



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 10



- [3 балла] Найдите все значения параметра t , при каждом из которых уравнение $x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
- [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что $a - b = 12$, а значение выражения $a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b$ равно $19p^4$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b .
- [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M , пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D , что $AB = CD$. Найдите AB , если $BC = 6$, $\cos(2\angle CEM) = -\frac{3}{4}$.
- [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят четыре ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парта рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
 - он сидит на первой парте в ряду,
 - ближайшая парта перед ним пуста,
 - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 11 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

- [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE , лежит на отрезке CD . Найдите наибольшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 12$.
- [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 5, 6, 7 и 9 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
- [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 2.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$(t-1)(t+1) > 0 \Rightarrow t_1 = 1; t_2 = -1 \Rightarrow t \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$
1-возрастание к $(t-1)(t+1) > 0$. Перемножим совокупности значений для t : $\begin{cases} t \in (-3; 3) \\ t \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty) \end{cases}$. Итого, пересечением этих множеств будет $t \in (-3; -1) \cup (1; 3)$
Ответ: $t \in (-3; -1) \cup (1; 3)$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0$. Возьмем дискриминант по четной формуле $D_1 = b^2 - 4ac$ для данного уравнения с параметром t ($b = \frac{b}{2} = 2\sqrt{2}t$, $a = 1$, $c = 9t^2 - 9$).

$$D_1 = (2\sqrt{2}t)^2 - 4 \cdot (9t^2 - 9) = 8t^2 - 36t^2 + 36 = -28t^2 + 36 > 0$$

(Уточним при $D_1 \leq 0$ данное квадратное уравнение будет иметь не более одного действительного корня).

$$-28t^2 + 36 > 0$$

$$t^2 - 9 < 0$$

$(t-3)(t+3) < 0$ (найдем корни уравнения $(t-3)/(t+3) = 0$).

$t_1 = 3$; $t_2 = -3 \Rightarrow t \in (-3; 3)$ (возвращаясь к

$$(t-3)(t+3) < 0.$$

Далее заметим, что для данного приведенного квадратного уравнения ($a=1$): $x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0 \Rightarrow$

знаем, произведение корней x_1 и x_2

равно c или $x_1 \cdot x_2 = 9t^2 - 9$. По условию

$$x_1 \cdot x_2 > 0 \Rightarrow 9t^2 - 9 > 0 \text{ или } 9(t^2 - 1) > 0 \text{ или}$$

$(t-1)(t+1) > 0 \Rightarrow$ найдем корни уравнения



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a-b=12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b = 19p^4, \text{ где } p - \text{ простое число.} \end{cases}$$

Разложим $a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b = (a+b)^2 + 3(a+b) =$

$$= (a+b)(a+b+3) = 19p^4, \text{ при этом } 19 - \text{ простое число} \Rightarrow$$

но нельзя разложить на простые множители (у 19 всего один простой множитель - 19) \Rightarrow либо

$$(a+b):19, \text{ либо } (a+b+3):19.$$

Разложим $a+b$ и $a+b+3$ на простые множители в зависимости от двух случаев:

1) $(a+b):19$, тогда $a+b = 19 \cdot p^x$, и $a+b+3 = p^{4-x}$, где x - некоторое целое неотрицательное число.

2) $(a+b+3):19$, тогда $a+b = p^y$, и $a+b+3 = p^{4-y} \cdot 19$, где y - некоторое целое неотрицательное число.

Рассмотрим каждый из случаев по отдельности и разобьем его на подслучаи

1) 1. $0 \leq x < 4$: тогда и $x > 0$ и $x-4 > 0 \Rightarrow$

$(a+b):p$ и $(a+b+3):p \Rightarrow 3:p \Rightarrow p=3$ (1 - не простое число). Но в этом случае формула если



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

минимизировать x до $x=1$ ($x > 0$), то
 $a+b \geq 19 \cdot 3 = 57$, а $a+b+3 \leq 3^3 = 27$. Противоречие

1.2: $\begin{cases} x=0 \\ x-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=4 \end{cases}$

Или $\begin{cases} x=0 \\ x=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} a+b=19 \\ a+b+3=p^4 \geq 22, \text{ но } 22 \text{ не является} \\ \text{ст. 4-ой степенью} \\ \text{числа.} \end{cases} \\ \begin{cases} a+b=19p^4 \\ a+b+3=1 \Rightarrow a+b=-2 \Rightarrow \text{либо} \\ \text{а либо } b, \text{ либо оба не больше } 0, \\ \text{что противоречит условию задачи.} \end{cases} \end{cases}$

2.1. $0 < y < 4$: тогда и $y > 0$ и $y-4 > 0 \Rightarrow$

$(a+b):p$; $(a+b+3):p \Rightarrow 3:p \Rightarrow p=3$ (1-е простое число). Тогда

$a+b=3^y$, а $a+b+3=19 \cdot 3^{4-y}$. Но если $y > 0$

следует, что $y \leq 3$, то тогда $a+b \leq 27$, а

$a+b+3 \geq 19 \cdot 3 = 57$, что невозможно.

2.2. $\begin{cases} y=0 \\ y-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} a+b=1 \\ a+b+3=19 \cdot p^4 > 19, \text{ что} \\ \text{противоречит} \\ \text{условию} \end{cases} \\ \begin{cases} a+b=p^4 \\ a+b+3=19 \Rightarrow a+b=16, \end{cases} \end{cases}$

а $16 = 4^2 = 2^4 = p^4 \Rightarrow p=2$, что

ничему не противоречит $\Rightarrow a+b=16$

$\begin{cases} a+b=16 \\ a-b=12 \end{cases} \Rightarrow a=14 \text{ и } b=16-a=2.$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Объем: $a = 14$; $b = 2$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$36 = 8x^2 \Rightarrow 9 = 2x^2 \Rightarrow x^2 = 4,5 \Rightarrow x = \sqrt{4,5}, a$$
$$AB = 2x = 2 \cdot \sqrt{4,5} = 2\sqrt{4,5}.$$

Ответ: $AB = 2\sqrt{4,5}$.

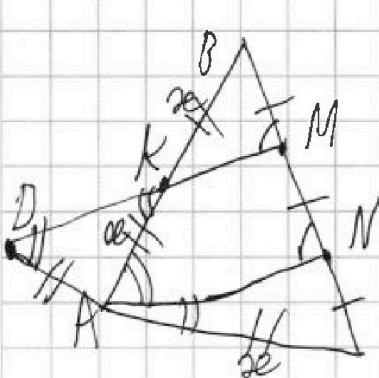
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AB = CD$$

$$BM = MN = NC$$

K - точка пересечения AB и MD

$$\cos(\angle CAN) = \frac{3}{4}$$

Заметим, что $\triangle BKM \sim \triangle BAN$ (по 2-м углам: $\angle B$ - общий, $\angle BKM = \angle BNA$ (из $MK \parallel AN$ и общей сек. BN)) $\Rightarrow \frac{BM}{BN} = \frac{BK}{BA} = \frac{1}{2}$ (из $BM = MN = \frac{1}{2} BN = \frac{1}{2} (BM + MN)$). Получим отрезки BM, MN и NC из $BC = a$ и $BM + MN + NC \Rightarrow BM = MN = NC = \frac{a}{3}$.

Далее из $MD \parallel AN$ следует, что $\angle CAN = \angle CDM$, а также $\triangle CMD \sim \triangle CNA$ ($\angle C$ - общий, $\angle CAN = \angle CDM$) \Rightarrow

$$\frac{AC}{CD} = \frac{CN}{CM} = \frac{1}{2} \Rightarrow AC = AD = \frac{1}{2} AB, \text{ а так как } AC = AB$$

то $AC = AD = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} AB = AK = KB$. Далее рассмотрим из $AD = AK$ что $\triangle DAK$ - равност. $\Rightarrow \angle ADK = \angle AKD$, а из $AN \parallel MD$ следует, что $\angle DKA = \angle KAN$ (накр. лежа при сек. AK) \Rightarrow равнобе. $\triangle KAN$ и $AK = KN$ и $AN = 2 \cdot KN$. Тогда $\angle BAN = \angle CAN + \angle KAN = 2 \cdot \angle CAN$

Заметим теперь формулу косинусов для $\triangle ABC$:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos(\angle CAN)$$

$$36 = 4a^2 + a^2 - 2 \cdot 2a \cdot a \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = 9a^2 + 4a^2 \cdot \frac{3}{4} = 8a^2$$



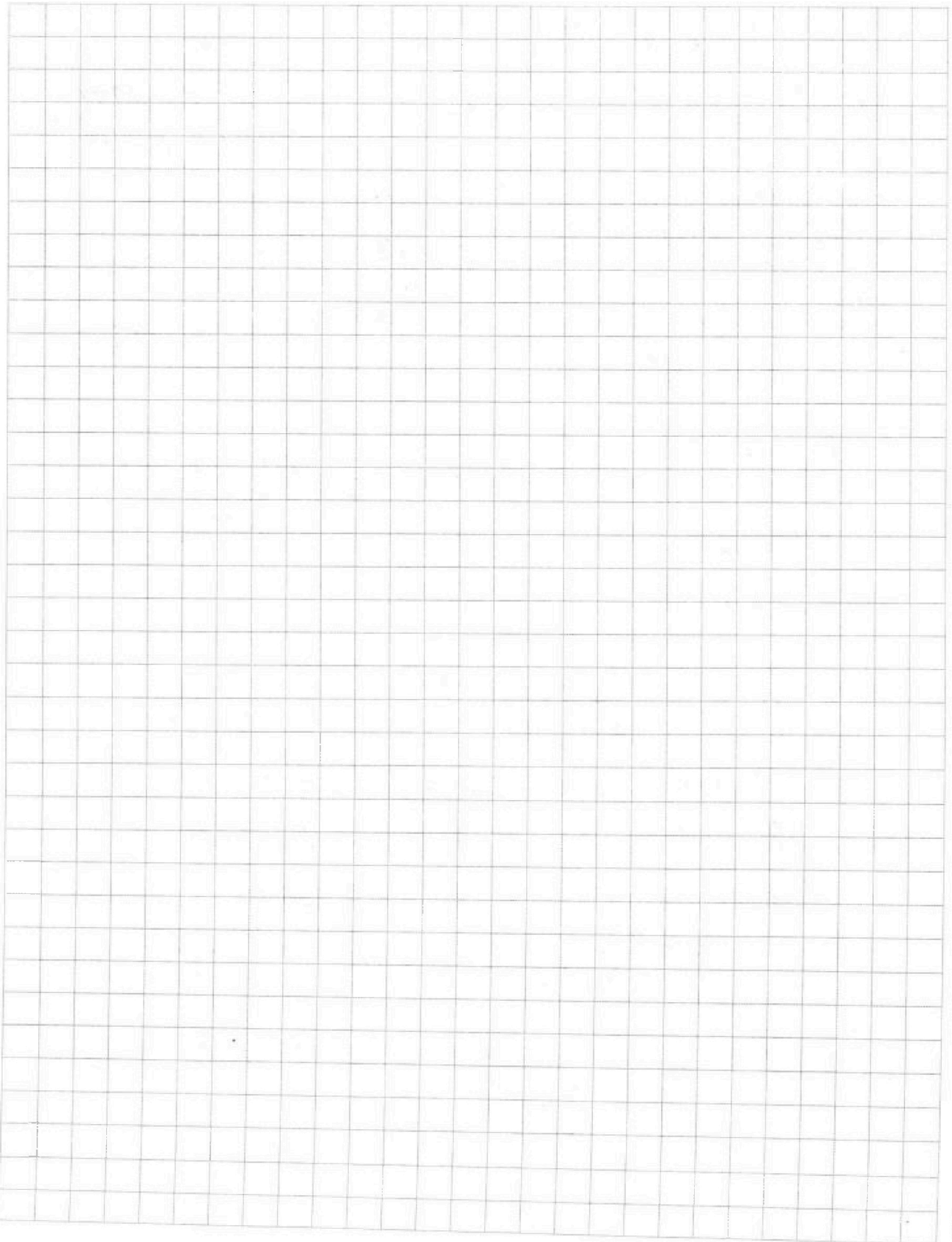
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА

из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что ровно в классе $4 \cdot 3 = 12$ парта, а учеников всего 11 \Rightarrow ровно 1 парта окажется пустой. При этом если есть школьница рядом с партой (у которой убоже нет парты), то это самый высокий и самый высокий человек в классе, при этом высокий может сидеть за 1-ой и 2-ой партой, при этом за 2-ой, только тогда, когда парта перед ним пуста, и самый высокий - либо на 2-ой, либо на 3-ей парте, при этом на 2-ой только тогда, когда парта позади него пуста. При этом рассмотрим одну из возможных расстановок учеников и посчитаем количество таких расстановок, если номер парты в ряду у ученика не меняется, состав какого ряда не меняется, но ряды меняются по мере роста: всего таких расстановок ровно 4! Далее посчитаем число расстановок на 1 и 4! сумма:

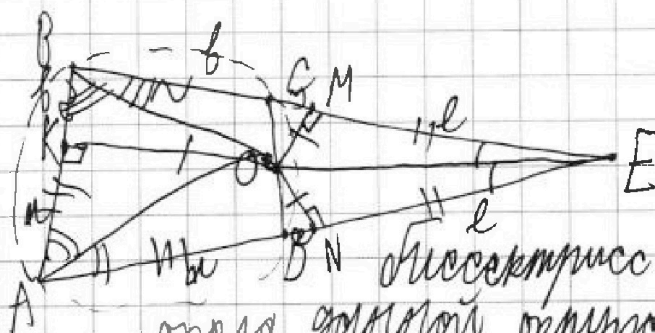
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Заметим что центр
вписанной окружн.
совпадает с
центр вписанной окружн.
треугольника, описанного
около золотой окружности \rightarrow EO - биссектриса

$\triangle ABE$. Пусть $\angle A = 2\alpha$, тогда из того, что ABCD - вписанн. $\Rightarrow \angle C = 180 - 2\alpha \Rightarrow \angle ECD = 180 - (180 - 2\alpha) = 2\alpha \Rightarrow \triangle ABE \sim \triangle CDE$ ($\angle E$ - общий и $\angle BAE = \angle DCE = 2\alpha$) \Rightarrow

$\frac{BE}{AE} = \frac{DE}{CE} \Rightarrow BE \cdot CE = AE \cdot DE$. Опустим перпендикуляры из точки O на отрезки BE, AE и AB.

K - точка пересечения AB с перпендикул. из O; M - точка пересечения BE с перпендикул. из O на BE, N - точка пересечения AE с перпендикул. из O на AE.

Прямые точки M, N, K являются точками касания окружности с центром в точке O, прямые OK \perp AB, ON \perp AE, OM \perp BE (это радиусы данной окружности).

при этом $BM = BK$, $EM = EN$, $AN = AK$ (так как касательная к окружности с центром в точке O и пересекает ее в одной точке \Rightarrow из точки пересечения отрезка касательной к окружности (прямой). Опустим

$BK = BM = b$, $AK = AN = a$, $EM = EN = c$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $AB = a$, $CM = y$. Тогда $(a \pm x) / (a \pm (a + b)) \cdot (c \pm x) = (b + c) \cdot (c \pm y)$ (в зависимости от точки $B + c = R$ (по условию). Поместим точку N симметрично R и симметрично C .

Также так как OE - бисс., то $\frac{OB}{EB} = \frac{OC}{CE}$
Также из $\frac{BE}{AE} = \frac{DE}{CE} = \frac{OD}{OC} \Rightarrow OD = BE \cdot \frac{OC}{AE}$

$$ED = BE \cdot \frac{CB}{AE}$$

$$ED + OD = BE \cdot \left(\frac{CE + OC}{AE} \right) = \frac{BE}{AE} \cdot (CE + OC)$$

При этом $AB = a + b$; $CE = c \pm y$; $BE = R$.

$$ED + OD = \frac{R}{a + b} \cdot (c \pm y + OC) =$$

$$\text{из } (a + b) \cdot (c \pm x) = (b + c) \cdot (c \pm y)$$

$$ac + bc \pm ax \pm ay = be + ce \pm ey \pm by$$

$$ac \pm ax \pm bc = be \pm ey \pm by$$

$$\pm ax + ac - be \pm ey = \pm ax \pm by$$

$$c(\pm x + a - b \pm y) = \pm ax \pm by$$

$$\frac{1}{c} = \frac{\pm x + a - b \pm y}{\pm ax \pm by} \Rightarrow c = \frac{\pm ax \pm by}{\pm x + a - b \pm y}$$

$$= \frac{R}{a + \frac{\pm ax \pm by}{\pm x + a - b \pm y}} \cdot (c \pm y + OC)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

а из которой составлены $(n-4)$ вершины образуют ровно 1 ребро. Посчитаем общее число ребер как половину от суммы степеней вершин (отдельно вершин - то число ребер, которое выходит из каждой вершины): $\frac{5+8+9+(n-4) \cdot 1}{2} =$

$$= \frac{23+n}{2} = \frac{n+23}{2} = n-1$$

$$n+23 = 2n-2$$

$-n = -25 \Rightarrow n = 25$ - число деревьев, которое может быть на острове.

Ответ: $n=25$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

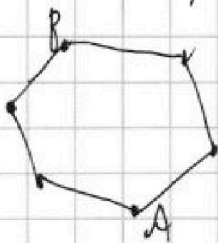


1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Представьтем дороги и деревья в виде графа, где точки \bullet - деревья, а ребра - дороги, соединяющие две деревья капогда. Пусть у нас всего n деревьев, при этом чтобы граф был связным, нужно хотя бы $n-1$ ребро (иначе хотя бы одно дерево окажется изолированной), но при этом при количестве ребер не менее n в графе обязательно будут циклы, рассмотрим один из них (возможна



две произвольные точки A, B ; при этом из A в B можно пройти уже минимум 2-мя маршрутами (для

любого цикла это будет так, что можно по часовой стрелке обойти (пройти через все вершины) и вернуться в исходную, и значит, можно пройти в обратную сторону и также все обойти). Но если в графе меньше n ребер, всего n графов может быть $(n-1)$ ребер при n вершинах. При этом у 4-х вершин будет по 5, 6, 4 и 3 ребра соответственно;

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Для начала покажем, что под корнем могут находиться только неотрицательные числа \Rightarrow
 $1 - |x - y - 1| \geq 0$ или $|x - y - 1| \leq 1$, а так как
 модуль всегда неотрицателен, то $|x - y - 1| \geq 0$, а
 так как x и y — целые числа, то $|x - y - 1| = 0, 1$.

Рассмотрим в этих случаях:

1) $|x - y - 1| = 0 \Rightarrow \sqrt{1 - |x - y - 1|} = \sqrt{1} = 1 \Rightarrow$

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} = 1 \Rightarrow 2x - 2y - x^2 - y^2 = 1 \text{ или}$$

$$2(x - y) - (x^2 + y^2) = 1. \text{ Из } |x - y - 1| = 0 \text{ следует, что}$$

$$x - y - 1 = 0 \text{ или } x - y = 1. \text{ Подставим } x - y = 1:$$

$$2 \cdot 1 - (x^2 + y^2) = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

$$x - y = 1 \Rightarrow x = y + 1$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ (y + 1)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$(y + 1)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 + 2y + 1 + y^2 - 1 = 2y^2 + 2y = 2y(y + 1) = 0,$$

корни этого уравнения $y_1 = 0$ и $y_2 = -1 \Rightarrow$

$$x_1 = y_1 + 1 = 1; \quad x_2 = y_2 + 1 = 0 \neq 1 = 0.$$

Получим две пары (x, y) : $(1, 0)$; $(0, -1)$.

2) $|x - y - 1| = 1 \Rightarrow \begin{cases} x - y - 1 = 1 \\ x - y - 1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$

$$1 - |x - y - 1| = 0 \Rightarrow \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 0 \Rightarrow$$

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} = 0 \Rightarrow 2x - 2y - x^2 - y^2 = 0$$

$$2(x - y) - (x^2 + y^2) = 0. \text{ Тогда:}$$

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \cdot 2 - (x^2 + y^2) = 0 \\ 2 \cdot 0 - (x^2 + y^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

Из $x^2 + y^2 = -4$ получаем противоречие для этой системы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

в этом случае $|x - y - 1| = 1 \Rightarrow 1 - |x - y - 1| = 0 \Rightarrow$

$$\sqrt{1 - |x - y - 1|} = 0 \Rightarrow \sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2}$$

т.е. $x^2 \geq 0$; $y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq 0$, но в данном случае $x^2 + y^2 = -4$. Должен перейти к системе уравнений!

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 0 \\ x - y = 2 \end{cases} \Rightarrow x = y + 2$$

$$(y + 2)^2 + y^2 = y^2 + 4y + 4 + y^2 = 2y^2 + 4y + 4 = 0 \text{ или}$$

$$y^2 + 2y + 2 = 0. \text{ Выделим полный квадрат:}$$

$$y^2 + 2y + 1 = -1 \text{ или } (y + 1)^2 = -1, \text{ получаем противоречие } ((y + 1)^2 \geq 0, -1 < 0).$$

Всего за 2 случая мы получили 2 пары (x, y) :

$$(1, 0); (0, -1).$$

Ответ: 2 пары: $(1, 0); (0, -1)$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Максимизировать $(4-x)$
 ~~$(2-x)$~~ $(4-x) = 3$ $(2-x)$, то
 $a + b + z \leq 19$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Для начала поймем, что под корнем могут находиться только неотрицательные числа \Rightarrow

$$1 - |x - y - 1| \geq 0 \Rightarrow |x - y - 1| \leq 1, \text{ при этом}$$

$|x - y - 1| \geq 0$ (модуль всегда неотрицателен). Пока

же только когда x, y - целые, то и $|x - y - 1|$ - тоже

целое. Рассмотрим 2 случая:

1) $|x - y - 1| = 0 \Rightarrow x - y - 1 = 0 \Rightarrow x - y = 1$

2) $|x - y - 1| = 1$

$$x - y - 1 = 1$$

$$x - y - 1 = -1$$

$$x - y = 2$$

$$x - y = 0$$

При этом в 1-ом случае $1 - |x - y - 1| = 1 \Rightarrow$

$$\sqrt{1 - |x - y - 1|} \geq 1 \Rightarrow \sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} \geq 2 - 1 \geq 1 \Rightarrow$$

$$2x - 2y - x^2 - y^2 = 1 \text{ или } 2(x - y) - (x - y)(x + y) = 1$$

или $(x - y)(2 - x - y) = 1$, а учитывая то, что

в 1-ом случае получили $x - y = 1$, то и $2 - x - y = 1$

или $-x - y = -1 \Rightarrow x + y = 1$. Получаем систему

уравнений:
$$\begin{cases} x - y = 1 & x = 2 \Rightarrow x = 1 \\ x + y = 1 & y = 1 - x = 0 \end{cases}$$

Далее перейдем ко 2-ому случаю:



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0$$

Найдём дискриминант данного квадратного уравнения (дискриминант по метрической формуле):

$$D_1 = k^2 - ac = 2\sqrt{2}t - 9t^2 + 9 > 0 \quad (\text{иначе будет не}$$

$k = \frac{b}{2} = 2\sqrt{2}t$; $a = 1$; $c = 9t^2 - 9$ более одного действительного корня в данном уравнении)

$$-9t^2 + 2\sqrt{2}t + 9 > 0$$

$9t^2 - 2\sqrt{2}t - 9 < 0$. Далее найдём корни данного квадратного уравнения при $9t^2 - 2\sqrt{2}t - 9 = 0$.

$$D_2 = k^2 - ac =$$