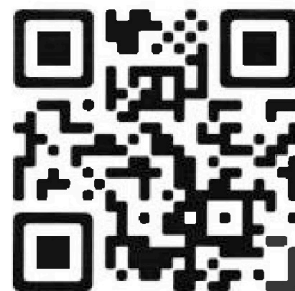




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 9



1. [3 балла] Найдите все значения параметра t , при каждом из которых уравнение $x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.
2. [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что их сумма равна 40, а значение выражения $a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b$ равно $17p^5$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b .
3. [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M , пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D , что $AB = CD$. Найдите AB , если $BC = 12$, $\cos(2\angle CEM) = -\frac{1}{4}$.
4. [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят три ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парта рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):
 - он сидит на первой парте в ряду,
 - ближайшая парта перед ним пуста,
 - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 8 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

5. [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE , лежит на отрезке CD . Найдите наименьшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 10$.
6. [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 3, 4, 5 и 7 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?
7. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x + 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x + y - 2|} = 1.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$. Корни этого уравнения

$$x_{1,2} = \frac{-2\sqrt{3}t \pm \sqrt{12t^2 - 16t^2 + 16}}{2} = \frac{-2\sqrt{3}t \pm \sqrt{16 - 4t^2}}{2}$$

Это различные действительные числа если $16 - 4t^2 > 0$, $16 > 4t^2$, $4 > t^2$. По т.Виета

$x_1 x_2 = 4t^2 - 4$, произведение положительно, тогда $4t^2 - 4 > 0$, $t^2 > 1$, получаем $4 > t^2 > 1$.

$$2 > |t| > 1$$

$$2 > t > 1$$

$$-1 > t > -2$$

Ответ: $t \in (-2; -1) \cup (1; 2)$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Если сумма чисел $a+b=40$, то $(a-b)$ чётное число. $a^2-2ab+b^2+15a-15b=(a-b)^2+15(a-b)=$
 $=(a-b)(a-b+15)=17p^5$. Либо $a-b \equiv 17$, или $a-b+15 \equiv 17$, значит $a-b \equiv 0$ или $a-b \equiv 2$.

Максимум $a-b$ это 38, минимум -38.

Переберём $a-b$. Есть варианты -34; -32; -17; -15; 0; 2; 17; 19; 34; 36. Все нечётные не подходят, и $17p^5 > 0$, тогда $a-b \neq 0$. Проверим подчёркнутые числа.

$$(-34) \cdot (-19) = 17 \cdot 2 \cdot 19 \neq 17p^5$$

$$(-32) \cdot (-17) = 2^5 \cdot 17$$

$$2 \cdot 17 = 2 \cdot 17 \neq 17p^5$$

$$34 \cdot 49 = 2 \cdot 17 \cdot 7^2 \neq 17p^5$$

$$36 \cdot 51 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 17 \neq 17p^5. \text{ Тогда, } a-b = -32.$$

$$a+b=40 \quad a=4 \quad b=36.$$

Ответ: 4; 36.

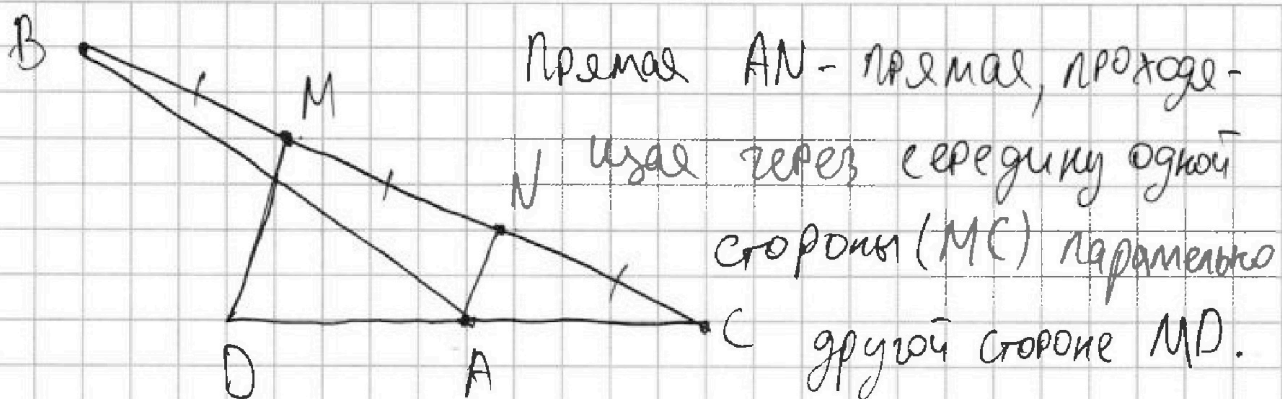


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Значит, проходит через середину DC, а значит $AD = AC$. По условию, $CD = AB$. Пусть, $AC = a$, тогда $AB = 2a$. $AC : AB = CN : NB$. Значит, AN - биссектриса угла BAC. $\angle BAC = 2\angle CAN$. По условию, $\cos(2\angle CAN) = -\frac{1}{4} = \cos \angle BAC$. В $\triangle BAC$ по т. косинусов $AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC = BC^2$, по условию $BC = 12$. $4a^2 + a^2 - 4a^2 \cdot (-\frac{1}{4}) = 144$
 $6a^2 = 144$ $a^2 = 24$. $a = \sqrt{24}$, тогда $AB = 2a = 4\sqrt{6}$

Ответ: $4\sqrt{6}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Если людей 8, а парт 9, то в одном ряду будет пустая парта. Выбрать этот ряд 3 способами. Теперь рассадим людей на два оставшихся ряда.

Если в ряду нет пустого места, то людей с ростами а, в, с рассадить можно единственным способом. Значит, вариантов заполнить этот ряд, это количество способов выбрать трёх людей,

это $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = 56$. Аналогично на другой ряд без пустого места можно выбрать трёх людей,

это $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = 10$ вариантов. Остались 2 человека

на ряд с пустым местом. Их рассадить 4 способами (если росты а > в), то

а	в	в	х
х	х	а	в
в	а	х	а

 также рассадки. Итого вариантов

$3 \cdot 56 \cdot 10 \cdot 4 = 560 \cdot 12 = 6720$ вариантов. Примечание:

Сначала мы выбираем трёх людей на самый левый ряд без пустого места, а затем на другой.

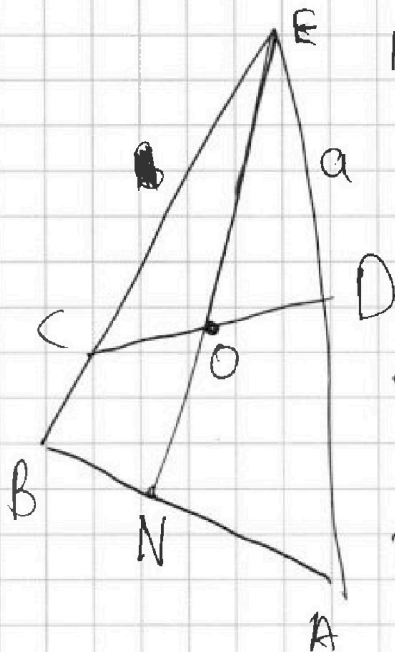
Ответ: 6720 вариантов.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть, $ED = a$, $OD = ax$. $\triangle ABE \sim \triangle CDE$, потому что из вписанности $ABCD$ $\angle ABC = \angle CDE$ и $\angle BAD = \angle DCE$. По условию, $BE = 10$. Тогда, из подобия $\frac{OD}{BN} = \frac{ED}{BE} = \frac{a}{10}$, где EN — биссектриса $\angle BEA$.

Заметим, что O — центр $\triangle ABE$, тогда BO — биссектриса и EO , и AO . $BN = \frac{OD \cdot BE}{ED} = \frac{ax \cdot 10}{a} = 10x$. По свойству биссектрисы

$$BO \text{ в } \triangle ABE \quad EO : ON = BE : BN = \frac{1}{x}.$$

$$EO : EN = \frac{1}{1+x}. \quad EO : EN \text{ это отношение длин}$$

биссектрис в подобных $\triangle ABE$ и $\triangle CDE$, тогда

коэффициент подобия $\triangle ABE$ и $\triangle CDE$ $1+x$.

$$\text{Значит, } \frac{ED}{EB} = 1+x = \frac{a}{10} = 1+x; \quad \text{анализируем}$$

$$a = \frac{10}{1+x}. \quad ED + OD = ax + a = a \cdot (1+x) = 10.$$

Ответ: 10.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Деревки - вершины, дорожки - рёбра. Возьмём вершину степени 7, из неё рёбра выходят к остальным вершинам n , так как граф связный, то рёбер не менее $n-1$, так как между двумя вершинами только один путь, то граф без циклов. Значит, граф - это дерево на n вершинах. В нём $n-1$ рёбра. Посчитаем степени вершин. $3+4+5+7+(n-4) \cdot 1 = n+15$, это удвоенное число рёбер $n+15 = 2n-2$ $n=17$.
Значит, деревьев 17.
Ответ: 17.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Так как, оба числа целые, то $x+y$ целое.

Так как, $\sqrt{2x+2y-x^2-y^2} \geq 0$, то $\sqrt{1-|x+y-2|} \leq 1$.

$0 \leq 1-|x+y-2| \leq 1$ $1 \geq |x+y-2| \geq 0$, тогда

$3 \geq x+y \geq -1$. Целые $x+y$ это 1, 2, 3. При $x+y=1$

получаем $y=1-x$, $\sqrt{2-x^2-1+2x-x^2} + \sqrt{1-1} = 1$

$$\sqrt{2-x^2-1+2x} = 1 \quad -2x^2+2x+1=1$$

$$2x^2-2x=0 \quad x=0 \text{ или } x=1; \quad y=1 \text{ или } y=0.$$

При $x+y=2$ $y=2-x$ $\sqrt{4-x^2-4+4x-x^2} + \sqrt{1-1} = 1$

$$4-x^2-4+4x-x^2=0$$

$$2x^2-4x=0 \quad x=2 \text{ или } x=0; \quad y=0 \text{ или } y=2$$

При $x+y=3$ $y=3-x$ $\sqrt{6-x^2-9+6x-x^2} + \sqrt{1-1} = 1$

$$6-x^2-9+6x-x^2=1$$

$$2x^2-6x+4=0 \quad x^2-3x+2=0. \text{ По т. обратной т. Виета}$$

$$x=1 \text{ или } x=2; \quad y=2 \text{ или } y=1.$$

Ответ: $(0;1); (1;0); (2;0); (0;2); (2;1); (1;2)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$$

$$-34 \quad -32$$

$$x_{1,2} = \frac{-2\sqrt{3}t \pm \sqrt{12t^2 - 16t^2 + 16}}{2} = \frac{-2\sqrt{3}t \pm \sqrt{16 - 4t^2}}{2}$$

$$16 > 4t^2$$

$$4t^2 - 4 > 0$$

$$t^2 > 1$$

$$a - b = 2$$

$$a - b = 17$$

$$4 > t^2 > 1$$

$$2 > |t| > 1$$

$$2 \cdot 17$$

$$2 > t > 1$$

$$-2 < t < -1$$

$$(a-b)^2 + 15(a-b) = (a-b)(a-b+15) =$$

$$= 12 \cdot 5$$

$$a - b = 19$$



$$-34$$

$$-32$$

$$17$$

D

A

B

C

$$\frac{1}{2} = \frac{\sin \alpha}{\sin \angle BAC} = \frac{15}{40}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4} = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\sin \alpha - \sin \alpha =$$

$$\sin 2\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\sin^2 \alpha (1 - \sin \alpha) = \frac{15}{64}$$

$$1 \leq x+y \leq 3$$

$$-4 < x < 4$$

$$-4 < y < 4$$

$$17$$

$$19$$

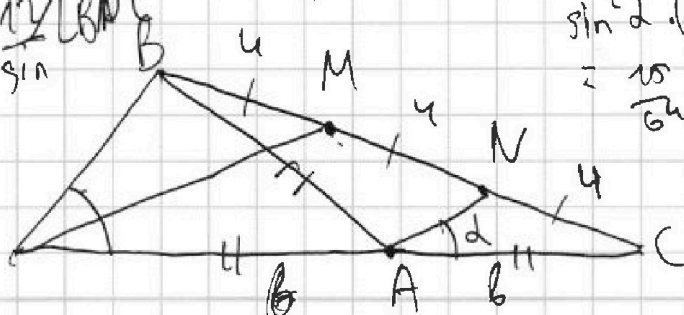
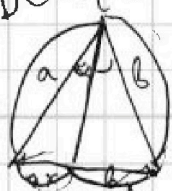
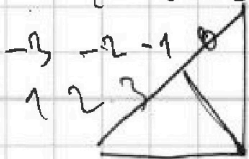
$$34$$

$$36$$

$$\cos 2\alpha = -\frac{1}{4}$$

$$2b = \frac{12 \cdot \sin \angle BDC}{\sin \alpha}$$

$$2b \cdot \sin \angle BDC = 12$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Handwritten mathematical work on grid paper. The main diagram is a triangle with vertices A, B, and C. Side AB is labeled $10x$, side AC is 10 , and side BC is a . A point D is on AC such that $AD = b$ and $DC = (a+b)$. A point E is on BC such that $BE = 10$. A line segment connects D and E. The angle at D is marked with a circle. To the left of the triangle is a 3x3 grid labeled D. Below the triangle are several tree diagrams representing combinatorial structures. To the right of the triangle are various algebraic expressions and calculations:

- $a+1a$
- $a+b+(a+b)$
- $\sqrt{x^2+2-2x}$
- n
- $n-1$
- $2n-2$
- $3+4+5+7+n-4 = 2n-2$
- $n+1a=2n$
- $(12) \dots$
- 456
- $3 \dots$
- $7+4+2+3+4=17$
- $8 \cdot 7 \cdot 6$
- $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6} =$
- $6 \pm \sqrt{36-24} =$
- $3-x \frac{n+1}{2} 2n-1$
- $1 \ 2 \ 3$
- $2 \ 2$
- $0 \ 1$
- $2x^2-6x+3=0$
- $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} = 56$
- $2x+2y-x^2-y^2$
- $\sqrt{6-x^2-9+6x-x^2} = 0$

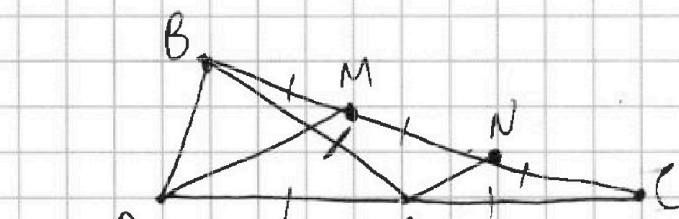


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



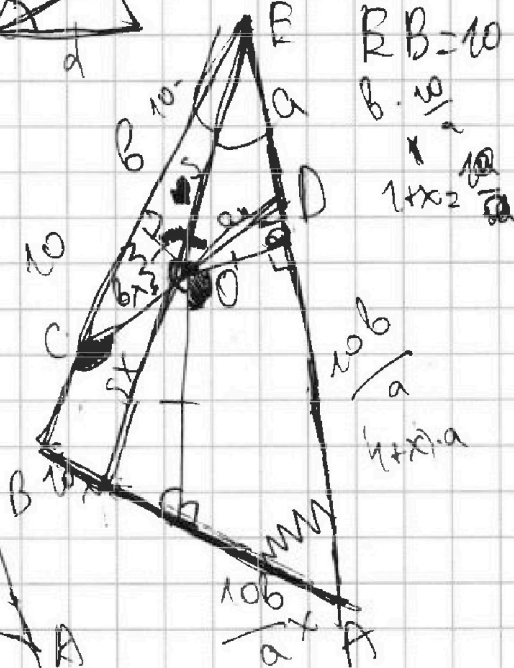
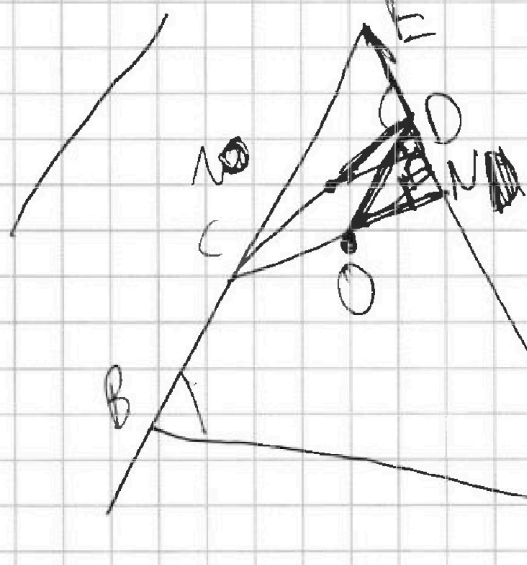
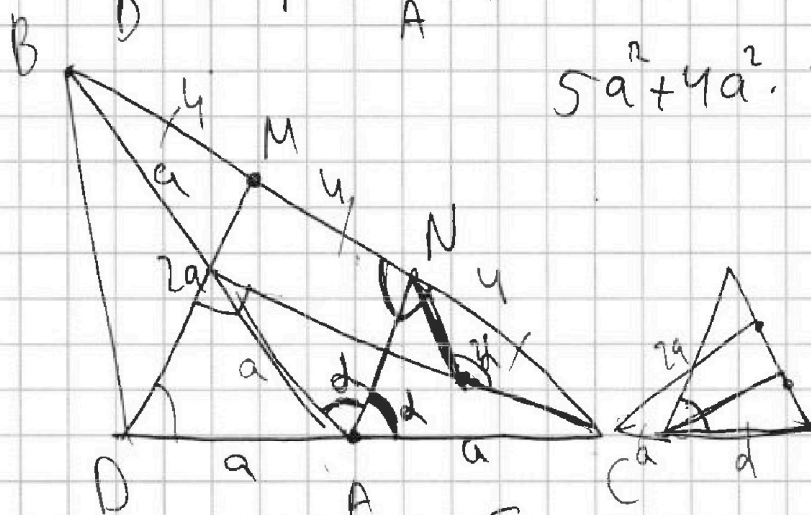
$$\frac{12^2}{6} = 12 \cdot 2 = 24$$

$$a^2 = 24$$

$$5a^2 + 4a^2 \cdot \frac{1}{4} = 6a^2 = 144 \quad \sqrt{6}$$

$$a^2 = 24 \quad a = \sqrt{24}$$

$$a = \sqrt{24} \quad 2a =$$



$$ax + a = a \cdot (1+x)$$