МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 11

1. [3 балла] Углы выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию, имеющую разность 2° и начинающуюся с угла 143°. Какое наибольшее число вершин может быть у такого многоугольника?

2. [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x\ln 16 + y\ln 8 + z\ln 24 = \ln 6$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2+y^2+z^2$.

3. [4 балла] Из множества M, состоящего из семи подряд идущих натуральных чисел, выбираются шестёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из шестёрок – простое число. Пусть p и q – две из таких сумм. Найдите множество M, если $p^2-q^2=792$.

4. [5 баллов] Диагонали BD и AC трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M, а отношение оснований $AD:BC=1:2$. Точки I_1 и I_2 – центры окружностей ω_1 и ω_2, вписанных в треугольники BMC и AMD соответственно. Прямая, проходящая через точку M, пересекает ω_1 в точках X и Y, а ω_2 – в точках Z и W (X и Z находятся ближе к M). Найдите радиус окружности ω_1, если $I_1I_2=13/2$, а $MZ\cdot MY=5$.

5. [5 баллов] Что больше: $5-4\sin\dfrac{3\pi}{14}$ или $4\cos\dfrac{\pi}{7}-5\sin\dfrac{\pi}{14}$?

6. [4 балла] Даны 12 точек: 7 из них лежат на одной окружности в плоскости α, а остальные 5 расположены вне плоскости α. Известно, что если четыре точки из всех 12 лежат в одной плоскости, то эта плоскость – α. Сколько существует выпуклых пирамид с вершинами в данных точках?

7. [6 баллов] Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ (S – вершина) со стороной основания 2 и боковым ребром 4. Точка X лежит на прямой SF, точка Y – на прямой AD, причём отрезок XY параллелен плоскости SAB (или лежит в ней). Найдите наименьшую возможную длину отрезка XY.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№1

Пусть этот многоугольник имеет n вершин, тогда сумма его углов равна $180^\circ(n-2)$. С другой стороны, его углы равны 143°, $(143+2)^\circ$, ..., $(143+2(n-1))^\circ$, зн. сумма его углов равна

$$143+(143+2)+\dots+(143+2(n-1))=\frac{143+(143+2(n-1))}{2}\cdot n=$$

$=(143+(n-1))\cdot n=n(n+142)$ градусов, зн.

$n(n+142)=180(n-2)$

$n^2+142n=180n-360$

$n^2-18n-20n+360=0$

$(n-18)(n-20)=0$

$n-18=0$ или $n-20=0$

$n=18$ $\quad$ $n=20$

Если $n=20$, то наибольший угол этого многоугольника равен $(143+2(n-1))^\circ=(143+2\cdot 19)^\circ=181^\circ>180^\circ$, зн. такого быть не может, т. е. у такого многоугольника 18 вершин.

Ответ: 18.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№2

$x\ln 16 + y\ln 8 + z\ln 24 = \ln 6$, т. е. $e^{x\ln 16 + y\ln 8 + z\ln 24} = e^{\ln 6}$,

но $e^{x\ln 16+y\ln 8+z\ln 24} = e^{x\ln 16}\cdot e^{y\ln 8}\cdot e^{z\ln 24} =$

$= (e^{\ln 16})^x\cdot(e^{\ln 8})^y\cdot(e^{\ln 24})^z = 16^x\cdot 8^y\cdot 24^z = (2^4)^x\cdot(2^3)^y\cdot(2^3\cdot 3)^z =$

$= 2^{4x}\cdot 2^{3y}\cdot 2^{3z}\cdot 3^z = 2^{4x+3y+3z}\cdot 3^z$, $e^{\ln 6} = 6 = 2\cdot 3$, зн.

$2^{4x+3y+3z}\cdot 3^z = 2\cdot 3 \,\Big|\, : (2\cdot 3^z) > 0$

$2^{4x+3y+3z-1} = 3^{1-z}$, но $3^{1-z} = (2^{\log_2 3})^{1-z} = 2^{(1-z)\log_2 3}$, зн.

$4x+3y+3z-1 = (1-z)\log_2 3$, но $x\in\mathbb{Z}$, $y\in\mathbb{Z}$ и $z\in\mathbb{Z}$, т. е.

$(4x+3y+3z-1)\in\mathbb{Z}$, т. е. $((1-z)\log_2 3)\in\mathbb{Z}$. Если $1-z\neq 0$,

то $((1-z)\log_2 3)\notin\mathbb{Z}$, зн. $1-z=0$, т. е. $z=1$, тогда

$4x+3y+3z-1 = (1-z)\log_2 3 = 0$, т. е. $4x+3y = 1-3z = 1-3 = -2$,

зн. $x = \frac{-3y-2}{4} = -\frac{3y+2}{4}$, $x\in\mathbb{Z}$, зн. $(3y+2)\,\vdots\, 4$.

$3y+2 \underset{4}{\equiv} 0$, т. е. $3y \underset{4}{\equiv} 2$, зн. $y \underset{4}{\equiv} y+8y = 9y = 3\cdot 3y \underset{4}{\equiv} 3\cdot 2 =$

$= 6 \underset{4}{\equiv} 2$, зн. $|y|\geq 2$, т. е. $y^2\geq 4$.

Если $x=0$, то $3y+2=0$, $y=-\frac{2}{3}$, что невозможно,

т. к. $y\in\mathbb{Z}$, т. е. $x\neq 0$, зн. $|x|\geq 1$, т. е. $x^2\geq 1$. Таким

образом, $x^2+y^2+z^2 \geq 1+4+1^2 = 6$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Если $x=z=1$ и $y=-2$, то $x\ln 16+y\ln 8+z\ln 24=$
$=\ln 16-2\ln 8+\ln 24=(\ln 8+\ln 2)-2\ln 8+(\ln 8+\ln 3)=\ln 2+\ln 3=$
$=\ln(2\cdot 3)=\ln 6$, $x^2+y^2+z^2=1+4+1=6$, зн. 6 — наименьшее возможное значение выражения $x^2+y^2+z^2$.

Ответ: 6.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№3

Пусть x – наименьшее число из М, тогда множество М состоит из чисел $x, x+1, x+2, \ldots, x+6$, сумма которых равна $x+(x+1)+\ldots+(x+6)=\frac{x+(x+6)}{2}\cdot 7=$ $=7(x+3)=7x+21$, зн. сумма 6 попарно различных чисел из М не меньше $x+(x+1)+\ldots+(x+5)=$ $=7x+21-(x+6)=6x+15$ и не больше $(x+1)+(x+2)+\ldots+(x+6)=$ $=(7x+21)-x=6x+21$, т. е. $6x+15\leq q<p\leq 6x+21$ ($p>q$, т. к. $p^2>q^2$), зн. $p-q\leq(6x+21)-(6x+15)=6$. Числа p и q простые и больше 2, т. е. нечётные, зн. $(p-q)\vdots 2$, т. е. $p-q=2$ или $p-q=4$ или $p-q=6$.

$p^2-q^2=(p-q)(p+q)=792$, т. е. $p+q=\frac{792}{p-q}$.

Если $p-q=6$, то $p+q=\frac{792}{6}=132$, зн. $p=\frac{(p-q)+(p+q)}{2}=$ $=\frac{6+132}{2}=69$, но 69 – составное число, зн. такого быть не может.

Если $p-q=4$, то $p+q=\frac{792}{4}=198$, зн. $q=\frac{p+q-(p-q)}{2}=$ $=\frac{198-4}{2}=97$. Тогда $p=q+4\leq 6x+21$, т. е. $6x+15\leq q=97\leq$ $\leq 6x+17$, т. е. $97-17=80\leq 6x\leq 97-15=82$, но числа 80,

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№3 (продолжение)

81 и 82 не кратны 6, зн. такого быть не может.

Если же $p-q=2$, то $p+q=\frac{792}{2}=396$, зн. $q=\frac{(p+q)-(p-q)}{2}=\frac{396-2}{2}=197$, $p=q+2=199$, т. е. числа p и q действительно простые. Тогда $p=199\leq 6x+21$, т. е. $6x\geq 178$, и $q=197\geq 6x+15$, т. е. $6x\leq 182$, из чисел от 178 до 182 только число 180 кратно 6, зн. $6x=180$, т. е. $x=30$, $M=\{30, 31, 32, 33, 34, 35, 36\}$.

Ответ: $M=\{30, 31, 32, 33, 34, 35, 36\}$.

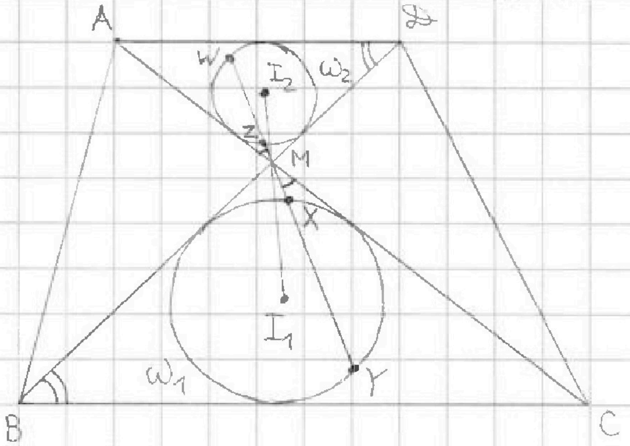
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№4



$\triangle ADM \sim \triangle CBM$ по I признаку ($\angle AMD = \angle CMB$ как вертикальные, $\angle ADM = \angle CBM$ как накрест лежащие при $AD \parallel BC$ и секущей BD), MI_2 и MI_1 – соответственные элементы в этих треугольниках, т. е. $\frac{MI_2}{MI_1} = \frac{AD}{BC} = \frac{1}{2}$. MI_2 и MI_1 – биссектрисы $\angle AMD$ и $\angle CMB$ соответственно, зн. $\angle AMI_2 = \frac{\angle AMD}{2} = \frac{\angle CMB}{2} = \angle CMI_1$, т. е. точки M, I_1 и I_2 лежат на одной прямой, зн. $I_1I_2 = MI_1 + MI_2 = MI_1 + \frac{MI_1}{2} = \frac{3}{2}MI_1 \Rightarrow MI_1 = \frac{2}{3}I_1I_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{13}{2} = \frac{13}{3}$.

$\angle CMX = \angle AMZ$ как вертикальные, зн. MX и MZ – соответственные элементы в $\triangle CBM$ и $\triangle ADM$, т. е. $\frac{MZ}{MX} = \frac{AD}{BC} = \frac{1}{2}$, зн. если степень точки M относительно окружности ω_1 равна P, а радиус ω_1 равен R, то $P = MI_1^2 - R^2 = MX \cdot MY = MY \cdot 2MZ = 2 \cdot 5 = 10$, т. е. $R^2 = MI_1^2 - 10 = \left(\frac{13}{3}\right)^2 - 10 = \frac{169-90}{9} = \frac{79}{9}$, зн. $R = \sqrt{\frac{79}{9}} = \frac{\sqrt{79}}{3}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Ответ: $\frac{\sqrt{79}}{3}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

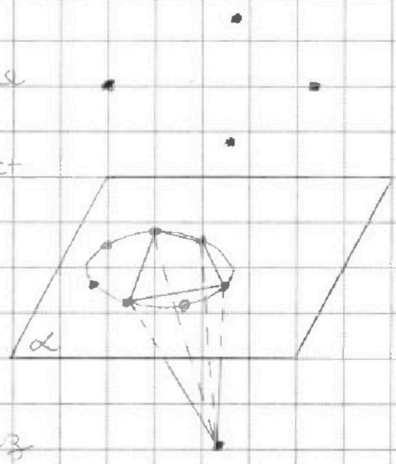
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№6

Рассмотрим одну из таких пирамид, основание которой не лежит в плоскости α. По условию в плоскости её основания лежит не более 3 точек из всех 12, т. е. её основание – треугольник, зн. эта пирамида имеет 4 вершины. Всего таких пирамид столько, сколько способов выбрать 4 точки из данных 12 так, чтобы не более 2 из них лежали в α, т. е. $C_{12}^4 - C_7^4 - 5C_7^3$ (C_{12}^4 способов выбрать любые 4 точки, C_7^4 – 4 точки в α, $5C_7^3$ – 3 точки в α и одну не в α).



Рассмотрим одну из таких пирамид, основание которой лежит в α. Её основание – многоугольник, лежащий в α и имеющий хотя бы 3 вершины (все такие многоугольники

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

выпуклые, т. к. вписанные), а её вершина — любая из 5 точек вне α. Всего таких пирамид $5(C_7^3+C_7^4+\ldots+C_7^7)$ (5 способов выбрать вершину и $C_7^3+C_7^4+\ldots+C_7^7$ способов выбрать основание). Таким образом, всего выпуклых пирамид с вершинами в данных 12 точках $C_{12}^4-C_7^4-5C_7^3+$

$+5(C_7^3+C_7^4+\ldots+C_7^7)=C_{12}^4+4C_7^4+5(C_7^5+C_7^6+C_7^7)=$

$=\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}+4\cdot\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1}+5\left(\frac{7\cdot 6}{2\cdot 1}+7+1\right)=$

$=495+140+5\cdot 29=635+145=780.$

Ответ: 780.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

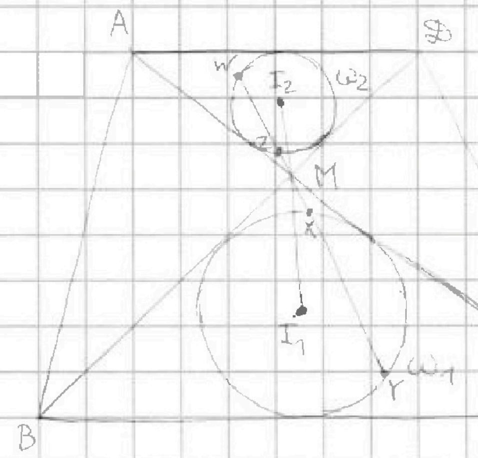
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Черновик

№4



$I_1I_2=\frac{13}{2}$

$MI_1=\cancel{8}\frac{13}{3}$, $MI_2=\frac{13}{6}$

$MZ\cdot MY=5\Rightarrow MX\cdot MY=10$

$MI_1^2-R^2=\frac{169}{9}-R^2=10$

$R^2=\frac{169}{9}-10=\frac{79}{9}$

$R=\frac{\sqrt{79}}{3}$

№5

$5-4\sin\frac{3\pi}{14}-\left(4\cos\frac{\pi}{7}-5\sin\frac{\pi}{14}\right)=5+4\left(\sin\frac{\pi}{14}-\sin\frac{3\pi}{14}\right)+\sin\frac{\pi}{14}-$

$-4\cos\frac{\pi}{7}=5+8\sin\left(-\frac{\pi}{14}\right)\cos\frac{\pi}{7}+\sin\frac{\pi}{14}-4\cos\frac{\pi}{7}=$

$=5+\sin\frac{\pi}{14}-\cancel{X}\,4\cos\frac{\pi}{7}\left(2\sin\frac{\pi}{14}+1\right)\cancel{+\sin\frac{\pi}{14}}=$

$=\cancel{3}4{,}5+(\cancel{X}^{\frac{1}{2}}-4\cos\frac{\pi}{7})(2\sin\frac{\pi}{14}+1)$

№6

$\cancel{(C_{12}^3-C_7^3)\cdot 9}+(C_7^3+C_7^4+\ldots+C_7^7)\cdot 5$

$C_{12}^4-C_7^4$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Черновик

№3

$$M = \{\underset{a_1}{x},\ \underset{a_2}{x+1},\ \ldots,\ \underset{a_7}{x+6}\}$$

$S_i = p_i = S_M - a_i$

$p_i - p_j \geq a_7 - a_1 = 6$

$p^2 - q^2 = (p-q)(p+q) = 792 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11$

$792 = 2 \cdot 396 = 4 \cdot 198 = 8 \cdot 99 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11$

$(p-q) \vdots 2 \Rightarrow p-q = 2,\ 4,\ 6$

1) $p-q=6 \Rightarrow p+q = 132 \Rightarrow p = 69,\ q = 63$ ×

$x+(x+1)+\ldots+(x+5) = \frac{x+(x+5)}{2} \cdot 6 = (2x+5) \cdot 3 = 63 \Rightarrow \underline{x=8}$ ×

2) $p-q=4 \Rightarrow p+q = 198 \Rightarrow p = 101,\ q = 97$

3) $p-q=2 \Rightarrow p+q = 396 \Rightarrow p = 199,\ q = 197$

2) $p = 101,\ q = 97$ ×

$S_M = 7x + 21$

~~$97 = 6x + 3, 14, 15, 16, 4$~~ $\quad 97 = 6x + 15, 16, 17$ ×

3) $197 = 6x + 17$

$6x = 180 \Rightarrow \underline{x = 30}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Черновик

№1

$\alpha_n = 143^\circ + 2^\circ \cdot (n-1) < 180^\circ$

$2(n-1) < 37$

$n-1 < 18,5$

$n < 19,5 \Rightarrow n \leq 19$

$S = 180^\circ(n-2) = \frac{143^\circ + 143^\circ + 2^\circ(n-1)}{2} \cdot n =$

$= (143 + \cancel{2}(n-1))^\circ \cdot n = (142+n)^\circ \cdot n =$

$= (142n + n^2)^\circ$

$142n + n^2 = 180n - 360$

$n^2 - 38n + 360 = 0$

$n^2 - 20n - 18n + 360 = 0$

$(n-20)(n-18) = 0$

$n = 20$ или $n = 18$

×

№2

$x \ln 16 + y \ln 8 + z \ln 24 = \ln 6$

$x(\ln 8 + \ln 2) + y \ln 8 + z(\ln 8 + \ln 3) = \ln 2 + \ln 3$

$(\ln 8)(x+y+z) + (x-1)\ln 2 + (z-1)\ln 3 = 0$

$e^{x\ln 16 + y\ln 8 + z\ln 24} = e^{x\ln 16} \cdot e^{y \ln 8} \cdot e^{z \ln 24} = 16^x * 8^y * 24^z = 6$

$16^x \cdot 8^y \cdot 24^z = 2^{4x} \cdot 2^{3y} \cdot 2^{3z} \cdot 3^z = 2^{4x+3y+3z} \cdot 3^z = 2 \cdot 3$

$2^{4x+3y+3z-1} = 3^{z-1}$

$\begin{cases} 4x+3y+3z=1 \\ z=1 \end{cases}$

$x^2 + y^2 = \frac{(3y+2)^2}{16} + y^2 = \frac{9y^2 + 12y + 4 + 16y^2}{16} =$

$= \frac{25y^2 + 12y + 4}{16} \geq \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

$y_0 = \frac{-12}{50} = -0,24$

$4x + 3y = -2$

$4x = -2 - 3y$

$x = \frac{-2-3y}{4}$

$(-2-3y) \vdots 4$

$3y \equiv_4 2$

$y \equiv_4 2$

$y = -2 \Rightarrow x = 1, \; x^2 + y^2 = 5$

$x^2 + y^2 + z^2 \geq 6$