



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен  $3x + 3$ , пятый член равен  $(x^2 + 2x)^2$ , а девятый равен  $3x^2$ . Найдите  $x$ .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения  $4y + 8x$  при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары  $(m, n)$  натуральных чисел, для которых одно из чисел  $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$  и  $B = m^2n + mn^2 - 3mn$  равно  $13p^2$ , а другое равно  $75q^2$ , где  $p$  и  $q$  - простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе  $AH$  треугольника  $ABC$ , проходящая через середину  $M$  его стороны  $BC$ , пересекает сторону  $AB$  и продолжение стороны  $AC$  в точках  $Z$  и  $Y$  соответственно. Найдите  $BC$ , если  $AC = 18$ ,  $AZ = 6$ ,  $YZ = 8$ .
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат  $8 \times 8$  клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике  $ABC$  на медиане  $AM$  и биссектрисе  $CL$  как на диаметрах построены окружности  $\Omega$  и  $\omega$  соответственно, пересекающиеся в точках  $P$  и  $Q$ . Отрезок  $PQ$  параллелен высоте треугольника  $ABC$ , проведённой из вершины  $B$ . Окружность  $\Omega$  пересекает сторону  $AC$  повторно в точке  $N$ . Найдите длины сторон  $AC$  и  $BC$ , если  $AB = 10$ ,  $AN = 8$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Раньше члены арифметической прогрессии представляются

$$\text{так, } a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Выразим  $d$  через  $a_3, a_5$  и  $a_7, a_9$

$$a_5 - a_3 = 2d = a_5 - a_1 - 2d \Leftrightarrow d = \frac{(x^2+2x)^2 - 3x - 3}{2}$$

$$d \quad a_9 - a_7 = 2d = a_9 - a_5 - 2d \Leftrightarrow d = \frac{3x^2 - (x^2+2x)^2}{4}$$

Приравняем эти  $d$ -ы.

$$\frac{(x^2+2x)^2 - 3x - 3}{2} = \frac{3x^2 - (x^2+2x)^2}{4}$$

$$2((x^2+2x)^2 - 3x - 3) = 3x^2 - (x^2+2x)^2$$

$$3(x^2+2x)^2 - 6x - 6 - 3x^2 = 0$$

$$3x^4 + 12x^3 + 12x^2 - 6x - 6 - 3x^2 = 0$$

$$3(x^4 + 4x^3 + 3x^2) - 6(x+1) = 0$$

$$3x^2(x^2+1)(x+3) - 6(x+1) = 0$$

$$(3x^2(x^2+1) - 6)(x+1) = 0$$

$$3x^2 \neq 0$$

$$3x^3 + 3x^2 - 6 = 0$$

$$\uparrow \text{ корни } x = -1$$

$$x = -1$$

$$3(x+1)(x^2+2x-2) = 0$$

$$\uparrow \text{ корни } x = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2}$$

$$x = -1$$

$$3x = -1; \frac{-2 + \sqrt{12}}{2}, \frac{-2 - \sqrt{12}}{2}$$

$$\text{Ответ: } x = -1, x = \frac{-2 + \sqrt{12}}{2}; x = \frac{-2 - \sqrt{12}}{2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |2x - 3y| \leq 3 \\ |3x - y| \leq 1 \end{cases}$$



$$18^2 + 30^2 = 6^2(3^2 + 5^2) = 6^2 \cdot 2 \cdot 17$$

$$2x - 3y \leq 3$$

$$3x - y \leq 1$$

$$4x - 4y \leq 4$$

$$0 \leq x - y \leq 1$$

$$A = mn \cdot (m+n)^2 - g(m+n)$$

$$A = (m+n-g)(m+n) = 13n^2$$

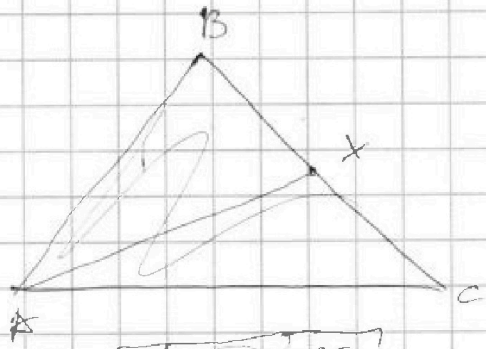
$$B = mn(m+n-3) = 259^2$$

$$45 \cdot 4 = 180 \cdot 2$$

$$\frac{2.5}{6.4}$$

$$45 \cdot 9$$

$$\sqrt{(-6 \pm 6)^2}$$



$$a^2 + b^2 + 5 = 2\sqrt{b^2 + 12b + 35}$$

$$a^2 + b^2 = 20 \cdot 6^2$$

$$a - b + 5 = 2\sqrt{b^2 + 12b + 35}$$

$$\sqrt{6+5x-y^2} = \sqrt{-a^2 + 12a + 56 - 35}$$

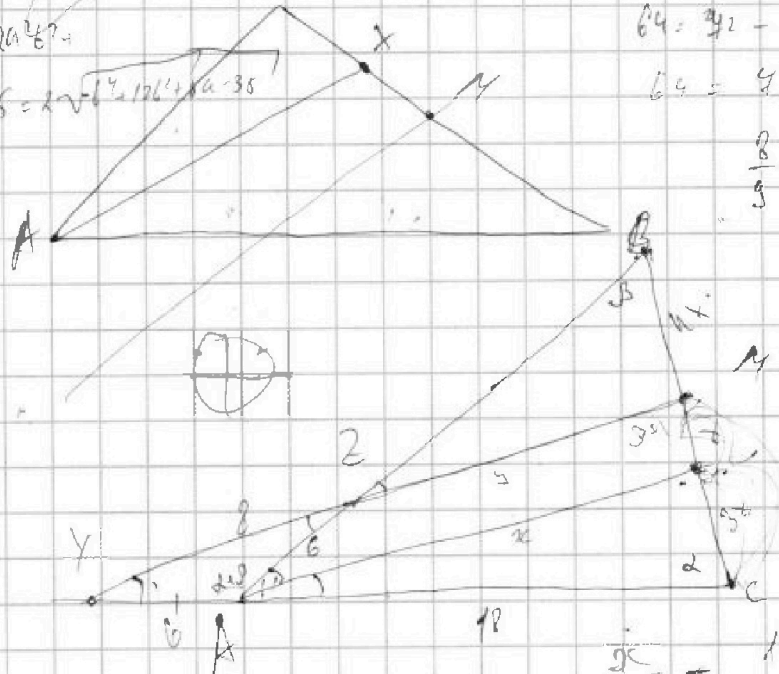
$$64 = 42 - 2 \cdot 30 \cdot \cos 2$$

$$64 = 42(1 - \cos 2)$$

$$\frac{b}{a} = (1 - \cos 2)$$

$$\cos 2 = \frac{1}{9}$$

$$\frac{16}{5^2} = \frac{16}{25}$$



$$\frac{3x}{y+8} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$$

$$3y + 24 = 4x$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3 \\ |3x - y| \leq 1 \end{cases} \quad \text{Рассмотрим четыре случая для правой части}$$

$$\begin{cases} 0 \leq x - 3y \leq 3 & \text{Получим } x \geq 3(y-1) \text{ и } x \leq \frac{4+y}{3} \\ 0 \leq 3x - y \leq 1 & \text{Тогда } \frac{4+y}{3} > 3(y-1) \Rightarrow x \geq 3(y-1) \end{cases}$$

$$4+y \geq 9y-9 \Leftrightarrow 1,25 \geq y \Rightarrow x \leq 0,25, \text{ Тогда}$$

$$\max(4y + 6x) = 5 + 6 = 11$$

$$\begin{cases} 0 \leq x - 3y \leq 3 \\ 0 \leq y - 3x \leq 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 3(y+1) \\ x \geq \frac{y-4}{3} \end{cases} \quad \text{Тогда}$$

$$3(y+1) \geq \frac{y-4}{3} \Rightarrow y \geq 1,25, x \geq 0,25$$

$$y-4 \geq 3(y-1) \Rightarrow y \leq -1, x \geq \frac{y}{3}$$

допустим  $x \geq 3y \Rightarrow x = 3y + d, d \leq 3$

то  $|3x - y| \leq 1 \Rightarrow |(9y + 3d) - y| \leq 1, -1 \leq 8y - 3d \leq 1$

Тогда  $y$  макс =  $\frac{10}{8}$  при  $d = -3$ . Тогда по максимуму

Максимизируем  $4y + 6x = 28y + 6d \leq \frac{14}{3} + \frac{20}{3}y \leq \frac{14}{3} + \frac{20}{3} \cdot \frac{10}{8} \leq 11$

Если  $x - 3y < 0$ , то  $3y \geq x + 1$ , тогда  $-3 \leq d \leq 3$

Тогда  $|3x - y| = |3x - \frac{x+d}{3}| = |\frac{8x}{3} - \frac{d}{3}| \leq 1$

$$-3 \leq 8x - d \leq 3 \Rightarrow 8x \leq 3+d$$

max 1. Тогда  $4y + 2x = \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}d + 2x = \frac{28x + 4d}{3} \leq \frac{14 \cdot (3+d) + 4d}{3}$

$$\frac{4}{3} + \frac{4d}{3} \leq 1,2$$

Ответ:  $4y + 2x \leq 1,2$ , критичн  $y = 1,25, x = 0,25$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 + n^2 + 2mn - 9m - 9n = (m+n)^2 - 9(m+n) = (m+n)(m+n-9)$$

$$B = m^2n + mn^2 - 3mn = mn(m+n-3)$$

1) Рассмотрим случай, когда  $A = 13p^2$ ,  $B = 45q^2$

$$(m+n)(m+n-9) = 13p^2$$

$$mn(m+n-3) = 45q^2$$

Тогда  $\log(m+n-9, m+n) = (m+n, 9)$  По лемме Дюверуа

Поскольку  $m+n$  делится на 3 и 9. Если  $m+n = 9k$ , то

$$m+n-9 = 9(k-1) > 0, \text{ т.к. } 13p^2 > 0, \text{ то}$$

$(m+n)(m+n-9) = 9 \cdot 3^4 k(k-1)$  но это число делится на  $3^4$  а делитель не может делиться на  $p^2$ , при  $p=3$ .

Тогда  $m+n = 3k$ , то  $m+n-9 = 3(k-3)$ , тогда

$$(m+n)(m+n-9) = 3k \cdot 3(k-3) = 9^2 \cdot k(k-3) = 13p^2 \text{ при } p=3 \Rightarrow p=3$$

$$\text{но тогда } k(k-3) = 13 \Leftrightarrow k^2 - 3k - 13 = 0 \Rightarrow k = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 52}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{61}}{2}$$

$$\text{но } k \in \mathbb{Z} \text{ тогда } m+n \notin \mathbb{Z}.$$

Если  $m+n \notin 3$ , то  $(m+n-3) \notin 3$ , тогда  $k \notin 3$  рассмотрим число  $B$ , оно делится на 3, тогда  $k \notin 3$  и  $m, n$  делится на 3.

Так как  $\log(m+n)(m+n-9) \leq 9 = 1$ , то одно из этих чисел будет равным 13, так как  $13p^2 = (m+n)(m+n-9) = a \cdot b$ , где  $\log(a, 6) = 1$ , то одно из чисел равно  $13$  другое  $p^2$ , иных комбинаций невозможно кроме случаев

$$(m+n-9) = 1, \text{ тогда } \Leftrightarrow m+n = 10 \text{ но } 10 \neq 13p^2. \text{ Значит}$$

$$1) \begin{cases} m+n = 13 \\ m+n-9 = p^2 \end{cases} \Rightarrow p=2 \text{ и } \begin{cases} m+n-9 = 13 \\ m+n = 22 \neq p^2 \end{cases} \text{ не подходит}$$

Рассмотрим число  $B = mn(m+n-3) = mn \cdot 10 = 45 \cdot q^2$ , тогда  $45q^2 : 10 \Leftrightarrow 45q^2 : 2 \Leftrightarrow q^2 : 2 \Rightarrow q=2$ .

$$\text{Поэтому, что } \begin{cases} m+n = 13 \\ mn = \frac{45 \cdot 4}{10} = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} (m, n) = (10, 3) \\ (m, n) = (3, 10) \end{matrix}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2) Разберем второй случай  $A = 45q^2, B = 13p^2$

тогда мы знаем, что  $A = (m+n)(m-n) = 45q^2 = 3 \cdot 5^2 q^2$ .

Значит, если  $(m+n) \mid (m-n) \div 3$ , то тогда

$(m+n) \mid (m+n) \div 9$ , т.е.  $\text{НОД}(m+n, m-n) = 1, 3, 9$ . Если

было деление на 3, то и другое. Тогда  $q^2 = 3$ , так как

$$45q^2 \div 9 \Leftrightarrow 5q^2 \div 3 \Rightarrow q = 3$$

$A = (m+n)(m-n) = 3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ , так как  $(m+n, m-n) = 1, 3, 9$ , но не 5, то одно из них делится на  $5^2$ . Тогда

$$\begin{cases} m+n = 3 \cdot 5^2 \\ m-n = 9 \end{cases} \begin{cases} m+n = 3 \\ m-n = 3^2 \cdot 5^2 \end{cases} \begin{cases} m+n = 3^2 \cdot 5^2 \\ m-n = 3 \end{cases} \begin{cases} m+n = 3^2 \\ m-n = 5^2 \cdot 3 \end{cases}$$

тогда  $\begin{cases} m+n = 45 \\ m-n = 9 \end{cases}$  — не подходит  $\begin{cases} m+n = 3^2 \cdot 5^2 \\ m-n = 3 \neq 9 \cdot 25 = 225 \end{cases}$  — не подходит.

Тогда во втором случае у нас нет ответа.

Ответ:  $(m, n) = (3, 40); (40, 3)$

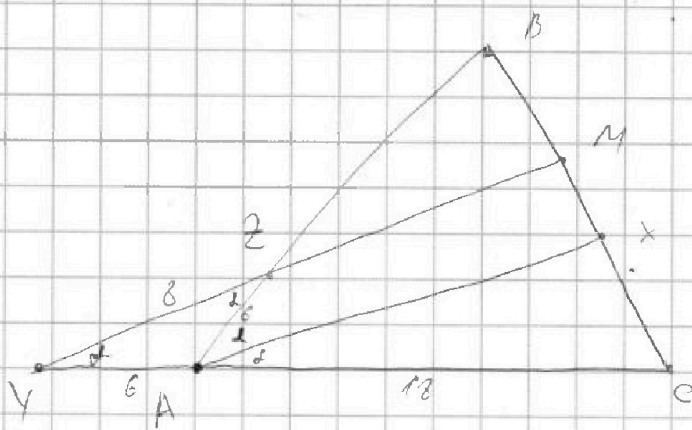


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
↓ ИЗ ↓

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$Ax$  - биссектриса.

$$\angle BAX = \alpha$$

$$\angle XAC = \alpha$$

$$MY \parallel AX \Rightarrow \angle YZA = \angle ZAX = \alpha$$

т.к.  $M$  - середина  $BC$

$$MY \parallel AX \Rightarrow \angle MYC = \angle XAC$$

т.к.  $Y$  - середина  $AC$

$$\angle ZYA = \alpha = \angle ZYA \Rightarrow \triangle YZA - \text{р/в} \Rightarrow ZA = AY = 6$$

$$AX \parallel MY \Rightarrow \triangle CAX \sim \triangle CYM \text{ по двум углам } \angle XAC = \angle MYC$$

$$\frac{CA}{CY} = \frac{CX}{CM} \Rightarrow \frac{CA}{CY} = \frac{12}{4} = \frac{3}{1} = \frac{CX}{CM} \Rightarrow CM = 4x$$

$$\text{т.к. } M - \text{середина } CB \Rightarrow \angle MC = 8x \Leftrightarrow \angle BXC = \angle MC = \Rightarrow \angle Bx = 8x \Rightarrow \angle Bx = 57$$

$$\text{По свойству биссектрисы } \frac{CX}{AC} = \frac{BX}{AB} \Rightarrow \frac{3x}{12} = \frac{57}{y} \Rightarrow y = 30$$

Найдем  $\cos \angle ZAY$  по формуле косинусов

$$ZY^2 = AZ^2 + AY^2 - 2AZ \cdot AY \cdot \cos \angle ZAY \Rightarrow \cos \angle ZAY = \frac{1}{9}$$

$$\cos \angle BAC = -\cos(40^\circ - \angle ZAY) = -\cos \angle ZAY = -\frac{1}{9}$$

По формуле косинусов найдем  $BC$

$$BC = \sqrt{AC^2 + AB^2 - 2 \cdot \cos \angle BAC \cdot AC \cdot AB} = \sqrt{12^2 + 2 \cdot 1080} = \sqrt{1440} =$$

$$\sqrt{4 \cdot 9^2} = 38$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Расширим  ~~$x \geq 26$~~   $a = \sqrt{x+1}$   $\& b = \sqrt{6-x}$

$$a^2 = x+1, \quad b^2 = 6-x \Rightarrow x = 6-b^2 \Rightarrow a^2 = 4-b^2 \Rightarrow a = \sqrt{4-b^2}$$

$$a - b + 5 = 246 \Rightarrow a(1-26) = 6-5 \Rightarrow$$

$$\sqrt{4-b^2} (1-26) = 6-5 \quad \text{возведем обе части в квадрат}$$

$$(4-b^2)(1-46^2-46) = b^2 - 10b + 25$$

$$4 + 206b^2 - 281 + 46^2 - 46^3 - 6 = b^2 - 10b + 25 \quad | : 24$$

$$326b^2 - 19 - 46^3 - 12 = 0 \quad \text{Возведем в квадрат}$$

$$326b^2 - 19 - 46^3 - 12 = 0$$

$$D = 62^2 - 4 \cdot 19 \cdot 12 = \sqrt{2922}$$

$$b_{1,2} = \frac{62 \pm \sqrt{2922}}{24}$$

$$b - x \geq \sqrt{\frac{62 \pm \sqrt{2922}}{24}}$$

$$x = 6 - \sqrt{\frac{62 \pm \sqrt{2922}}{24}}$$

~~$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6-x} \quad | \times (x+1)$$~~

~~$$\sqrt{x+1} (1-2\sqrt{6-x}) - \sqrt{6-x} + 5 = 0$$~~

a





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2} \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2 \end{cases}$$

Заметим, что из-за  $\sqrt{x}, \sqrt{y} \Rightarrow x, y \geq 0$ , и  $\sqrt{6-y} \Leftrightarrow y \leq 6$ .

Возведем первую переменную в квадрат.

$$(x+1) + (6-y) - 2\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{6-y} +$$

Равно той же переменной по  $x^4 + 5x^2 + \sqrt{x} = y^4 + 5y^2 + \sqrt{y}$ , то

если  $x > y \geq 1$  то левая часть только при  $x=y$  равна правой, тогда  $x^4 - y^4 = 0$  и  $x^2 - 5y^2 \geq 0$ ,  $\sqrt{x} \geq \sqrt{y}$ , тогда

$$1 \geq x \geq y \geq 0$$

$$x^4 - y^4 + 5(x^2 - y^2) - \sqrt{x} + \sqrt{y} = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) + 5(x^2 - y^2) + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$(x^2 - y^2)(x^2 + y^2 + 5) + \sqrt{x} - \sqrt{y} = (x-y)(x+y)(x^2 + y^2 + 5) + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) =$$

$$= (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x^2 + y^2 + 5)(x+y) + 1 \geq 0$$

$$\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0 \\ B + 1 = 0 \end{cases} \begin{cases} \sqrt{x} = \sqrt{y} \\ B \end{cases}$$

$$B = -1, \text{ но конъюнкция истинна только при } B = 1$$

если  $x < y$  по монотонности  $\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 0$ ,

$x^2 + y^2 + 5 \geq 0$ ,  $x+y \geq 0$ , тогда возможно только при  $x=y$ , то есть

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2}$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{(x+1)(6-x)} = 2\sqrt{(x+1)(6-x)}$$

Заметим, что  $x \leq 6$ , тогда

$$\sqrt{(x+1)(6-x)} \leq \sqrt{(x+1)(6-x)}$$

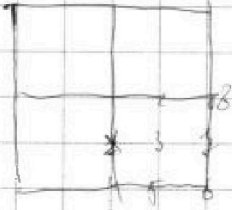


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

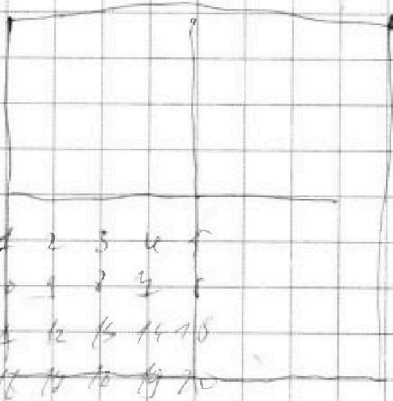
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Точка вычисления вопроса для учета  
равно  $C_2^1 \cdot C_3^1 = 6 \cdot 3 = 18$   
в сумме было для квадрата

$$2^3 \times 2^2 = 6 \cdot 3 = 18$$

Для  $2 \times 8$  квадрата те же самые условия

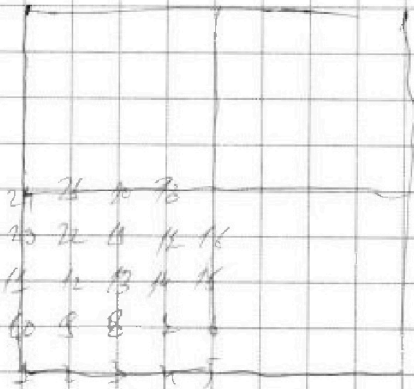


Для  $2 \times 4$  квадрата  $C_2^1 \cdot C_4^1 = 2 \cdot 4 = 8$

Для  $2 \times 4$  квадрата  $2 \cdot 4 = 8$

Для  $2^3 \times 2^2$  квадрата  $100 + 576 + 400$

Всего: 1076



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



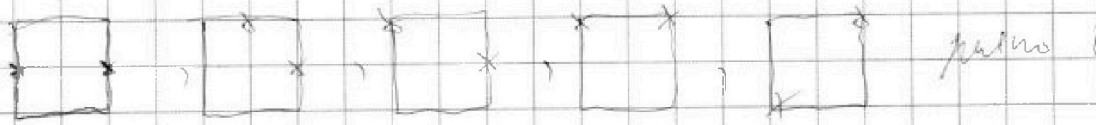
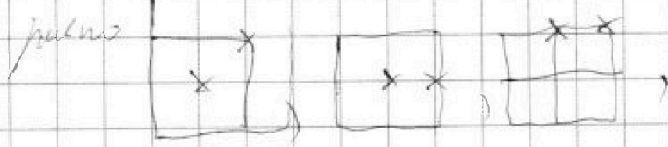
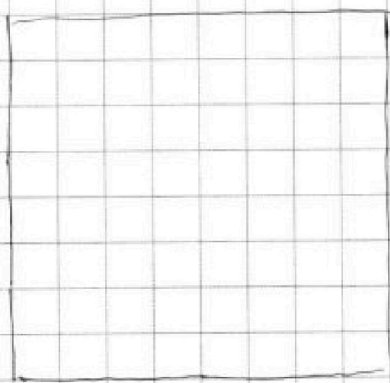
1  2  3  4  5  6  7

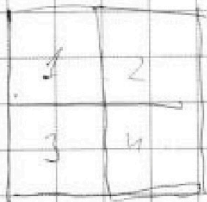
СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Взвешивать по окружности  
по  $n$ , также между или между  
количеством на крайних в  $2 \times 2$  квадрате

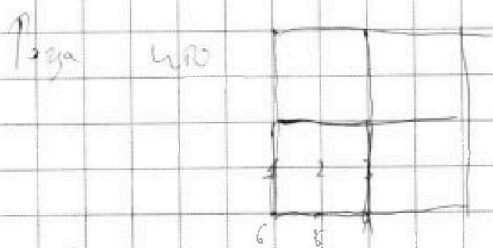
Дано:  $n=1$ .  количество ребер



Для  $n=2$  мы получим либо либо два угла  
нетам  в одном из квадратов тогда можно считать

Два угла допустим. Тогда еще есть

Случай когда на краях два угла в разных квадратах



это либо соседних два квадрата  
либо противоположных. Если соседних  
то нам из каждого надо выбрать по  
одному углу, кроме углов, которые

объект не будет использоваться этих квадратов, получим либо  
три случая либо уже рассмотрели. Тогда количество  
таких случаев для пары  $i$  или  $j$  равно  $C_1^i C_1^j = 3 \times 3 = 9$   
расчет для каждой пары, когда они не соседние то четверти



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

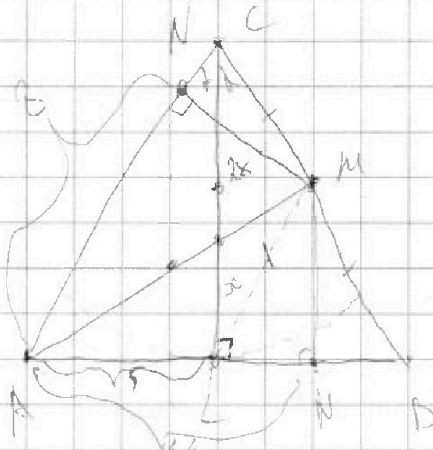
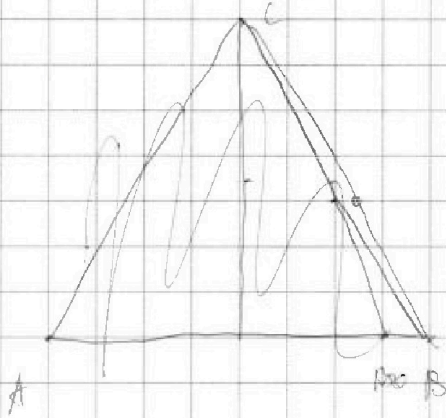
$$\angle MCE = \angle BDC = 50^\circ$$

CD - биссектриса и  $CE \perp AB \Rightarrow \triangle ABC - \text{равнобедренный} \Rightarrow AC = CB$

$\Rightarrow$  тогда  $CE$  - медиана  $AB = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} AC = 10$

$$\angle A = 50^\circ$$

Тогда перпендикуляр радиусов



Тогда  $CM$  - ср. линия  $\angle M = \frac{1}{2} \angle C = \frac{1}{2} (AN = MC)$

$$\angle M = \frac{1}{2} \angle C \text{ (CB - медиана)}$$

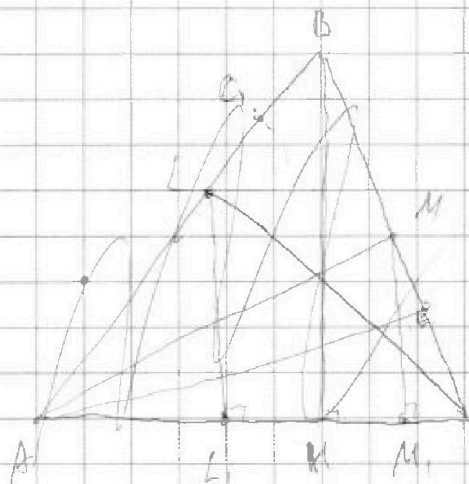


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



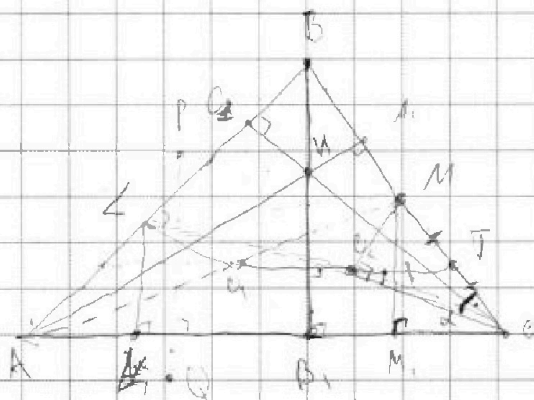
$\angle N \perp AC$ , т.к.  
 $\angle CNA$  опирается на диаметр  
 $AN = 8$   $M_1 = M$   
 $AB = 10$

Точки  $N, E, C_1$  лежат на  $\Omega$   
 Точки  $A, M, M_1$  - лежат на  $\omega$   
 т.к. касание у них

Вспомогательная прямая соединяющая центры окружностей  $\Omega, \omega$

Вспомогательная прямая  $PQ$ , так как  $C_1, A, N, E, P = C_1, U_1, O_1, \Omega$ ,  
 $PQ \perp C_1O_2 \Rightarrow PQ \parallel BB_1 \Rightarrow AA_1 \perp C_1O_2 \perp BB_1$ , и  $BB_1 \perp AC \Rightarrow AC \parallel C_1O_2$   
 $\angle C_1O_2C = \angle C_1CA = \alpha$

Т.к.  $CL$  - биссектриса  $\Rightarrow \angle C_1O_2C = \angle C_1CM = \alpha$



$\angle C_1O_2C = \angle C_1O_2M + \angle C_1O_2L = \angle C_1CM + \angle C_1CL$

$\angle C_1O_2C = \angle C_1CM$

Значит  $MC = AC$  и  $\angle M = \angle C$

$AC = AM + MC = AM + AC$

$AA_1$  и  $MM_1$  - линии параллельны

$\angle A_1AC = \angle M_1MC = 90 - 2\alpha$

$\triangle ALM \sim \triangle ABB_1$  (т.к.  $\angle BAL = \angle BAB_1$  и  $LM \parallel BB_1$ )  $\Rightarrow \frac{AL}{BB_1} = \frac{AM}{AB_1}$

$\Rightarrow \frac{AL}{BB_1} = \frac{AM}{AB_1}$ . Продолжим  $O_1O_2$  до пересечения с  $BC$

т.к.  $O_1O_2 \parallel AC$  и  $O_1$  - середина  $AM$  то  $O_1O_2 \parallel MC = \frac{1}{2} MC$  то  $MO_2 = MC$

$O_1O_2 \parallel AC \Rightarrow \angle O_2O_1C = \angle O_2O_1A = \alpha$  (т.к.  $\angle O_1O_2C = \alpha = \angle O_2O_1A$ )

$\Rightarrow \triangle O_2O_1C - \text{прямоугольный} \Rightarrow \angle O_2O_1C = 90^\circ$ , т.к.

$\angle O_2O_1C = \angle O_2O_1A$  и  $AO_1 \perp LC$  то  $LM = MC$ ,  $MC = \frac{1}{2} AB \Rightarrow$

$LM = BM = \frac{1}{2} AB$  т.к.  $LM = MB = MC$  то  $M$  центр окружности

или центра описанной  $\triangle ABC \Rightarrow ABC - \text{прямоугольный} \Rightarrow \angle BLC = 90^\circ$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x-6} + 5 = 2\sqrt{(x+1)(x-6)}$$

$$AB_1 = AC - 2CM_1 = AC - 2 \frac{CM \cdot CA_1}{CA} = \frac{CA^2 - CM \cdot CA_1}{CA}$$

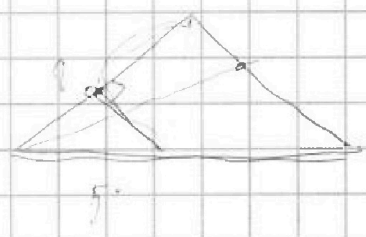
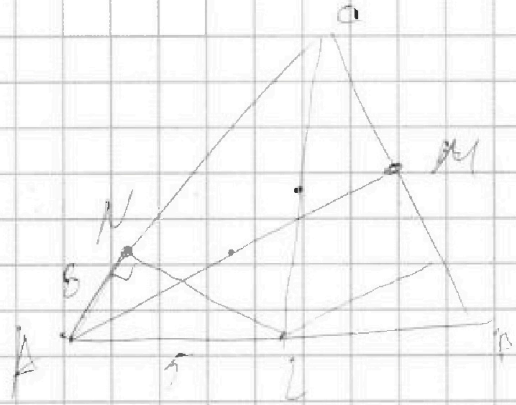
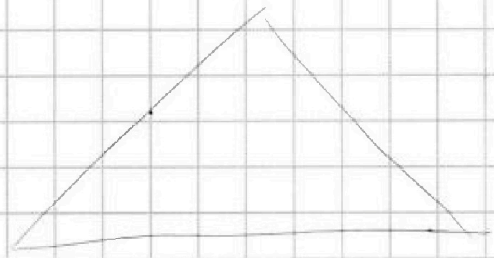
$$\frac{CA^2 - \frac{1}{2} LB \cdot CA_1}{CA} = CR = \frac{1}{2} \frac{LB \cdot CA_1}{LA} = CA - \frac{1}{2} \frac{LB}{LA} \frac{CA}{CM} \cos^2 \alpha$$

$$AB_1 = CA - \frac{LB}{LA} \cdot CA_1$$

$$AB_1 = \frac{B \cdot 10}{LA} = CA - \frac{LB}{LA} \cdot CA_1 \quad AB_1 = LB$$

$$BD = CA - LA - LB - CA_1 = CA(LA - LB \cdot \cos^2 \alpha)$$

$$CA(LA - LB \cdot \cos^2 \alpha) = AB_1$$





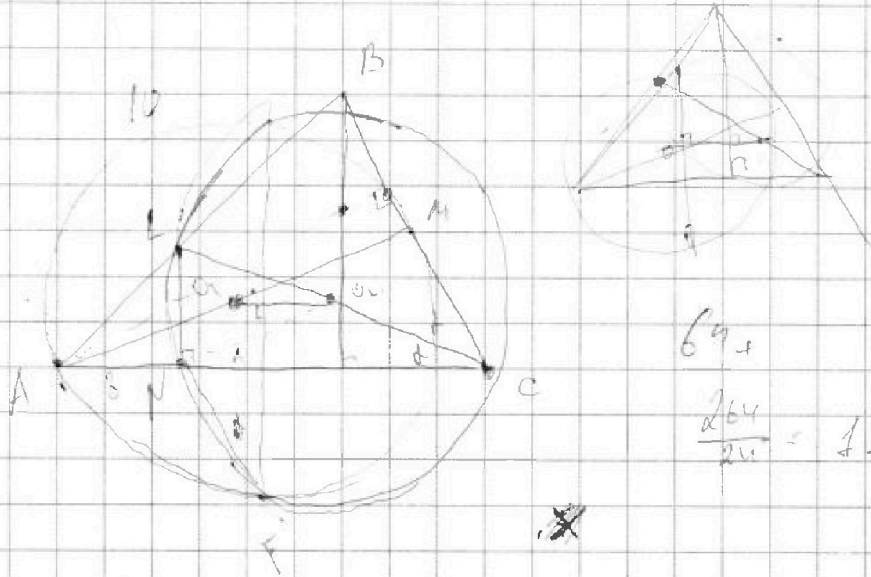
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

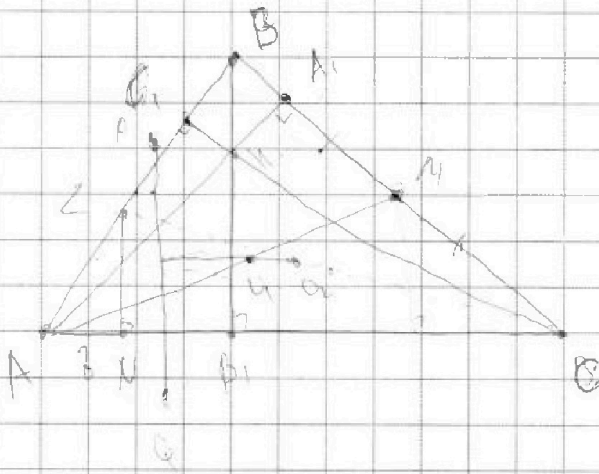
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N



69+

$$\frac{264}{24} = 11$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a_3 = 3x + 13$$

$$a_5 = (x^2 + 2x)^2 = x^4 + 4x^3 + 4x^2$$

$$a_9 = 3x^2$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Тогда  $a_9 - a_3 = 9d - d = 8d = 2d \cdot 4$

$$a_9 - a_3 = x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 3x - 3 - (3x^2 - x^4 - 4x^3 - 4x^2) = 2x^4 + 8x^3 + 8x^2 - 6x - 6 = 0$$

$$2x^4 + 8x^3 + 8x^2 - 6x - 6 = 0$$

$$3x^4 + 9x^3 + 12x^2 - 6x - 6 = 0$$

$$3(x^4 + 3x^3 + 3x^2) - 6(x+1) = 0$$

$$3x^2(x+1)(x+3) - 6(x+1) = 0$$

$$3x^2(x+1)(x+3) - 6(x+1) = 0$$

$$(x+1)(3x^2(x+3) - 6) = 0$$

$$x = -1$$

$$3x^3 + 9x^2 - 6 = 0$$

$$x^3 + 3x^2 - 2 = 0$$

$$x = -1$$

$$\sqrt{6+5x+y^2} = \sqrt{10-a^2+5(1-31)} = \sqrt{(1-6)^2+5(6-31)}$$

$$\sqrt{x+1} = \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}$$

$$6+5x-y^2 = (6-y)^2 + 12(6-y) = -y^2 + 36 + 5$$

$$-3x - y^2 + 12y + 48 = -y^2 + 56$$

$$14x + 3 = 36 + 12y + 12$$

$$14x = 45 + 12y$$

$$(x-y)(x^2+y^2)(x+y) + (\sqrt{x}-\sqrt{y}) + 5(x^2-y^2)$$

$$(x^2-y^2)(x+y) + 5(x^2-y^2) = 0$$

$$(x-y)(x+y)$$

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})(x+y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})$$

$$(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})(x+y)(x+y+5)$$

$$1324$$

$$260+64 = 324 = 900$$

$$\begin{array}{r} x^3 + 3x^2 - 2 \\ - (x^3 + 3x^2 - 2) \\ \hline 0 \end{array}$$

$$-2x^2 - 2$$

$$2x^2 + 2$$

$$-2x - 2$$

$$\begin{array}{r} x+1 \\ x^2+2x-2 \\ \hline x^2+2x-2 \end{array}$$

$$D = 4 + 4 \cdot 2 = 12$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2}$$

$$3 \pm$$



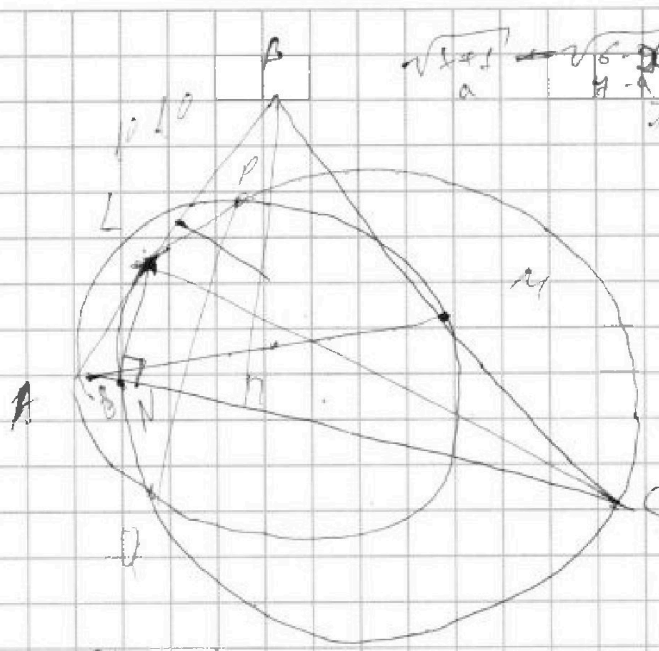


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{(x+1)(6-x)}$$

$$18.25 / 31$$

$$23/31$$

$$\frac{6+5x-x^2}{-x^2-x} \Big/ \frac{x+6}{-x+6}$$

$$x-y = 1 \quad d \geq 0$$

$$a-6+5 = 206$$

$$\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x-3y \leq 3 \\ 3x-y \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y \leq 1 \\ a^2 = x+6 \\ b^2 = 6-x \\ a+b = 11 \end{cases}$$

$$x \leq 3(y+1) \quad (x-1)(y) = 2x+x-y \leq 1 \quad x = \sqrt{6-b^2}$$

$$x \leq \frac{1-y}{3} \quad P(x)(x+1) - P(x)d + 2x \leq 1 \quad a^2 = y+6^2$$

$$a = \sqrt{y-6^2}$$

$$x-3y \leq 3 \quad x \leq 3(y+1) \quad x \leq \frac{1-y}{3} \quad 90 - \frac{d}{1}$$

$$3x-y \leq 1 \quad 31 \quad 964.4 \quad 48 - 48 \quad 960 - 48$$

$$y \leq 1 \rightarrow 3x-1 \quad 3600 - 244 \quad (x+4)(y-1) \quad 812$$

$$3644 - 912 = 2732 \quad 1461$$

$$\sqrt{x(x-y^2)}(x+2y+5) + (\sqrt{x-y}) = 0$$

$$(x-y)(x+y)(x+2y+5) + (\sqrt{x-y}) = 0$$

$$(\sqrt{x-y})(\sqrt{x+y})(x+2y+5) + 1) \geq 0$$

$$\sqrt{x-y} = 6 + 2a - 5$$

$$(x-1)(6-x) \geq 2.5^2$$

$$6+5x-x^2 \geq 6.25$$

$$0 \geq x^2 - 5x + 0.25$$

$$D = 25 - 4 \cdot 0.25$$

$$\frac{5 \pm \sqrt{6}}{2}$$