

МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 12



1. [3 балла] Углы выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию, имеющую разность  $2^\circ$  и начинающуюся с угла  $132^\circ$ . Какое наибольшее число вершин может быть у такого многоугольника?
2. [4 балла] Целые числа  $x, y, z$  удовлетворяют равенству  $x \ln 25 + y \ln 75 + z \ln 125 = \ln 45$ . Найдите наименьшее возможное значение выражения  $x^2 + y^2 + z^2$ .
3. [4 балла] Из множества  $M$ , состоящего из семи подряд идущих натуральных чисел, выбираются шестёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из шестёрок – простое число. Пусть  $p$  и  $q$  – две из таких сумм. Найдите множество  $M$ , если  $p^2 - q^2 = 1080$ .
4. [5 баллов] Диагонали  $BD$  и  $AC$  трапеции  $ABCD$  пересекаются в точке  $M$ , а отношение оснований  $AD : BC = 1 : 2$ . Точки  $I_1$  и  $I_2$  – центры окружностей  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , вписанных в треугольники  $BMC$  и  $AMD$  соответственно. Прямая, проходящая через точку  $M$ , пересекает  $\omega_1$  в точках  $X$  и  $Y$ , а  $\omega_2$  – в точках  $Z$  и  $W$  ( $X$  и  $Z$  находятся ближе к  $M$ ). Найдите радиус окружности  $\omega_1$ , если  $I_1I_2 = 8$ , а  $MZ \cdot MY = 9$ .
5. [5 баллов] Что больше:  $5 - 4 \sin \frac{9\pi}{14}$  или  $3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos \frac{3\pi}{7}$ ?
6. [4 балла] Даны 12 точек: 8 из них лежат на одной окружности в плоскости  $\alpha$ , а остальные 4 расположены вне плоскости  $\alpha$ . Известно, что если четыре точки из всех 12 лежат в одной плоскости, то эта плоскость –  $\alpha$ . Сколько существует выпуклых пирамид с вершинами в данных точках?
7. [6 баллов] Дана правильная шестиугольная пирамида  $SABCDEF$  ( $S$  – вершина) со стороной основания 1 и боковым ребром  $\sqrt{2}$ . Точка  $X$  лежит на прямой  $SF$ , точка  $Y$  – на прямой  $AD$ , причём отрезок  $XY$  параллелен плоскости  $SAB$  (или лежит в ней). Найдите наименьшую возможную длину отрезка  $XY$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1. Пусть разность прогрессии  $d = 2^\circ$ , а её члены  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  —  $n$  углов

Тогда  $\alpha_1 = 132^\circ$ ;  $\alpha_2 = 132^\circ + d$ ; ...;  $\alpha_n = 132^\circ + (n-1)d$ .

Посчитаем сумму углов многоугольника 2мя способами:

1) По формуле для суммы членов арифм. прогр:

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_n}{2} \cdot n = \frac{132^\circ + 132^\circ + (n-1)d}{2} \cdot n = \frac{132 \cdot 2 + (n-1) \cdot 2}{2} \cdot n$$

2) Сумма углов выпуклого <sup>много</sup>угольника есть:  $(n-2) \cdot 180^\circ$  по известной формуле, где  $n$  — кол-во углов.

Тогда получаем:

$$\frac{132 \cdot 2 + (n-1) \cdot 2}{2} \cdot n = (n-2) \cdot 180$$

$$(132 + n - 1) \cdot n = 180n - 360$$

$$131n + n^2 = 180n - 360$$

$$n^2 - 49n + 360 = 0$$

$$D = 49^2 - 4 \cdot 360 = 961 = 31^2$$

$$n = \frac{49 \pm 31}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 40 \\ n = 9 \end{cases}$$

Если  $n = 40$ , то  $a_n = 132 + (40-1) \cdot 2 = 132 + 39 \cdot 2 = 132 + 78 = 210 > 180$ , однако многоугольник выпуклый  $\Rightarrow$  все его углы не могут любой его угол не может быть  $> 180^\circ \Rightarrow n = 40$  не реализуется.

Если  $n = 9$ , то  $a_1 = 132^\circ, a_2 = 134^\circ; \dots; a_9 = 132^\circ + 2 \cdot 8^\circ = 132^\circ + 16^\circ = 148^\circ$ . Очевидно, такой многоугольник существует.

Ответ: наибольшее число вершин: 9.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2. \quad x \cdot \ln 25 + y \cdot \ln 75 + z \cdot \ln 125 = \ln 45$$

$$\ln 25^x + \ln 75^y + \ln 125^z = \ln 45$$

$$\ln(25^x \cdot 75^y \cdot 125^z) = \ln 45$$

Т.к.  $\ln f(x) = \ln x$  — <sup>монотонная</sup> ~~возрастает~~ функция, то:

$$25^x \cdot 75^y \cdot 125^z = 45 \quad \text{— равносильное условие}$$

$$(5^2)^x \cdot (5^2 \cdot 3)^y \cdot (5^3)^z = 3^2 \cdot 5$$

$$5^{2x} \cdot 5^{2y} \cdot 3^y \cdot 5^{3z} = 3^2 \cdot 5$$

$$5^{2x+2y+3z} \cdot 3^y = 5^1 \cdot 3^2$$

По основной теореме арифметики каждое из чисел единств. образом раскладывается на простые множители; а значит последнее условие равносильно:

$$\begin{cases} 2x+2y+3z=1 \\ y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3z+4=1 \\ y=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3z=-3 & (1) \\ y=2 & (2) \end{cases}$$

$\therefore$  — решение на

Рассмотрим (1):  $2x+3z=-3$ .  $3z:3$ ,  $-3:3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x:3 \Rightarrow x:3$ . Пусть  $x=3x_1$ . Подставим:

$$2 \cdot 3x_1 + 3z = -3$$

$$2x_1 + z = -1. \quad 2x_1 \text{ — чётное число; } -1 \text{ — не}$$

чётное  $\Rightarrow z$  — также нечётное число как разность нечётного и чётного. Пусть  $z=2z_1+1$ . Под-



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

ставим:  $2x_1 + (2z_1 + 1) = -1$   
 $2x_1 + 2z_1 = -2$   
 $x_1 + z_1 = -1 \Leftrightarrow z_1 = -1 - x_1.$

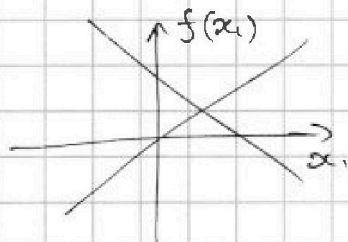
Выражение  $x^2 + y^2 + z^2$  минимально  $\Leftrightarrow x^2 + z^2$  минимально, ведь  $y = 2$ , как было показано ранее.

$$x^2 + z^2 = (3x_1)^2 + (2z_1 + 1)^2 = (3x_1)^2 + (2 \cdot (-1 - x_1) + 1)^2 =$$

$$= 9x_1^2 + (-2x_1 - 1)^2 = 9x_1^2 + (2x_1 + 1)^2 = 9x_1^2 + 4x_1^2 + 1 + 4x_1 =$$

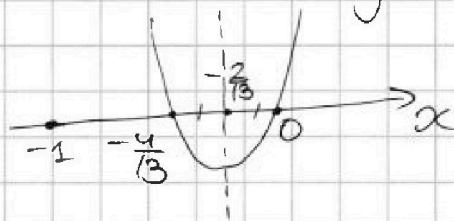
$$= 13x_1^2 + 4x_1 + 1.$$

$13x_1^2 + 4x_1 + 1$  — минимально  $\Leftrightarrow 13x_1^2 + 4x_1$  — минимально. Исследуем  $f(x_1) = 13x_1^2 + 4x_1 = x_1(13x_1 + 4)$



$$f(x) = 13x^2 + 4x = x(13x + 4),$$

где  $x \in \mathbb{R}$



Графиком  $f(x)$  является парабола с ветвями вверх.

минимум  $f(x)$  достигается при  $x_0 = -\frac{4/13 + 0}{2} = -\frac{2}{13}$ , и чем больше разности между абсциссой произвольной точки графика и  $x_0$ , тем больше значение  $f(x)$  в этой точке  $\Rightarrow$  т.к.  $x_1 \in \mathbb{Z}$ , то минимальное значение

$$13x_1^2 + 4x_1 = 13 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 = 0 \text{ при } x_1 = 0, \text{ т.к.}$$

$x_1 = 0$  — ближайшая целая абсцисса к  $-\frac{2}{13}$

$$\Rightarrow \text{наим. значение } x^2 + y^2 + z^2 = (3x_1)^2 + 2^2 + (-2x_1 - 1)^2 =$$

$$= 4 + 1 = 5 \text{ и достигается при } x = 3x_1 = 0; y = 2; z = (-2x_1 - 1) = -1.$$

Ответ: наим. значение равно 5; достиг. при  $x = 0; y = 2; z = -1.$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3. Пусть  $n$ -компл. элемент множества  $M = \{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5, n+6\}$ .  $n$ -компл.

Минимальная сумма в мешочке есть сумма 6 самых маленьких элементов  $M$ :

$$n + (n+1) + \dots + (n+5) = \frac{2n+5}{2} \cdot 6 = (2n+5) \cdot 3 = 6n+15$$

Максимальная сумма в мешочке есть сумма 6 самых больших элементов  $M$ :

$$(n+1) + (n+2) + \dots + (n+6) = \frac{2n+7}{2} \cdot 6 = (2n+7) \cdot 3 = 6n+21$$

Т.е. любая сумма, проходящая под условие (обозначим её  $\Sigma$ ) удовлетворяет нер-ву:

$$6n+15 \leq \Sigma \leq 6n+21.$$

Заметим, что  $6n+21 > 21$ , а также  $6n+21 : 3 \Rightarrow \Rightarrow$  это не простое число  $\Rightarrow \Sigma \neq 6n+21$ . Также  $6n+20 > 20$  и  $6n+20 : 2 \Rightarrow 6n+20$  - составное и  $\Sigma \neq 6n+20$ .

Аналогично,  $6n+15 > 15$  и  $6n+15 : 3 \Rightarrow \Sigma \neq 6n+15$

А ещё  $6n+16 > 16$  и  $6n+16 : 2 \Rightarrow \Sigma \neq 6n+16$

Получаем следующую оценку на  $\Sigma$ :

$$6n+17 \leq \Sigma \leq 6n+19, \text{ но } \Sigma \neq 6n+18, \text{ т.к. это число } : 2$$

Таких  $\leftarrow$  и  $> 18$   
сумм только

две:  $6n+17$  и  $6n+19$

По условию:  $p^2 - q^2 = 1080 \Rightarrow p^2 > q^2 \Rightarrow p > q$ , т.к.

Значит:  $p = 6n+19$

$q = 6n+17$ . Подставим в

равенство (\*):

$p, q \in \mathbb{N}$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Получим: } (6n+19)^2 - (6n+17)^2 = 1080$$

$$((6n+19) - (6n+17))((6n+19) + (6n+17)) = 1080$$

$$2 \cdot (12n + 36) = 1080$$

$$12n + 36 = 540$$

$$2n + 6 = 90$$

$$2n = 84 \Leftrightarrow n = 42.$$

по условию  
существует

Значит искомым множеством  $M = \{42, 43, 46, 45, 46, 47, 48\}$ . Тогда  $p = 6 \cdot 42 + 19 = 271$  и  $q = 6 \cdot 42 + 17 = 269$   
действ. простые  
числа.

Ответ:  $M = \{42, 43, 44, 45, 46, 47, 48\}$

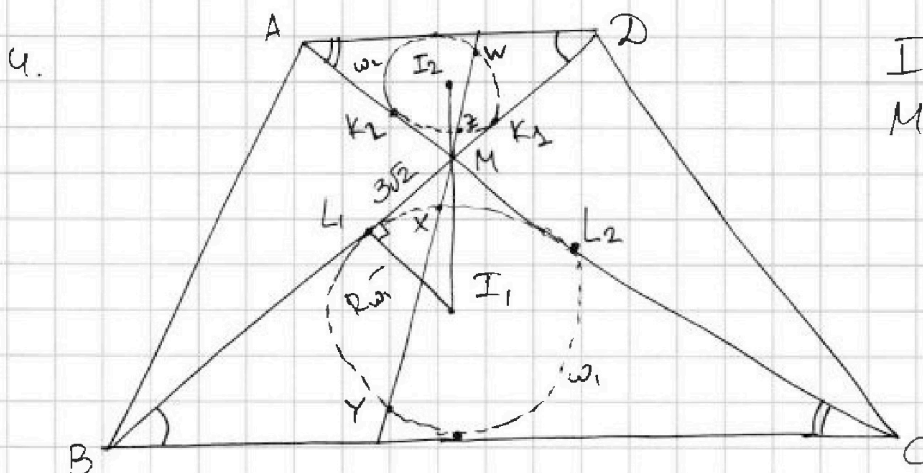


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$I_1 I_2 = 8$$

$$MZ \cdot MY = 9$$

$$\frac{AD}{BC} = \frac{1}{2}$$

$K_1, K_2, L_1, L_2$  — точки касания окр. со сторонами

Решение: Т.к.  $AD \parallel BC$  (это трапеция) в трапеции, то  $\angle CBM = \angle ADM$ ;  $\angle BCM = \angle DAM$  как накрест лежащие при параллельных прямых  $AD$  и  $BC$ , а значит  $\triangle MBC \sim \triangle MDA$  по 2м углам.

Из подобия следует, что все соответствующие элементы данных треугольников относятся друг к другу как коэффициенты подобия, т.е.  $k = \frac{BC}{AD} = 2$ . Тогда получим, что  $\frac{MX}{MZ} = 2$ ,

ведь при  $MX$  и  $MY$  являются соответственными в  $\triangle MDA$  и  $\triangle MBC$ , т.к. отломим по равным углам от соответственных сторон  $MB$  и  $MD$  ( $\angle BMX = \angle BMX = \angle DMW$ , как верт.), ну и сами вписанные окружности треугольников также подобны. Тогда:  $MZ \cdot MY = 9$

где  $T.M \cdot \omega_1$   $\frac{MX}{2} \cdot MY = 9$

$$MX \cdot MY = 18$$

По Th. о касательной и  $\sqrt{\phantom{x}}$  существует к окружности  $\omega_1$ :  $MX \cdot MY = ML_1^2 = 18$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Тогда  $MI_1 = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ .

Из подобия  $\triangle MBC$  и  $\triangle MDA$  можно сделать вывод о том, что точки  $I_1, M, I_2$  лежат на одной прямой, т.к. точки  $I_1$  и  $I_2$  — соответственные в этих треугольниках, а значит соответственные отрезки  $MI_1$  и  $MI_2$  исковет по равенству углам к соответственным сторонам, т.е.  $\angle BMI_1 = \angle DMI_2$ , а значит  $MI_2$  и  $MI_1$  стремятся в  $I_1, I_2$ , проходящей через  $M$ . Котакже из соображений подобия  $\frac{MI_1}{MI_2} = 2 = k$ , т.е.  $MI_1 = 2MI_2$ .

$$I_1 I_2 = I_1 M + I_2 M = MI_1 + \frac{MI_1}{2} = \frac{3}{2} MI_1 = 8$$

$$\Rightarrow MI_1 = \frac{8 \cdot 2}{3} = \frac{16}{3}. \text{ Проведём радиус } I_1 L_1$$

в точку касания  $L_1$ , которой перпендикулярна касательной по свойству. Тогда по Теореме Пифагора:

$$MI_1^2 = ML_1^2 + I_1 L_1^2$$

$$\left(\frac{16}{3}\right)^2 = (3\sqrt{2})^2 + R_{\omega_1}^2 \Rightarrow R_{\omega_1}^2 = \frac{16^2}{9} - 18 = \frac{256 - 18 \cdot 9}{9} = \frac{256 - 162}{9} = \frac{94}{9} \Rightarrow R_{\omega_1} = \frac{\sqrt{94}}{3} - \text{искали радиус окружности } \omega_1.$$

Ответ:  $R_{\omega_1} = \frac{\sqrt{94}}{3}$ .





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$5. 5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14} \sqrt{3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos \frac{3\pi}{7}}$$

$\sin \frac{3\pi}{14} = \sin \frac{9\pi}{14} = \sin(3 \cdot \frac{3\pi}{14}) = 3 \sin(\frac{3\pi}{14}) - 4 \sin^3(\frac{3\pi}{14})$  по формуле синуса тройного угла.

$\cos \frac{3\pi}{7} = \cos(2 \cdot \frac{3\pi}{14}) = 2 \cos^2 - 1 = 2(1 - 2 \sin^2(\frac{3\pi}{14})) - 1$  по формуле косинуса двойного угла.

$$5 - 4(3 \sin(\frac{3\pi}{14}) - 4 \sin^3(\frac{3\pi}{14})) \sqrt{3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4(1 - 2 \sin^2(\frac{3\pi}{14}))}$$

Пусть  $\sin(\frac{3\pi}{14}) = x$

$$5 - 4(3x - 4x^3) \sqrt{3x - 4(1 - 2x^2)}$$

$$5 - 12x + 16x^3 \sqrt{3x - 4 + 8x^2}$$

$$16x^3 - 8x^2 - 15x + 9 \geq 0$$

Рассмотрим  $f(x) = 16x^3 - 8x^2 - 15x + 9$

Найдем корни:  $f'(x) = 16 \cdot 3x^2 - 16x - 15 =$   
 $= \frac{1}{16} \cdot 3(x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{5}{16}) = \frac{1}{16} \cdot 3(x - \frac{3}{12})(x + \frac{5}{12})$



Видим, что на промежутке  $[0; \frac{3}{4}]$  функция  $f(x)$  убывает. Заметим, что  $\sin(\frac{3\pi}{14}) < \frac{3}{4}$ , т.к.

$$\sin(\frac{3\pi}{14}) < \sin(\frac{3\pi}{12}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{3}{4} \quad (\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{3}{4})$$

~~при этом при этом  $\sin(\frac{3\pi}{14}) > 0$ , т.к.  $4\sqrt{2} < 6$   
 $2\sqrt{2} < 3$   
 $8 < 9$~~

~~Заметим, что  $\sin(\frac{3\pi}{18}) < \sin(\frac{3\pi}{14})$ , т.к. оба угла в I четверти и  $\frac{3\pi}{18} < \frac{3\pi}{14} \Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow$  Если  $f(\sin(\frac{3\pi}{18})) < 0$ , то и  $f(\sin(\frac{3\pi}{14})) < 0$ ,~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Т.к.  $f(x)$  на  $[0; \frac{3}{4}]$  убывает, как было доказано ранее.~~

~~Найдём  $f(\sin(\frac{3\pi}{14})) = f(\sin(\frac{\pi}{6})) = f(\frac{1}{2})$~~

~~$f(\frac{1}{2}) = 16 \cdot (\frac{1}{2})^3 - 8 \cdot (\frac{1}{2})^2 - 15 \cdot \frac{1}{2} + 9 = 2 - 2 - 7,5 + 9$~~

Также  $\sin(\frac{3\pi}{14}) > 0$ , т.к.  $\frac{3\pi}{14} \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$ .

Заметим, что  $\sin(\frac{3\pi}{14}) < \sin(\frac{3\pi}{12}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,

т.к.  $\frac{3\pi}{12} > \frac{3\pi}{14}$  и оба угла в I четверти.

Найдём  $f(\sin(\frac{\pi}{4})) = f(\frac{1}{\sqrt{2}})$ :

$$\begin{aligned} f(\frac{1}{\sqrt{2}}) &= 16 \cdot (\frac{1}{\sqrt{2}})^3 - 8 \cdot (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 - 15 \cdot (\frac{1}{\sqrt{2}}) + 9 = \\ &= 16 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - 8 \cdot \frac{1}{2} - 15 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 9 = \frac{8}{\sqrt{2}} - 4 - \frac{15}{\sqrt{2}} + 9 = \\ &= -\frac{7}{\sqrt{2}} + 5 > 0, \text{ т.к. } 5 > \frac{7}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$25 > \frac{49}{2}$$

$$50 > 49$$

$\Rightarrow f(\sin \frac{3\pi}{14})$  также больше нуля, поскольку  $f(x)$  убывает на  $[0; \frac{3}{4}]$ , как было доказано ранее.  $\Rightarrow f(x) >$  знак в исходном неравенстве ( $>$ ), т.е.

$$5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14} > 3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos \frac{3\pi}{14}.$$

Ответ:  $5 - 4 \sin \frac{3\pi}{14} > 3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos \frac{3\pi}{14}.$

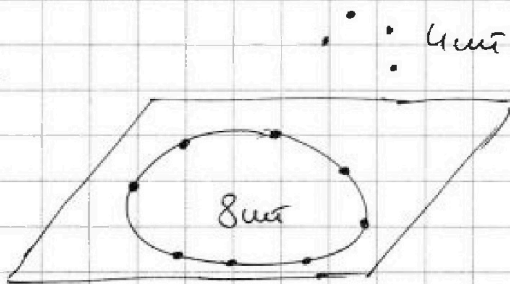


1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6.



Кол-во трёхугольных пирамид равно кол-ву способов выбрать четыре точки, не лежащие на одной плоскости, т.е.

это кол-во равно:

$$1) \text{ Три точки на окр. одна во вне } d: C_8^3 \cdot 4 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} \cdot 4 = 56 \cdot 4 = 224.$$

$$2) \text{ две точки на окр, две во вне } d: C_2^2 \cdot C_4^2 = \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} = \frac{56}{2} \cdot \frac{12}{2} = 28 \cdot 6 = 120 + 48 = 168$$

$$3) \text{ три точки во вне, одна на окр: } C_{\frac{23}{4}}^3 \cdot 8 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3!} \cdot 8 = 32$$

Всего:

$$u) \text{ все четыре точки снаружи: } 1 \text{ способ (берём все 4 точки)}$$

$$\text{Всего: } 224 + 168 + 32 + 1 = 225 + 200 = 425 \text{ сп.}$$

Посчитаем кол-во  $n$ -угольных пирамид где  $8 \geq n \geq 4$ : Это есть  $C_8^{n-1} \cdot 4$  (выбираем  $n-1$  точку на окр и одну во из четырех во вне)

$$(C_8^3 + C_8^4 + C_8^5 + C_8^6 + C_8^7 + C_8^8) \cdot 4 = (2^8 - C_8^2 - C_8^1 - C_8^0) \cdot 4 =$$

$$= (256 - 28 - 8 - 1) \cdot 4 = (255 - 36) \cdot 4 = 219 \cdot 4 = 876$$

по известному тождеству  $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Итого общее кол-во см:

$$425 + 876 = 1200 + 101 = 1301$$

Ответ: 1301



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$5 - 4 \sin \frac{9\pi}{14} \vee 3 \sin \frac{3\pi}{14} - 4 \cos \frac{3\pi}{7}$$

$$16x^2 - 8x^2 - 15x + 9 \vee 0$$

$$163x^2 - 16x - 15 \vee 0$$

$$3x^2 - x - \frac{15}{16} \vee 0$$

$$3x^2 - 2 \cdot \frac{1}{3}x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{15}{16} \vee 0$$

$$x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{5}{16} \vee 0$$

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{36} - \frac{5}{16} - \frac{1}{36} \vee 0$$

$$(x - \frac{1}{6})^2 - \frac{5}{16} - \frac{1}{36} \vee 0$$

$$(x - \frac{1}{6} - \frac{7}{12})(x - \frac{1}{6} + \frac{7}{12}) \vee 0$$

$$(x - \frac{9}{12})(x + \frac{5}{12}) \vee 0$$

$$16 \cdot \frac{1}{8} - 8 \cdot \frac{1}{4} - 15 \cdot \frac{1}{2} + 9$$

$$-2 - 2 - 7,5 + 9$$

$$\frac{9}{12} \cdot \frac{5}{12} =$$

$$= \frac{3 \cdot 5}{16}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$16 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - 8 \cdot \frac{1}{2} - 15 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 9$$

$$\frac{8}{\sqrt{2}} - 4 - 7,5 \frac{15}{\sqrt{2}} + 9$$

$$-\frac{7}{\sqrt{2}} + 5 > 0$$

$$5 > \frac{7}{\sqrt{2}}$$

$$5\sqrt{2} > 7$$

$$25 \cdot 2 > 49$$

$$\frac{5}{16} + \frac{1}{36} =$$

$$x = \sin \frac{3\pi}{14}$$

$$= \frac{45+4}{36 \cdot 4} = \frac{49}{36 \cdot 4} = \frac{7}{2 \cdot 6} \left(\frac{7}{12}\right)^2$$

$$\frac{\pi}{6} < \frac{3\pi}{14} < \frac{12\pi}{14}$$

$$\frac{3\pi}{14} < \frac{12}{14}$$

$$\frac{8}{14}$$

$$12\pi \vee 3 \cdot 14$$

$$4 \cdot 8\pi \vee 14$$

$$24 \cdot$$

$$12 \cdot 3\pi \vee 9 \cdot 14$$

$$\times 12$$

$$\sin \frac{3\pi}{14} \vee \frac{3}{4}$$

$$\sin \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{3\pi}{12}$$

$$\frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{3\pi}{14}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x \ln 25 + y \ln 75 + z \ln 125 = \ln 45$$

$$\ln 25^x + \ln 75^y + \ln 125^z = \ln 45$$

$$\ln 25^x \cdot 75^y \cdot 125^z = \ln 45$$

$$25^x \cdot 75^y \cdot 125^z = 45$$

$$25^x \cdot 25 \cdot 5^{2x} \cdot 5^{2y} \cdot 3^y \cdot 5^{3z} = 3^2 \cdot 5$$

$$z = 2z_1 + 1$$

$$2x_1 + z = -1$$

$$2x_1 + 2z_1 + 1 = -1$$

$$x_1 + z_1 = -1$$

$$z_1 = -1 - x_1$$

$$2x + 2y + 3z = 1 \quad (y=2)$$

$$2x + 4 + 3z = 1$$

$$2x + 3z = -3$$

$$2x_1 + z = -1$$

$$2x_1 =$$

$$x^2 + y^2 + z^2$$

$$\log_a^p b + \log_a^p c = r$$

$$= \log_a^p bc$$

$$\frac{a^p = b}{a^p = c} \Rightarrow a^p = bc$$

$$75 = 25 \cdot 3 \quad a^2 = b$$

$$125 = 25 \cdot 5 = 5^3 \quad a^p = c$$

$$\begin{cases} x=0 \\ z=-1 \\ y=2 \end{cases}$$

$$9x_1^2 + y_1^2 \rightarrow \min$$

$$9x_1^2 + (2z_1 + 1)^2$$

$$9x_1^2 + (-2 - 2x_1 + 1)^2$$

$$9x_1^2 + (-2x_1 - 1)^2$$

$$8x_1^2 + 4x_1^2 + 1 +$$

$$+ 4x_1 - 1$$

$$x = 3x_1, z = 2z_1 + 1$$

$$2x_1 + z = -1$$

$$2x_1 + 2z_1 + 1 = -1$$

$$2x_1 + 2z_1 = -2$$

$$x_1 + z_1 = -1$$

$$z_1 = -1 - x_1$$

$$z = 2z_1 + 1 = z_1 - 1$$

$$= -2 - 2x_1 + 1 =$$

$$= -2x_1 - 1$$

$$\ln 25^x + \ln 75^y + \ln 125^z = \ln 45$$

$$\frac{x_1=0}{(u)}$$

$$\ln 25^x \cdot 75^y \cdot 125^z = \ln 45$$

$$25^x \cdot 75^y \cdot 125^z = 45$$

$$5^{2x} \cdot 5^{2y} \cdot 3^y \cdot 5^{3z} = 3^2 \cdot 5$$

$$5^{2x+2y+3z} \cdot 3^y = 3^2 \cdot 5$$

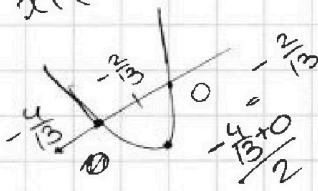
$$2x + 4 + 3z = 1$$

$$2x + 3z = -3$$

$$(3x_1)^2 + 4 + \frac{(-1-x_1)^2}{2x_1+1} \rightarrow \min$$

$$8x_1^2 + 4 + 4x_1^2 + 1 + 4x_1 \rightarrow \min$$

$$13x_1^2 + 4x_1 \rightarrow \min$$



$$\frac{\sqrt{2} \cdot 3}{2} < 6$$

$$4\sqrt{2} < 6$$

$$2\sqrt{2} < 3$$

$$8 < 9$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$



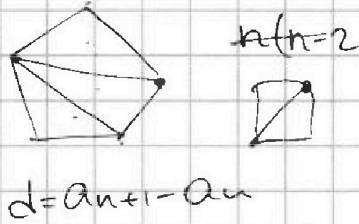
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1.  $d=2^\circ$   
 $\alpha=132^\circ$



$(n-2) \cdot 180^\circ$

$\frac{132^\circ + 132^\circ + (n-1) \cdot 2^\circ}{2} \cdot n = (n-2) \cdot 180^\circ$

$61^\circ (66^\circ + 66^\circ + n - 1) \cdot n = (n-2) \cdot 180^\circ$

$132^\circ (131 - n) \cdot n = 180n - 360$

$n$  верш

$131n^2 - 131n - n^2 = 180n - 360$

1) 132

2)  $132+2$

а)  $132 + 2 \cdot (n-1)$

$\frac{132 + 132 + 2(n-1) \cdot n}{2} = (n-2) \cdot 180^\circ$

$n^2 - 49n + 360 = 0$

$(132 + (n-1)) \cdot n = 180n - 360^\circ$

$49^2 - 360 \cdot 4$

$131n + n^2 = 180n - 360$

$\frac{2401}{1440} \underline{\quad} 961$

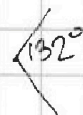
$\begin{array}{r} 8 \\ \times 49 \\ 1 \underline{49} \\ 1441 \\ 196 \\ \hline 2401 \end{array}$

$\begin{array}{r} 2 \\ \times 360 \\ 1440 \end{array}$

$961 = 31^2$

$\frac{49 \pm 31}{2} = \begin{matrix} (9) \\ (40) \end{matrix}$

Ответ:  $\begin{array}{r} \times 31 \\ 31 \\ 31 \\ \hline 93 \\ 961 \end{array}$



$132 + 2 \cdot 38 =$

$= 132 + 60 + 18 = 132 + 18 + 60$

кром.  
 $150 + 60 > 180^\circ$   
а он  
возник

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$M = u; u+1; u+2; \dots; u+6 \text{ чисел.}$$

$$p^2 - q^2 = 1080 \quad q, p \geq u + (u+1) + \dots + (u+5)$$

$$(p-q)(p+q) = 1080 \quad = \frac{2u+5}{2} \cdot 6 =$$

$$p-q \geq 6u+15 - (6u+21) \quad = (2u+5) \cdot 3 =$$

$$6u+15 \leq \Sigma \leq 6u+21 \quad = 6u+15$$

$$6u+16 \leq \Sigma \leq 6u+20$$

$$6u+17 \leq \Sigma \leq 6u+18$$

$$6u+17 > 6u+18 \text{ - не может}$$

$$u_2; u_3; u_4; u_5; u_6; u_7; u_8$$

$$\leq (u+1) + \dots + (u+6) = \quad n \geq 1$$

$$= \frac{2u+7}{2} \cdot 6 =$$

$$= (2u+7) \cdot 3 =$$

$$= 6u+21$$

$$(6u+18 - 6u - 17)(6u+18 + 6u + 17) = 1080$$

$$2 \cdot (6u+18 + 6u + 17) = 1080$$

$$12u + 36 = 1080$$

$$2u + 6 = 90$$

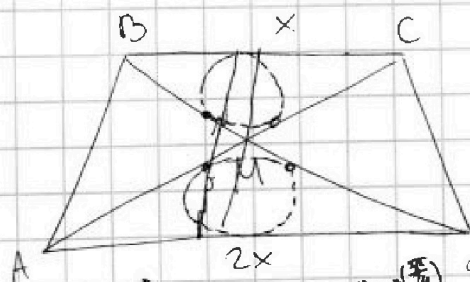
$$2u = 84$$

$$u = 42$$

$$5 - 4 \sin \frac{9\pi}{14} \sqrt{3} \sin \frac{3\pi}{14} -$$

$$- 4 \cos \frac{3\pi}{7}$$

$$\cos \frac{3\pi}{7} = 2 \cos^2 \frac{3\pi}{14} - 1$$

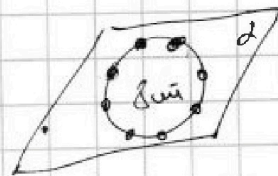


$$\sin \left( \frac{3\pi}{14} + \frac{3\pi}{14} \right) =$$

$$= \sin \left( \frac{3\pi}{7} \right) \cos \left( \frac{3\pi}{14} \right) + \sin \left( \frac{3\pi}{14} \right) \cos \left( \frac{3\pi}{7} \right)$$

$$5 - u$$

$$C_8^4 \cdot 4 + C_8^3 \cdot 4 + C_8^5 \cdot 4 + C_8^6 \cdot 4 + C_8^7 \cdot 4 + 4$$







На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$48x^2 - 16x - 15 = 0 \quad x = \sin \frac{3\pi}{14}$   
 $16 \pm 48 \pm 15$   
 $936$   
 $\times \frac{26}{2}$   
 $\frac{26}{2}$   
 $\times \frac{26}{2}$   
 $\frac{26}{2}$   
 $\frac{52}{696}$

$II_1 = 8$   
 $k = 2$   $R_{\omega_1}?$   
 $MZ \cdot MY = 9$   
 $\frac{MX}{2} \cdot MY = 9$   
 $MX \cdot MY = 18 = kac^2$   
 $kac = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos 2\alpha = 2\sin \alpha \cos^2 \alpha + \sin \alpha (1 - 2\sin^2 \alpha)$   
 $2\sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) + \sin \alpha - 2\sin^3 \alpha = -4\sin^3 \alpha + 3\sin \alpha$   
 $-4 \cdot \frac{3}{4} + 3 \cdot \frac{1}{2}$

$8 = 2kl$   
 $8 = 3l$   
 $l = \frac{8}{3}$

$\frac{256}{84}$   
 $\frac{42 \cdot 2}{9}$

$\frac{d^2 + f^2}{OM^2 - r^2} =$   
 $\frac{16}{96}$   
 $\frac{16}{256}$

$\frac{7}{16} \times \frac{18}{9}$   
 $(x-1)$

$5 - 4\sin \frac{9\pi}{14} \sqrt{3\sin \frac{3\pi}{14} - 4\cos \frac{3\pi}{7}}$

$3\sin \frac{3\pi}{14} - 4(1 - 2\sin^2 \frac{3\pi}{14}) = 3\sin \frac{3\pi}{14} - 4 + 8\sin^2 \frac{3\pi}{14}$   
 $3\sin \frac{3\pi}{14} - 4 + 8\sin^2 \frac{3\pi}{14}$

$2\sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) + \sin \alpha - 2\sin^3 \alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha$   
 $3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 4 \cdot (\frac{\sqrt{3}}{2})^3 = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = 0$

$\sin(3\alpha) = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos 2\alpha = 2\sin \alpha \cos^2 \alpha + \sin \alpha (1 - 2\sin^2 \alpha) = 2\sin \alpha \cos^2 \alpha + \sin \alpha - 2\sin^3 \alpha$

$5 - 12x + 16x^3 \sqrt{3x - 4 + 8x^2}$   
 $16x^3 - 8x^2 - 15x + 8 \sqrt{16 - 24x + 8x^2}$

$5 - 4(3\sin x - 4)$   
 $5 - 4(3x - 4x^3) \sqrt{3x - 4(1 - 2x^2)}$   
 $16 - 8 - 15 + 8$