



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 6



1. [3 балла] Второй член арифметической прогрессии равен $12 - 12x$, четвёртый член равен $(x^2 + 4x)^2$, а восьмой равен $(-6x^2)$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $10x + 5y$ при условии

$$\begin{cases} |2x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 2y| \leq 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n$ и $B = m^2n - 2mn^2 - 2mn$ равно $17p^2$, а другое равно $15q^2$, где p и q — простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2}, \\ 2x^5 + 4x^2 - \sqrt[3]{3y} = 2y^5 - \sqrt[3]{3x} + 4y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 7×7 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 6$, $AN = 5$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть первый член арифм. прогрессии равен a_1 , тогда

$$\text{второй член } a_2 = a_1 + k$$

$$\text{третий } a_3 = a_1 + 2k$$

$$\text{четвертый } a_4 = a_1 + 3k$$

$$\text{восьмой } a_8 = a_1 + 7k$$

Тогда рассмотрим разности данных членов арифметической прогрессии:

$$a_4 - a_2 = a_1 + 3k - (a_1 + k) = 2k$$

$$a_8 - a_4 = a_1 + 7k - (a_1 + 3k) = 4k \Rightarrow$$

$$a_8 - a_2 = a_1 + 7k - (a_1 + k) = 6k$$

$$\Rightarrow 2(a_4 - a_2) = a_8 - a_4; \quad (1)$$

$$\Rightarrow \cancel{3(a_4 - a_2)} = a_8 - a_4; \quad (2)$$

По условию: $a_2 = 12 - 12x$

$$a_4 = (x^2 + 4x)^2$$

$$a_8 = -6x^2$$

Подставим a_2 , a_4 , a_8 в уравнение (1) и решим его:

$$2((x^2 + 4x)^2 - (12 - 12x)) = -6x^2 - (x^2 + 4x)^2$$

$$3(x^2 + 4x)^2 - 2(12 - 12x) + 6x^2 = 0$$

$$3(x^2 + 4x)^2 - 24 + 24x + 6x^2 = 0 \quad | :3$$

$$(x^2 + 4x)^2 + 2x^2 + 8x - 8 = 0$$

$$(x^2 + 4x)^2 + 2(x^2 + 4x) - 8 = 0$$

Замена: $x^2 + 4x = t$

$$t^2 + 2t - 8 = 0$$

$$D = 4 + 4 \cdot 8 = 36$$

$$t_1 = \frac{-2 + 6}{2} = 2$$

$$t_2 = \frac{-2 - 6}{2} = -4$$

1) при $t = 2$:

$$x^2 + 4x = 2$$

$$x^2 + 4x - 2 = 0$$

$$D = 16 + 4 \cdot 2 = 24$$

$$x_1 = \frac{-4 + 2\sqrt{6}}{2} = -2 + \sqrt{6}$$

$$x_2 = -2 - \sqrt{6}$$

а) при $x = -2 + \sqrt{6}$:

$$a_2 = 12 - 12(-2 + \sqrt{6}) = 12 + 24 - 12\sqrt{6} = 36 - 12\sqrt{6}$$

$$a_4 = 4$$

$$a_8 = -6(-2 + \sqrt{6})^2 = -6(4 - 4\sqrt{6} + 6) = -6(10 - 4\sqrt{6}) = -60 + 24\sqrt{6}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Подставим a_2 , a_4 и a_8 в уравнение (2):

$$3(4 - 36 + 12\sqrt{16}) = -60 + 24\sqrt{16}$$

$$-96 + 12\sqrt{16} = -60 + 24\sqrt{16}$$

$$12\sqrt{16} = -36$$

Проверим $\Rightarrow x = -2 + \sqrt{6}$

1) при $x = -2 - \sqrt{6}$

$$a_2 = 12 - 12(-2 - \sqrt{6}) = 12 + 24 + 12\sqrt{6} = 36 + 12\sqrt{6}$$

$$a_4 = 4$$

$$a_8 = -6(-2 - \sqrt{6})^2 = -6(2 + \sqrt{6})^2 =$$

$$= -6(4 + 6 + 4\sqrt{6}) = -60 - 4\sqrt{6}$$

Подставим a_2 , a_4 и a_8 в уравнение (2):

$$3(4 - 36 - 12\sqrt{6}) = -60 - 4\sqrt{6}$$

$$-96 - 36\sqrt{6} = -60 - 4\sqrt{6}$$

Проверим $\Rightarrow x = -2 - \sqrt{6}$

2) при $t = -4$:

$$x^2 + 4x = -4$$

$$x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$(x + 2)^2 = 0$$

$$x = -2$$

при $x = -2$:

$$a_2 = 12 - 12 \cdot (-2) = 12 + 24 = 36$$

$$a_4 = (2^2 + 4(-2))^2 = (4 - 8)^2 = 16$$

$$a_8 = -6 \cdot 2^2 = -6 \cdot 4 = -24$$

Подставим a_2 , a_4 и a_8 в ур-е (2):

$$3(16 - 36) = -24 - 36$$

$$3(-20) = -60$$

$$-60 = -60$$

Значит $x = -2$ подходит

Ответ: $x = -2$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n = (m - 2n)^2 + 13(m - 2n) = (m - 2n)(m - 2n + 13)$$

$$B = m^2n - 2mn^2 - 2mn = mn(m - 2n - 2)$$

$$A = (m - 2n)(m - 2n + 13) \Rightarrow \text{разность наших-то двух делителей числа } A \text{ равна } m - 2n + 13 - m + 2n = 13$$

Рассмотрим случай, когда $A = 17p^2$. Тогда рассмотрим все возможные разности делителей числа A и попробуем приравнять их к 13 — необходимой нам разности.

а) $17p^2 - p = 13$
 $17p^2 - 14$
 $p \notin \mathbb{Z} \Rightarrow$
 не подходит

б) $17p - p = 13$
 $16p = 13$
 $p \notin \mathbb{Z}$
 не подходит

в) $17 - p^2 = 13$
 $p^2 = 4$
 $p = 2$ — подходит
 $p = -2$ — не у-т условию, так p — простое, натуральное число

г) $p^2 - 17 = 13$
 $p^2 = 30$
 $p \notin \mathbb{Z}$
 не подходит

д) $p - 17p = 13$
 $-16p = 13$
 $p \notin \mathbb{Z}$
 не подходит

е) $1 - 17p^2 = 13$
 $17p^2 = -12$
 $p \notin \mathbb{Z}$
 не подходит

Такими образом, нам подходит вариант, когда больший делитель числа A равен 17, а меньший равен $p^2 = 2^2 = 4$, т.е.
 $m - 2n = 4$ $m - 2n + 13 = 17$
 $m = 2n + 4$

$$\text{Тогда } B = mn(m - 2n - 2) = (2n + 4)n(2n + 4 - 2n - 2) = (2n + 4) \cdot 2n = 4n^2 + 8n = 4n(n + 2) = 15q^2$$

так q — простое $\Rightarrow q^2 = 4 \Rightarrow q = 2$
 $q = -2$ — не у-т условию

$$n(n + 2) = 15$$

$$n^2 + 2n - 15 = 0$$

$$D = 4 + 60 = 64$$

$$n_1 = \frac{-2 + 8}{2} = 3$$

$$n_2 = \frac{-2 - 8}{2} = -5$$

$$\Rightarrow m = 2 \cdot 3 + 4 = 10$$

$$\boxed{\begin{matrix} m = 10 \\ n = 3 \end{matrix}}$$

Продолжим на след. странице.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

② Рассмотрим случай, когда $A = 15q^2$. Тогда рассмотрим все возможные разности делителей числа A и попытаемся угадать их и 13 - кратной или разности:

а) $15q^2 - 1 = 13$
 $15q^2 = 14$
 $q \notin \mathbb{Z}$
 не подходит

б) $5q^2 - 3 = 13$
 $5q^2 = 16$
 $q \notin \mathbb{Z}$
 не подходит

в) $3q^2 - 5 = 13$
 $3q^2 = 18$
 $q^2 = 6$
 $q \notin \mathbb{Z}$
 не подходит

г) $q^2 - 15 = 13$
 $q^2 = 28$
 $q \notin \mathbb{Z}$
 не подходит

д) $5q - 3q = 13$
 $2q = 13$
 $q \notin \mathbb{Z}$
 не подходит

е) ~~$15q - q = 13$~~
 $14q = 13$
 $q \notin \mathbb{Z}$
 не подходит

ж) $1 - 15q^2 = 13$
 $15q^2 = -12$
 $q \notin \mathbb{Z}$
 не подходит

з) $3 - 5q^2 = 13$
 $5q^2 = -10$
 $q^2 = -2$
 $q \notin \mathbb{Z}$
 не подходит

и) $5 - 3q^2 = 13$
 $3q^2 = -8$
 $q \notin \mathbb{Z}$
 не подходит

к) $15 - q^2 = 13$
 $q^2 = 2$
 $q \notin \mathbb{Z}$
 не подходит

л) $3q - 5q = 13$
 $2q = 13$
 $q \notin \mathbb{Z}$
 не подходит

м) $q - 15q = 13$
 $-14q = 13$
 $q \notin \mathbb{Z}$
 не подходит

Таими образом, A не может быть равно $15q^2$.
 Значит единственной подходящей парой чисел (m, n) является пара $(10, 3)$

Ответ: $(10, 3)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

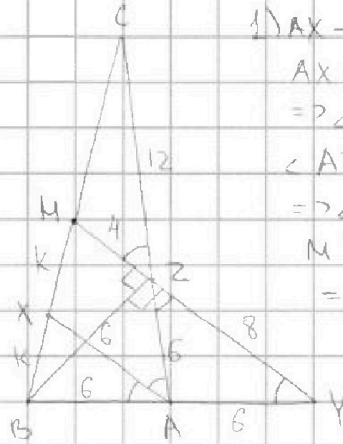
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Дано:

$\triangle ABC$
 AX - биссектриса
 MY - медиана BC
 $прямая\ a \parallel AX$
 $T \in a$
 $a \cap AC = TZ$
 $a \cap AB = TY$
 $AC = 18$
 $AZ = 6$
 $YZ = 8$



Решение:

1) AX - биссектриса $\Rightarrow \angle BAX = \angle XAZ$
 $AX \parallel MY, AC$ - секущая \Rightarrow
 $\Rightarrow \angle XAZ = \angle YZA$
 $\angle AZY$ и $\angle MZC$ - верт. \Rightarrow
 $\Rightarrow \angle AZY = \angle MZC$
 $MY \parallel AX, BY$ - секущая \Rightarrow
 $\Rightarrow \angle ZYA = \angle XAB$ (соотв.)
~~Тогда имеем:~~
 $\angle BAX = \angle XAZ = \angle AZY =$
 $= \angle MZC = \angle ZYA$

2) ~~AC=18~~ $AC=18$ | $\Rightarrow CZ = AC - AZ = 12$
 $AZ=6$

4) Рассмотрим $\triangle AZY$: $\angle AZY = \angle ZYA \Rightarrow$
 $\Rightarrow \triangle AZY$ - равнобедренный $\Rightarrow AZ = ZY = 6$
 3) Рассмотрим $\triangle CZM$ и $\triangle CAX$:
 $\angle CZM = \angle CAX$ (по 1)) $\Rightarrow \triangle CZM \sim \triangle CAX \Rightarrow$
 $\angle C$ - общий (по 2 углам)
 $\Rightarrow \frac{MC}{XC} = \frac{CZ}{CA} = \frac{MZ}{XA} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \frac{MC}{XC} = \frac{2}{3} \Rightarrow XC = \frac{3}{2} MC$
 $\Rightarrow \frac{MZ}{XA} = \frac{2}{3} \Rightarrow XA = \frac{3}{2} MZ$

5) Рассмотрим $\triangle MYB$ и $\triangle XAB$.
 $\angle MYB = \angle XAB$ (по 1)) $\Rightarrow \triangle MYB \sim \triangle XAB \Rightarrow$
 $\angle B$ - общий (по 2 углам)
 $\Rightarrow \frac{MY}{XA} = \frac{YB}{AB} = \frac{MB}{XB} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \frac{MZ+8}{\frac{3}{2} MZ} = \frac{6+AB}{AB} = \frac{MC}{2MC-XC} = \frac{MC}{2MC-\frac{3}{2}MC} = \frac{MC}{\frac{1}{2}MC} = 2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \frac{MZ+8}{\frac{3}{2} MZ} = 2 \Rightarrow MZ+8 = 3MZ \Rightarrow MZ=4 \Rightarrow$
 $\Rightarrow MY = MZ + ZY = 4+8=12 \Rightarrow \frac{12}{XA} = 2 \Rightarrow XA=6$
 $\frac{MY}{XA} = 2$
 $\Rightarrow \frac{6+AB}{AB} = 2 \Rightarrow AB=6$

Продолжение на след. странице

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{MB}{XB} = 2 \Rightarrow MB = 2XB = XM + XB \Rightarrow XM = XB$$

~~Рассм. $XM = XB = a$~~

Обозначим $XM = XB = k \Rightarrow MB = 2k \Rightarrow BC = 2MB = 4k$

6) Рассм. ΔBZY - вписан в окр-ть с центром в т. А, с радиусом $BA = ZA = YA \Rightarrow BY$ - диаметр $\Rightarrow \Delta BZY$ - п/у, $\angle BZY = 90^\circ$ (т.к. треугольник, описанный на диаметр описанной окружности - прямоугольный).

7) $\angle MZB = 180^\circ - \angle BZY = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

8) Рассм. ΔBZY - п/у. По т-ме Пифагора:
 $BZ = \sqrt{BY^2 - ZY^2} = \sqrt{12^2 - 8^2} = \sqrt{144 - 64} = \sqrt{80}$

9) Рассм. ΔBZM - п/у. По т-ме Пифагора:
 $BM = \sqrt{MZ^2 + BZ^2} = \sqrt{16 + 80} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6} = 2k \Rightarrow$
 $\Rightarrow k = 2\sqrt{6} \Rightarrow BC = 4k = 4 \cdot 2\sqrt{6} = 8\sqrt{6}$

Ответ: $BC = 8\sqrt{6}$

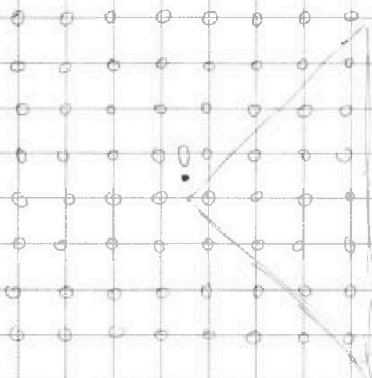


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Количество способов выбрать 2 узла (без учета поворотов) равно $C_2^{3 \cdot 6} = C_2^{64} = \frac{64!}{2! \cdot (64-2)!} = \frac{63 \cdot 64}{2} = 63 \cdot 32$.

Рассмотрим треугольник, отмеченный на рисунке. Для всех узлов, находящихся внутри него можно найти ~~один~~ узел, симметричный данному относительно $T.O$ - центра квадрата. Расстояние 2 между точками мы получим

расширив, когда через 2 поворота переходим к себе же. Значит она была учтена 2 раза. Этого пар точек, учтенных два раза будет 16. Остальные пары будут учтены по 4 раза. $63 \cdot 32 - 16 \cdot 2 = 62 \cdot 32$ - число пар точек, учтенных 4 раза, умноженное на 4. Тогда, если все умножить на 4, получим

$$\frac{62 \cdot 32}{4} + 16 = 62 \cdot 8 + 8 \cdot 2 = 8 \cdot 64 = 8^3 = 512$$

Ответ: $8^3 = 512$

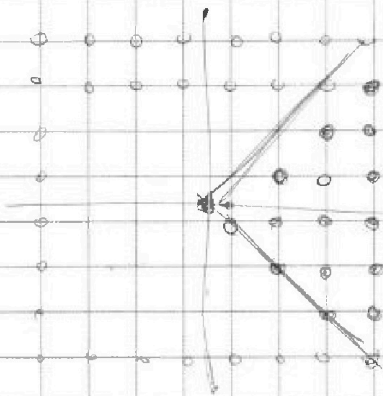


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ 2 _
ИЗ
_ 7 _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



16 пар точек можно
6 точек, где можно выбрать
линию, чтобы
защитить 2 пары.

Остаточные 4 пары

Всего 8 пар кубов:

$$\frac{63 \cdot 64}{2} = 32 \cdot 63$$

$$C_2^{64} = \frac{64!}{(64-2)! \cdot 2!}$$

~~Всего 32~~

Учитываем 2 пары:

$$) 16 = 32$$

$$32 \cdot 63 - 22 =$$

$$= 32 \cdot 62 - \text{учтено}$$

$$\Rightarrow \sqrt{8 \cdot 62 + 16} =$$

$$= 8 \cdot 62 + 8 \cdot 2 =$$

$$= 8 \cdot 64 = 8^3$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y}$$

$$\begin{aligned} (x+4)(3-y) &= \\ &= 3x + 12 - xy - 4y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n = \\ &= (m-2n)^2 + 13(m-2n) = \\ &= \underbrace{(m-2n)}_{\text{неч.}} \underbrace{(m-2n+13)}_{\text{неч.}} \Rightarrow \text{делители отличаются на } 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= m^2n - 2mn^2 - 2mn = \\ &= mn(m-2n-2) \Rightarrow m, n - \text{нечетные} \end{aligned}$$

Рассмотрим число B: при $B = 17p^2$, $A = 15q^2$
его делители: $m, n, (m-2n-2)$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} m &= 17 \\ n &= (m-2n-2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \text{ при } B = 17p^2 - \text{нечетное, } p \neq 2 \\ A - \text{целое} \Rightarrow A = 15q^2 = 15 \cdot 2^2 = 15 \cdot 4 = 60 \\ (n-2n)(m-2n+13) = 60 \\ \textcircled{1} \begin{cases} m-2n = 15 \\ m-2n+13 = 4 \end{cases} \Rightarrow \end{aligned}$$

Заметим, что разность чисел A отличается на 13

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \text{ при } B - \text{нечетное } m, n - \text{нечетные} \Rightarrow \\ \Rightarrow m-2n - \text{неч.}; m-2n+13 - \text{нечетное} \\ \text{a) при } B = 17p^2: \\ A = 15p^2 = 15p^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \text{ при } B - \text{четное} \\ \textcircled{1} \text{ при } m - \text{нечетное} \end{aligned}$$

17 и p^2	p и p^2	17	при $A = 17b^2$:
$p^2 - 17 = 13$	$17 - p^2 = 13$	$17p - p = 13$	$17p^2 - 1 = 13$
$p^2 = 13 + 17$	$p^2 = 4$	$16p = 13$	$17p^2 = 14$
$p^2 = 30$	$p = 2$	$p \neq 2$	$p \neq 2$
$p \notin \mathbb{Z}$	$p = 2$		



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(14) $a_4 = 12 - 12x$ $a_2 = a_1 + k$

$a_4 = (x^2 + 4x)^2$ $a_4 = a_2 + 2k = a_1 + 3k$

$a_2 = (-6x^2)$ $a_2 = a_4 + 4k = a_1 + 7k$

$a_4 - a_2 = 2k$ $\Rightarrow 2(a_4 - a_2) = (a_2 - a_4)$

$a_2 - a_4 = 4k$

$a_2 - a_2 = 6k$

$2(a_4 - a_1) = (a_2 - a_4)$

$2((x^2 + 4x)^2 - 12 + 12x) = (-6x^2) - 12 + 12x$

$2(x^2 + 4x)^2 - 24 + 24x = -6x^2 - 12 + 12x$

$2(x^2 + 4x)^2 - 24 + 24x + 6x^2 + 12 - 12x = 0$

$2(x^2 + 4x)^2 + 6x^2 + 12x - 12 = 0 \quad | :2$

$(x^2 + 4x)^2 + 3x^2 + 6x - 12 = 0$

$(x^2 + 4x)^2 + 3(x^2 + 2x + 1) - 15 = 0$

$(x^2 + 4x)^2 + 3(x + 1)^2 - 15 = 0$

$x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 3x^2 + 6x - 12 = 0$

$x^4 + 8x^3 + 19x^2 + 6x - 12 = 0$

Привести к x^2

$2a_4 - 2a_2 = a_2 - a_4$

$3a_4 - 2a_2 = a_2$

$3(x^2 + 4x)^2 - 2(12 - 12x) = -6x^2$

$3(x^2 + 4x)^2 - 24 + 24x + 6x^2 = 0 \quad | :3$

$(x^2 + 4x)^2 + 2x^2 + 8x - 8 = 0$

$(x^2 + 4x)^2 + 2(x^2 + 4x - 4) = 0$

$(x^2 + 4x)^2 + 2(x^2 + 4x) - 8 = 0$

Заменим $x^2 + 4x = t$

$t^2 + 2t - 8 = 0$

$D = 4 + 4 \cdot 8 = 36$

$t_1 = \frac{-2 + 6}{2} = 2$

$t_2 = \frac{-2 - 6}{2} = -4$

1) При $t = 2$:

$x^2 + 4x = 2 \Rightarrow x^2 + 4x - 2 = 0$

$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 8}}{2}$

$x = \frac{-4 \pm \sqrt{24}}{2}$

$D = 16 + 4 \cdot 2 = 24$

$x_1 = \frac{-4 + \sqrt{24}}{2} = -2 + \sqrt{6}$

$x_2 = \frac{-4 - \sqrt{24}}{2} = -2 - \sqrt{6}$

2) При $t = -4$:

$x^2 + 4x = -4$

$x^2 + 4x + 4 = 0$

$D = 16 - 4 \cdot 4 = 0$

$x_3 = \frac{-4}{2} = -2$

$a_4 - a_1 = 8 - 6(-2 + \sqrt{6})^2 =$

$= -6(4 - 4\sqrt{6} + 6) =$

$= -6(-4\sqrt{6} + 10) = 24\sqrt{6} - 60 \Rightarrow$

$\Rightarrow k = 4\sqrt{6} - 10$

(15) $a_1 = 12 + 24 = 36$

$a_4 = (4 - 8)^2 = 16$

$a_2 = 6 \cdot (-2)^2 = -24$

$a_4 - a_1 = -20$

$a_2 - a_4 = -24 - 16 = -40$

$a_2 - a_2 = -24 - 36 = -60$

(✓)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

②

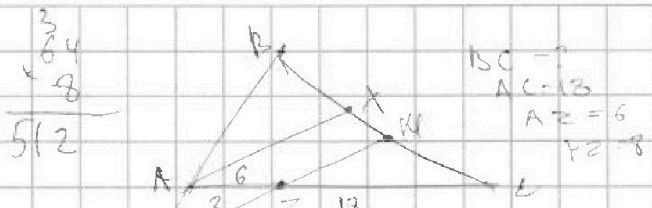
$$\begin{cases} 10x + 9y \\ |2x - 3y| \leq 6 \\ |3x - 2y| \leq 4 \end{cases}$$

① при $2x - 3y < 0, x, y \in \mathbb{R}$

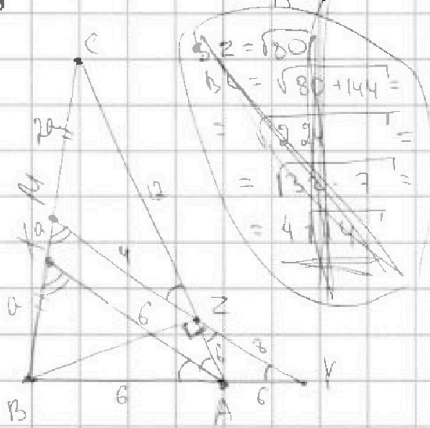
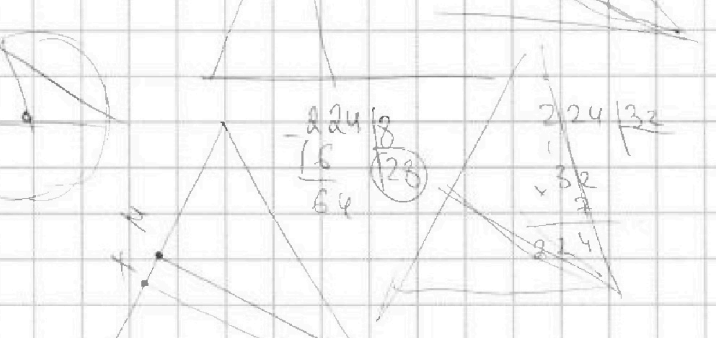
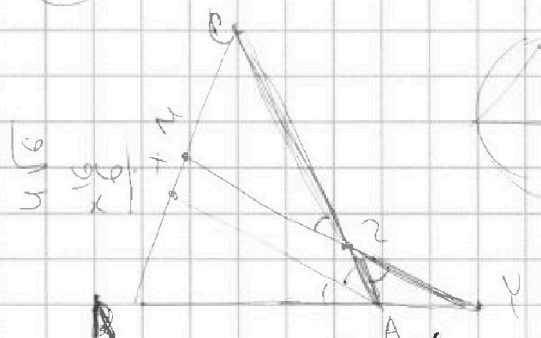
② при $3x - 2y < 0$

$$\begin{cases} |2x - 3y| < 0 \cdot 3 \\ |3x - 2y| < 0 \cdot 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6x - 9y < 0 \\ 6x - 4y < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -9y + 4y < 0 \\ 6x - 4y < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5y < 0 \\ 6x - 4y < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y < 0 \\ y < 1.5x \end{cases}$$



③ $A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n$



$BZ = 150$
 $AC = \sqrt{80 + 144} = \sqrt{224} = 14\sqrt{2}$
 $MC = 2, XC = \frac{3}{2}MC$
 $\frac{MC}{XC} = \frac{2}{3}$
 $\Delta MCZ \sim \Delta XCA$
 $\frac{MC}{XC} = \frac{CZ}{CA} = \frac{MZ}{XA} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$
 $\Delta MYB \sim \Delta XAB$
 $\frac{MY}{XA} = \frac{YB}{AB} = \frac{MB}{XB}$
 $\frac{MB}{XB} = 2 \Rightarrow MB = 2XB = MZ + 8 = \frac{3}{2}MZ$
 $2MZ = MZ + 8 \Rightarrow MZ = 8$
 $3MZ = MZ + 8 \Rightarrow 2MZ = 8 \Rightarrow MZ = 4$

$\frac{B+AB}{AB} = 2$
 $2AB = B+AB$
 $AB = B$
 $\frac{MZ+8}{\frac{3}{2}MZ} = 2$
 $2(MZ+8) = 3MZ$
 $2MZ + 16 = 3MZ$
 $MZ = 16$

$\frac{12}{XA} = 2 \Rightarrow XA = 6$
 $\frac{MC}{2MC - \frac{3}{2}MC} = \frac{MC}{\frac{1}{2}MC} = 2$
 $\Delta BZY \in \text{окр-ти с центром в т. M, } \in \mathbb{R}$
 $\Rightarrow R = 6 \Rightarrow ABZY - \text{н/ч} = 5$
 $\Rightarrow BZ^2 = \sqrt{12^2 - 6^2} = \sqrt{144 - 36} = 108$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

при $p=2$ $A = 17 \cdot 2^2 = 17 \cdot 4$

$(m-2n)(m-2n+13) = 17 \cdot 4$

$m-2n+13 = 17$

$m-2n = 4$

~~$4 \cdot 17 = 2 \cdot 2 \cdot 17$~~

~~$m-2n+13 = 17$~~

$m = 2n + 4$

$B = mn(m-2n-2) = (2n+4)n(2n+4-2n-2) =$

$= (2n+4) \cdot 2n$

$B = 2(n+2) \cdot 2n = 4n(n+2) = 15q^2$

$q^2 = 4 \Rightarrow q = 2$

$n(n+2) = 15$

$n^2 + 2n - 15 = 0$

$D = 4 + 4 \cdot 15 = 64$

$n_1 = \frac{-2 + 8}{2} = 3$

$n_2 = \frac{-2 - 8}{2} = -5$ не у нас

Ответ:

$m = 2 \cdot 3 + 4 = 10$
 $n = 3$

при $A = 15q^2 = 15q^2 \cdot 1 = 5q^2 \cdot 3 = 3q^2 \cdot 5 = 15 \cdot q^2 =$

~~$15q^2$~~ $= 5q \cdot 3q = 15q \cdot q$

$15q^2 - 1 = 13$
 $q \notin \mathbb{Z}$

~~$5q^2 - 3 = 13$~~
 $5q^2 = 16$
 $q \notin \mathbb{Z}$

$3q^2 - 5 = 13$
 $3q^2 = 18$
 $q^2 = 6$
 $q \notin \mathbb{Z}$

~~$15 - q^2 = 13$~~
 $q^2 = 2$
 $q \notin \mathbb{Z}$

$q^2 - 15 = 13$
 $q^2 = 28$
 $q \notin \mathbb{Z}$

$5q \cdot 3q = 13$
 $15q^2 = 13$
 $q \notin \mathbb{Z}$

$15q - q = 13$
 $16q = 13$
 $q \notin \mathbb{Z}$

Можно рассмотреть решение в целых числах.

при $m=10$
 $n=3$

$A = 100 - 120 + 36 + 130 - 26 \cdot 3 =$
 $= 260 - 198 = 62 = 4 \cdot 17$

$B = 300 - 180 - 60 = 60 = 15 \cdot 4$

Ⓟ



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$|2x - 3y| \leq 6$ касание $10x + 5y = ?$
 $|3x - 2y| \leq 4$

① при $2x - 3y < 0$ $-(2x - 3y) \leq 6$
 $2x < 3y$ $2x - 3y \geq 6$
 $x < \frac{3y}{2}$ $3y + 6 \leq 2x$

$\begin{cases} |2x - 3y| \leq 6 \\ |3x - 2y| \leq 4 \end{cases}$ $(2x - 3y)(3x - 2y) \leq 24$
 $6x^2 - 9xy - 4xy - 6y^2 \leq 24$
 $6x^2 - 13xy - 6y^2 \leq 24$

$10x + 5y$ - касание. при x - касание, y - касание.

$2x \leq 6$
 $3x \leq 4 \Rightarrow x \leq \frac{4}{3} \Rightarrow 10x + 5y = 10 \cdot \frac{4}{3} + 0 = \frac{40}{3}$

$\begin{cases} 2x - 3 \leq 6 \\ 3x - 2 \leq 4 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x - 3y \leq 6 \cdot 3 \\ 3x - 2y \leq 4 \cdot 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x - 9y \leq 18 \\ 6x - 8y \leq 8 \end{cases}$
 $-9y + 8y \leq 10$
 $-y \leq 10$
 $y \geq -10 \Rightarrow y \neq 10$
 $\begin{cases} 4x - 6y \leq 12 \\ 9x - 6y \leq 12 \\ 4x - 9x \leq 0 \\ -5x \leq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$
 $x = 0 \quad y = 0$