pi}{14}<\frac{12}{14}$

$\frac{9}{14}$

$+$ $+$ $-\frac{5}{12}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{9}{12}$

$\frac{3\pi}{14} \vee \frac{9}{12}$

$12\pi \vee 3\cdot 14$

$4\pi \vee 14$

$12\cdot 3\pi \vee 9\cdot 14$

$\frac{3\pi}{14}$

$3\pi \vee$

$\sin\frac{3\pi}{14} \vee \frac{9}{12}=\frac{3}{4}$

$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

$16\cdot\frac{1}{8}-8\cdot\frac{1}{4}-15\cdot\frac{1}{2}+9$

$2-2-7{,}5+9$

$\frac{9}{12}\cdot\frac{5}{12}=$

$=\frac{3\cdot 5}{16}$

$\frac{\pi}{6}$ $\frac{3\pi}{18}$

$\frac{3\pi}{12}=\frac{\pi}{4}$ $\frac{3\pi}{14}$

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\frac{1}{\sqrt{2}}$

$16\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-8\cdot\frac{1}{2}-15\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+9$

$\frac{8}{\sqrt{2}}-4-\frac{15}{\sqrt{2}}+9$

$-\frac{7}{\sqrt{2}}+5 \overset{?}{>} 0$

$5 \overset{?}{>} \frac{7}{\sqrt{2}}$

$5\sqrt{2}>7$

$25\cdot 2>49$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$x\ln 25 + y\ln 75 + z\ln 125 = \ln 45$ $\quad x^2+y^2+z^2$

$\ln 25^x + \ln 75^y + \ln 125^z = \ln 45$ $\quad \log_a^\alpha b + \log_a^\beta c = \log_a^\gamma bc$

$\ln 25^x \cdot 75^y \cdot 125^z = \ln 45$ $\quad a^\alpha = b \quad a^\beta = c \quad \alpha+\beta=\gamma \quad a^\gamma = bc$

$75 = 25\cdot 3$

$125 = 25 \cdot 5 = 5^3$

$25^x \cdot 75^y \cdot 125^z = 45$ $\quad x=0 \quad z=-1 \quad y=2$

$25^x \cdot 25$ $\quad 5^{2x}\cdot 5^{2y}\cdot 3^y \cdot 5^{3z} = 3^2\cdot 5$

$z = 2z_1+1$ $\quad \underset{1}{2x+2y+3z}$ $\quad y=2$ $\quad 9x_1^2+y^2z \to \min$

$2x_1+z=-1$ $\quad 2x+4+3z=1$ $\quad x \vdots 3$ $\quad 9x_1^2+(2z_1+1)^2$

$2x_1+2z_1+1=-1$ $\quad 2x+3z=-3$ $\quad x = 3x_1$ $\quad 9x_1^2+(-2-2x_1+1)^2$

$x_1+z_1=-1$ $\quad 2x_1+z=-1$ $\quad 9x_1^2+(-2x_1-1)^2$

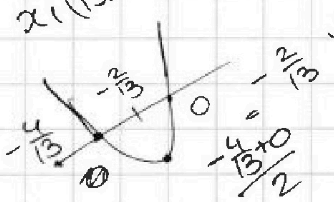
$z_1 = -1-x_1$ $\quad 2x_1 =$ $\quad 9x_1^2+4x_1^2+1+4x_1$

$\ln 25^x + \ln 75^y + \ln 125^z = \ln 45$

$x_1=0$ $\quad \ln \cdot 25^x \cdot 75^y \cdot 125^z = \ln 45$ $\quad \overset{0}{x} = 3x_1 \quad \overset{-1}{z} = 2z_1+1$

(4) $\quad 25^x\cdot 75^y \cdot 125^z = 45$ $\quad 2x_1+z=-1$

$x_1(13x_1+4) \to \min$ $\quad 5^{2x}\cdot 5^{2y}\cdot 3^y\cdot 5^{3z} = 3^2\cdot 5$ $\quad 2x_1+2z_1+1=-1$

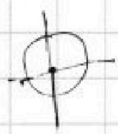


$-\frac{4}{13}$ $\quad -\frac{2}{13}$ $\quad 0$ $\quad -\frac{2}{13}$ $\quad \frac{-\frac{4}{13}+0}{2}$

$5^{2x+2y+3z}\cdot 3^y = 3^2\cdot 5$ $\quad 2x_1+2z_1=-2$

$x_1+z_1=-1$

$2x+4+3z=1$ $\quad z_1=-1-x_1$



$2x+3z=-3$

$(3x_1)^2+4+(\cancel{-1-x_1})^2 \to \min$ $\quad z = 2z_1+1 = \quad z_1=-1$

$2x_1+1$ $\quad = -2-2x_1+1 =$

$9x_1^2+4+4x_1^2+1+4x_1 \to \min$ $\quad = -2x_1-1$

$13x_1^2+4x_1 \to \min$

$\frac{\sqrt2}{2} < \frac{3}{4}$ $\quad \frac{\sqrt2}{2}$

$4\sqrt2 < 6$ $\quad 8<9$

$2\sqrt2 < 3$

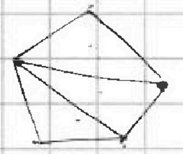
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

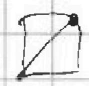
СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

1. $d = 2^\circ$
$\alpha_1 = 132^\circ$



~~n(~~ $n-2$



$(n-2)\cdot 180^\circ$

$d = a_{n+1} - a_n$

$$\frac{132^\circ + 132 + (n-1)\cdot 2^\circ}{2}\cdot n = (n-2)\cdot 180^\circ$$

$$\cancel{61^\circ}(66^\circ + 66^\circ + n - 1)\cdot n = (n-2)\cdot 180^\circ$$

$$\cancel{132^\circ}\ (131-n)n = 180n - 360$$

$$\cancel{131n^2}\ 131n - n^2 = 180n - 360$$

$$n^2 - 49n + 360 = 0$$

$49^2 - 4\cdot 360$

n верш

1) 132
2) 132+2
⋮
n) $132 + 2\cdot(n-1)$

$$\frac{132+132+2(n-1)}{2}\cdot n = (n-2)\cdot 180^\circ$$

$$(132 + (n-1))\cdot n = 180n - 360^\circ$$

$$131n + n^2 = 180n - 360$$

$$n^2 - 49n + 360 = 0$$

$49^2 - 360\cdot 4$

$2401 - 1440 = 961$

49×49: 441, 196, 2401

$360 \times 4 = 1440$

$961 = 31^2$

31×31: 31, 93, 961

$$\frac{49 \pm 31}{2} = \left[\begin{matrix} 9 \\ 40 \end{matrix}\right.$$

Ответ:

$132 + 2\cdot 38 =$
$= 132 + 60 + 18 = 132 + 18 + 60$

$\angle 132^\circ$

пром.
$150 + 60 > 180^\circ$, а он вогнут

49×49: 441, 196, 2401
1440
$2401 - 1440 = 961$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$M = n; n+1; n+2; \dots; n+6$ нат.

p

q

$p^2 - q^2 = 1080$

$(p-q)(p+q) = 1080$

$q, p \geq n + (n+1) + \dots + (n+5)$

$= \frac{2n+5}{2} \cdot 6 =$

$= (2n+5) \cdot 3 =$

$= 6n + 15$

$\cancel{p-q} \geq 6n+15 - (6n+21)$

$\leq (n+1) + \dots + (n+6) =$ $n \geq 1$

$= \frac{2n+7}{2} \cdot 6 =$

$= (2n+7) \cdot 3 =$

$= 6n + 21$

$6n+15 \leq \Sigma \leq 6n+21$

$6n+16 \leq \Sigma \leq 6n+20$

$6n+17 \leq \Sigma \leq 6n+19$

$6n+18$ – нет – много

$6n+17$
$6n+19$ > две суммы

~~$6n+17$~~

$(\cancel{6n}+19-\cancel{6n}-17)(6n+19+6n+17) = 1080$

$2 \cdot (6n+19+6n+17) = 1080$

~~$6n+$~~

$12n + 36 = 540$

$2n + 6 = 90$

$2n = 84$

$n = \cancel{32}\,42$

42; 43; 44; 45; 46; 47; 48

$6n+19$

$\parallel$

$240+12+19=$

$= 252+19 =$

$= 271$

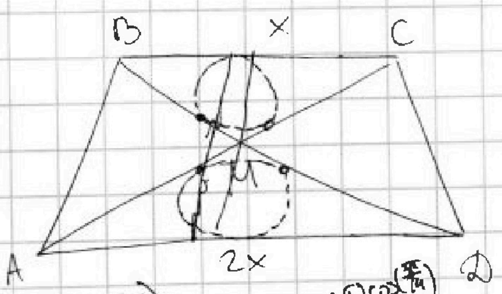
$q = 271 - 2 =$

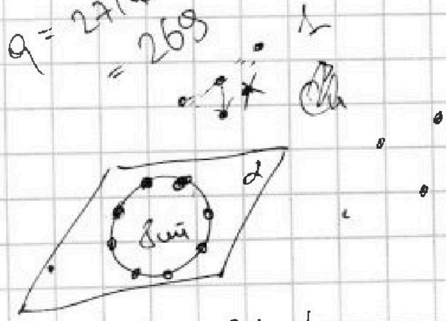
$= 269$

$5 - 4\sin\frac{9\pi}{14} \vee 3\sin\frac{3\pi}{14} -$

$-4\cos\frac{3\pi}{7}$

$\cos\frac{3\pi}{7} = 2\cos^2\frac{3\pi}{14} - 1$





$5-4$

$\sin\left(\frac{3\pi}{14} + \frac{3\pi}{7}\right) =$

$= \sin\left(\frac{3\pi}{14}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)$

$C_8^4 \cdot 4 +$

$+ C_8^3 \cdot 4 + C_8^5 \cdot 4 + C_8^6 \cdot 4 + C_8^7 \cdot 4 + 4$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

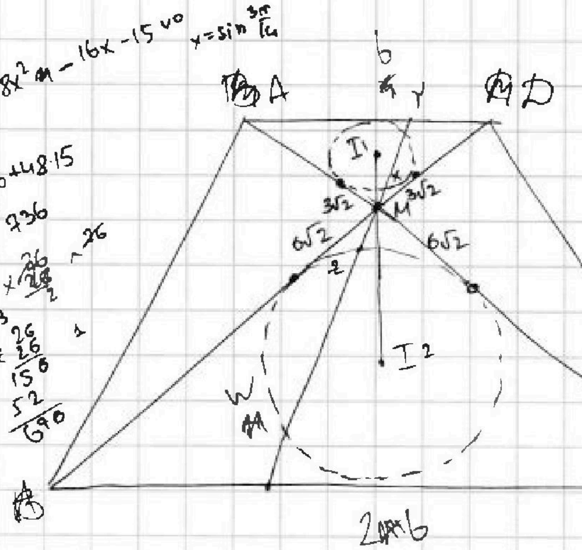
СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$48x^2 - 16x - 15 \vee 0$ $\quad x = \sin\frac{3\pi}{14}$

$16 + 48\cdot 15$

736



$2\cdot 6$

$I_1 I_8 = 8$

$k = 2$

$R_{\omega_1} - ?$

$MZ \cdot MY = 9$

$\frac{MX}{2} \cdot MY = 9$

$MX \cdot MY = 18 = kac^2$

$\boxed{kac = \sqrt{18} = 3\sqrt2}$

$\sin 3\alpha =$
$= \sin(2\alpha + \alpha) =$
$= \sin 2\alpha \cos\alpha +$
$+ \sin\alpha \cos 2\alpha =$
$= 2\sin\alpha\cos^2\alpha +$
$+ \sin\alpha(1 - 2\sin^2\alpha)$

$2\sin\alpha(1 - \sin^2\alpha) +$
$+ \sin\alpha - 2\sin^3\alpha$
$-4\sin^3\alpha + 3\sin\alpha$
$-4\cdot\frac34 + 3\cdot$

$26 \times 26 = 676$

$\frac{d^2 - r^2}{} =$ $\quad OM^2 - r^2 =$

$27 \times 16 = 162 + 27 = 392$

$8 = 2l + l$
$8 = 3l$
$l = \frac83$

$256 - 162 = 94$

$16 \times 16 = 96 + 16 = 256$

$18 \times 9 = 162$

$\frac{47\cdot 2}{9}$

$(x-1)($

$48 \times 15 = 240 + 48 = 720$

$\underbrace{5 - 4\sin\frac{9\pi}{14}}$ $\vee$ $\underbrace{3\sin\frac{3\pi}{14} - 4\cos\frac{3\pi}{7}}$

$3\sin\frac{3\pi}{14} - 4\left(1 - 2\sin^2\frac{3\pi}{14}\right) =$

$= 3\sin\frac{3\pi}{14} - 4 + 8\sin^2\frac{3\pi}{14}$

$\sin(3\alpha) = \sin(2\alpha + \alpha) =$

$= \sin 2\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos 2\alpha =$

$= 2\sin\alpha\cos^2\alpha + \sin\alpha(1 - 2\sin^2\alpha) =$

$= 2\sin\alpha\cos^2\alpha + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha$

$2\sin\alpha(1 - \sin^2\alpha) + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha =$

$= \boxed{3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha}$

$3\cdot\frac{\sqrt3}{2} - 4\cdot\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)^3 =$

$= \frac{3\sqrt3}{2} - \frac{3\sqrt3}{2} = 0.$

~~$5 - 4(3\sin x - 4$~~

$5 - 4(3x - 4x^3) \vee$

$\vee\ 3x - 4(1 - 2x^2)$

$5 - \cancel{12x} + 16x^3 \vee \cancel{3x} - 4 + 8x^2$

$16 - 8 - 15 + 9$

$16x^3 - 8x^2 - 15x + 9 \vee 0$ $\quad 16\cdot 27 - 8\cdot 9 - 15\cdot 3 + 9$