



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [3 балла] Четвёртый член арифметической прогрессии равен  $6 - 9x$ , шестой член равен  $(x^2 - 2x)^2$ , а десятый равен  $9x^2$ . Найдите  $x$ .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения  $3y + 6x$  при условии

$$\begin{cases} |x - 2y| \leq 2 \\ |2x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары  $(m, n)$  натуральных чисел, для которых одно из чисел  $A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n$  и  $B = m^2n + 2mn^2 + 9mn$  равно  $11p^2$ , а другое равно  $75q^2$ , где  $p$  и  $q$  — простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе  $AH$  треугольника  $ABC$ , проходящая через середину  $M$  его стороны  $BC$ , пересекает сторону  $AB$  и продолжение стороны  $AC$  в точках  $Z$  и  $Y$  соответственно. Найдите  $BC$ , если  $AC = 6$ ,  $AZ = 3$ ,  $YZ = 4$ .
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2}, \\ x^3 + 3x - \sqrt{2y} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат  $10 \times 10$  клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике  $ABC$  на медиане  $AM$  и биссектрисе  $CL$  как на диаметрах построены окружности  $\Omega$  и  $\omega$  соответственно, пересекающиеся в точках  $P$  и  $Q$ . Отрезок  $PQ$  параллелен высоте треугольника  $ABC$ , проведённой из вершины  $B$ . Окружность  $\Omega$  пересекает сторону  $AC$  повторно в точке  $N$ . Найдите длины сторон  $AC$  и  $BC$ , если  $AB = 4$ ,  $AN = 5$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Умнож } 9x^2 - (x^2 - 2x)^2 = 2((x^2 - 2x)^2 - (6 - 9x)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 0 = 2((x^2 - 2x)^2 - (6 - 9x)) - 9x^2 + (x^2 - 2x)^2 =$$
$$= 3x^4 - 12x^3 + 12x^2 - 9x^2 + 18x - 12 = 3x^4 - 12x^3 + 3x^2 +$$
$$+ 18x - 12, \text{ поделим на } 3 \quad x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 = 0$$

Спробуем заметить, что  $x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 =$

$$= (x-1)(x^3 - 3x^2 - 2x + 4) = (x-1)(x-1)(x^2 - 2x - 4) = 0$$

И.е. решения этого уравнения это 1 и корни

$x^2 - 2x - 4$ , которые мы найдем по формуле

корней квадратного уравнения:

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{4 + 16}}{2} = 1 + \sqrt{5}$$

$$x_2 = \frac{2 - \sqrt{4 + 16}}{2} = 1 - \sqrt{5}$$

Таким образом, мы получили три ответа, каждый из которых подходит по условию задачи.

Доказательство  $x=1, x=1+\sqrt{5}, x=1-\sqrt{5}$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Докажем, в каком случае числа  $6-9x$ ,  $(x^2-2x)^2$  и  $9x^2$  являются соответственно 4-ым, 6-ым и 10-ым членами арифметической прогрессии. Заметим, что тогда и только тогда, когда  $4 \cdot 9x^2 - (x^2-2x)^2 = 2 \cdot ((x^2-2x)^2 - (6-9x))$ . Действительно, пусть это так, тогда пусть  $a = \frac{((x^2-2x)^2 - (6-9x))}{2}$ , а  $b = 6-9x-4a$ . Тогда рассмотрим арифметическую прогрессию, где  $n$ -ый член равен  $a+b$ . Тогда легко заметить, что  $4a+b = 6-9x$ ,  $(x^2-2x)^2 = 2a + 6-9x = 6a+b$ ,  $9x^2 - (x^2-2x)^2 + 4a = 10a+b$ . Теперь докажем "в обратную сторону", т.е. пусть эти выражения являются членами прогрессии  $a+b$  (формула  $n$ -ого элемента прогрессии), тогда равенство  $\neq 1$  очевидно (левая часть = правая часть =  $4a$ ). Таким, т.е.  $x$  - это решение уравнения  $\neq 1$ , причем все меньшие решения подпадают.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4.4) \quad x - 2y < 0 \Rightarrow 2y - x < 2$$

$$2x - y > 0 \Rightarrow 2x - y \leq 1$$

Сложим и получим, что  $x + y \leq 3$ . Кроме,

если  $x > \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{8}{3} < y < 4$

$$\frac{8}{3} - y < 2x - y \leq 1 \Rightarrow \frac{8}{3} - y < 1 \Rightarrow y > \frac{5}{3}, \text{ но тогда}$$

$$x + y > \frac{4}{3} + \frac{5}{3} = 3 - \text{противоречие. Берем } y > \frac{5}{3}, \text{ тогда}$$

$$\text{то } \frac{10}{3} - x < 2y - x \leq 2 \Rightarrow \frac{10}{3} - x < 2 \Rightarrow \frac{4}{3} < x,$$

но тогда  $x + y > 3$  - противоречие с #4.

$$\text{И.е. } x \leq \frac{4}{3} \text{ и } y \leq \frac{5}{3} \Rightarrow 6x + 3y \leq 13.$$

Итак, во всех случаях  $6x + 3y \leq 13$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4) \quad x \geq 0; \quad y \geq 0$$

Реш. Рассмотрим 4 неравенства

$$4.1) \quad \cancel{x - 2y \leq 2} \quad \#2: \quad x - 2y \geq 0 \Rightarrow x - 2y \leq 2$$

$$\cancel{2x - y \geq 0} \quad \#2: \quad 2x - y \geq 0 \Rightarrow 2x - y \leq 1$$

Получаем, что  $x \geq 2y \Rightarrow 2x - y \leq 2x - \frac{x}{2} =$

$$= \frac{3}{2}x \leq 1 \Rightarrow x \leq \frac{2}{3}, \quad y \leq \frac{1}{3} \Rightarrow 6x + 3y \leq 5, a$$

$y$  как есть пример на 13.

$$4.2) \quad x - 2y < 0 \Rightarrow 2y - x \leq 2$$

$$\#3: \quad 2x - y < 0 \Rightarrow y - 2x \leq 1$$

Получаем из  $\#3$ , что  $y > 2x \Rightarrow 2y - x \leq$

$$\leq 2y - \frac{y}{2} = \frac{3}{2}y \leq 2 \Rightarrow y \leq \frac{4}{3}; \quad x \leq \frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$6x + 3y \leq 4 + 4 = 8, a \quad y \text{ как есть пример на 13.}$$

$$4.3) \quad \left. \begin{array}{l} x - 2y \geq 0 \Rightarrow x \geq 2y \\ 2x - y < 0 \Rightarrow y > 2x \end{array} \right\} \Rightarrow x + y > 2(x + y),$$

т.к.  $(x + y) > 0$ , то  $(x + y) > 2(x + y) \Rightarrow 1 > 2$ , что неверно.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Ответ: 13  $x = \frac{4}{3}; y = \frac{5}{3}$  ~~не подходит~~  
~~не подходит~~

$$|x - 2y| = \left| \frac{4}{3} - \frac{10}{3} \right| = |-2| \leq 2$$

$$|2x - y| = \left| \frac{8}{3} - \frac{5}{3} \right| = |1| \leq 1$$

$$6x + y = 8 + 5 = 13.$$

Решение: рассмотрим 4 случая:

1)  $x < 0; y < 0$ .

Равно, что  $6x + 3y < 0$ , а  $y$  как есть пример на 13

2)  $x < 0; y \geq 0$ .

Доб., что  $x - 2y < 0 \Rightarrow 2y - x \leq 2$ , т.к.  $x < 0$ ,  
то  $2y < 2 \Rightarrow y < 1 \Rightarrow 6x + 3y < 3y < 3$ ,  
а  $y$  как есть пример на 13.

3)  $x \geq 0; y < 0$

Доб., что  $2x - y > 0 \Rightarrow 2x - y \leq 1$ , т.к.  $y < 0$ ,  
то  $2x < 1 \Rightarrow x < \frac{1}{2} \Rightarrow 6x + 3y < 6x < 3$ , а  $y$  как  
есть пример на 13.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  
  2  
  3  
  4  
  5  
  6  
  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$0 < x - 2y < 2$$

$$\frac{5}{3}$$

$$\frac{4}{3}$$

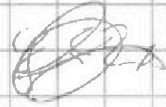
$$5 \cdot 8$$

$$0 < 2x - y < 1$$

$$13$$

~~$x > 2y$~~

$x > 2y$



$x \leq 1$



$y \leq 1$

$$\frac{x+2}{2} + \frac{y+1}{2}$$

$$0 < 2y - x < 2$$

$$2 - 8z$$

$$0 < y - 2x < 1$$

$$2 = x - 8z$$

~~$x - 8z = 2$~~

~~$x > 2y$~~

$$1 = 8 - 2z$$

~~$3y - 2z = 1$~~

$$y \leq 2$$

$$x + y \leq 3$$

~~$x > 2y$~~

$$y \leq \frac{4}{3}$$

$$0 < 2y - x < 2$$

~~$x > 2y$~~

$$x > \frac{5}{3}$$

$$0 < y - 2x < 1$$

~~$y - 2x < 1$~~

~~$x > 2y$~~

$$2x > 8$$

$$y > \frac{5}{3}$$

~~$x > 2y$~~

$$y < 2$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что  $A = (m+2n)(m+2n-7)$ , а  $B = mn(m+2n+9)$ . Заметим, что  $4 \mid A$  и  $4 \mid B$ .  $A$  и  $B$  делятся на 2, т.к.  $m+2n$  и  $m+2n-7$  разны по четности  $\Rightarrow$  одно из этих чисел четное  $\Rightarrow$  произведение четное.  $B$  делится на 2, т.к. если  $m$  или  $n$  четное, то очевидно, что  $B = mn(m+2n+9) \equiv 2$ , т.е.  $m \times 2$  и  $n \times 2 \Rightarrow m \equiv 1, n \equiv 1 \pmod{2} \Rightarrow m+2n+9 \equiv 1+0+1 \pmod{2} \equiv 0$ , т.е.  $B \equiv 2$ , т.к.  $B \equiv m+2n+9 \pmod{2}$ , а  $m+2n+9 \equiv 2$ . Также образом  $5 \mid 9^2$  и  $11 \mid p^2$  тогда оба делятся на 2  $\Rightarrow p=q=2$ , т.к.  $p$  и  $q$  простые и  $2 \mid (m, n)$  ( $(11, 2) = 1$  и  $(5, 2) = 1$ )  
 Тогда  $mn(m+2n+9) = 11 \cdot 2^2 = 44$ . Заметим, что т.к.  $m, n \in \mathbb{N} \Rightarrow m, n \geq 1 \Rightarrow m+2n+9 \geq 12$ , и т.к. это делитель 44, то это либо 22, либо 44, если это 44, то  $mn=1 \Rightarrow m=n=1$ , но  $1+1 \cdot 2+9 \neq 44$ , если это 22, то  $mn=2 \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 & n=2 \\ m=2 & n=1 \end{cases}$   
 но в обоих случаях  $m+2n+9 \leq 14 < 22$ . Т.е.  
 $(m+2n)(m+2n-7) = 44$ , а  $mn(m+2n+9) = 300$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Если обозначить  $m+2n=a$ , то  $a(a-7)=44$ , т.е.

$a-7a-44=0$  - решим квадратное уравнение,

то получим, что  $a=m+2n \geq 3$ . Подумав

2 корня  $x_1 = \frac{7 + \sqrt{49 + 4 \cdot 44}}{2} = 11$  и  $x_2 = \frac{7 - \sqrt{49 + 4 \cdot 44}}{2} =$

$= -4$ , но т.к.  $x_2 < 0$ , то  $a = x_1$ , т.е.

$m+2n=11 \Rightarrow mn(m+2n+9) = mn \cdot 20 = 300 \Rightarrow$

$mn \leq 15$ . Переберем:

$$m=1 \quad n=15 \Rightarrow m+2n=31 \neq 11$$

$$m=3 \quad n=5 \Rightarrow m+2n=13 \neq 11$$

$$m=5 \quad n=3 \Rightarrow m+2n=11$$

$$m=15 \quad n=1 \Rightarrow m+2n=17 \neq 11$$

Итак, заметим, что при  $m=5$ ,

$n=3$  условие выполняется, а при остальных значениях нет.

Ответ:  $m=5, n=3$ .





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$h \neq 0$ , т.к.  $h$  — это высота  $\triangle ABC \Rightarrow$   
 $\Rightarrow h \perp Z \Rightarrow \angle AZZ = 90^\circ$ . Теперь, применим  
т. Косинусов для  $\triangle AZZ$ :

$$ZZ^2 = AZ^2 + AZ^2 - 2AZ \cdot AZ \cos \angle AZZ$$

$$16 = 9 + 9 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cos(180 - 2\alpha) = 18 + 18 \cos(2\alpha)$$

$$\text{(т.к. } \cos(180 - \beta) = -\cos \beta)$$

$$-2 = 18 \cos(2\alpha)$$

$$-\frac{1}{9} = \cos(2\alpha)$$

Теперь применим т. Косинусов для  $\triangle ABC$   
и  $BC$ :

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AB \cdot AC \cos \angle CAB$$

~~$$BC^2 = 36 + 144 - 2 \cdot 6 \cdot 12 \cos(2\alpha) = 180 + 16 = 196$$~~

$$BC^2 = 129$$

$$BC = \sqrt{129}$$

$$BC^2 = 36 + 144 - 2 \cdot 6 \cdot 12 \cos(2\alpha) = 180 + 16 = 196$$

$$BC^2 = 196$$

$$BC = 14$$

Ответ:  $BC = 14$ .



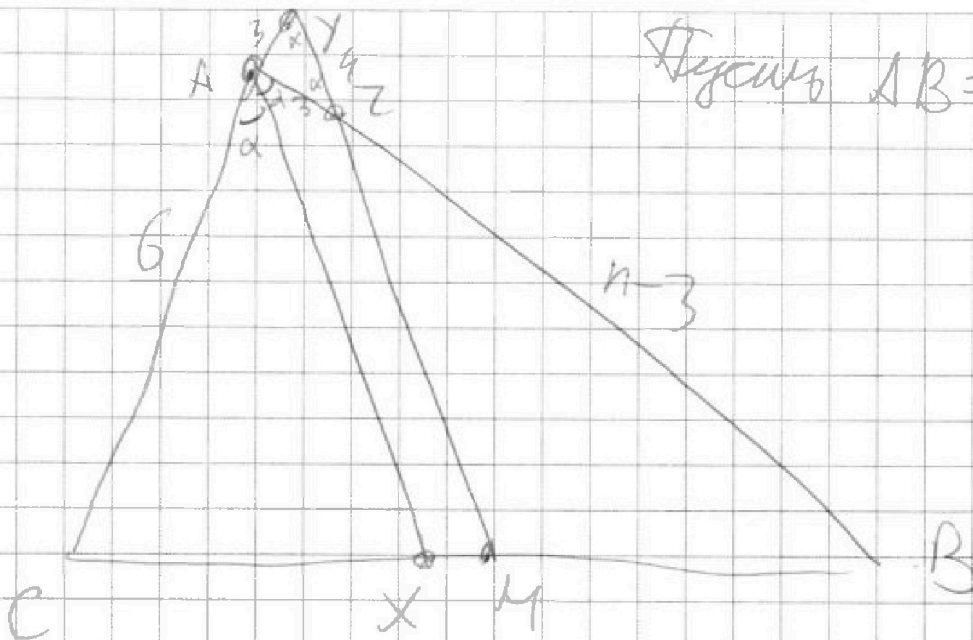
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что угол  $\angle XAZ = \angle AZY$  и  $\angle AXZ = \angle ZY$  или

секущая AZ.  $\angle YAZ = 180 - 2\alpha \Rightarrow$  и  $\triangle AYZ$

$\angle AYZ = 180 - \angle YAZ - \angle AZY = 180 - 180 + 2\alpha - \alpha = \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle AZY$  - равнобедренный и  $AZ = AY = 3$ .

Теперь по золотому сечению в-вед. рассмотрим AX

~~$\frac{BX}{AC} = \frac{AC}{AB} = \frac{6}{n} \Rightarrow n \cdot BX = 6 \cdot AC = 36$~~   
 $\frac{CX}{BX} = \frac{AC}{AB} = \frac{6}{n} \Rightarrow n \cdot CX = 6 \cdot BX \Rightarrow$

$\Rightarrow CX = \frac{6}{n} BX \Rightarrow CX + BX = \frac{6}{n} BX + BX = \frac{6+n}{n} BX \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{BC}{2} = \frac{6+n}{2n} \cdot BX$

$\Rightarrow \frac{MB}{BX} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{6+n}{2n} = \frac{n-3}{n} \Rightarrow$

$\Rightarrow 6n + n^2 = 2n^2 - 6n \Rightarrow n^2 - 12n = 0 \Rightarrow n(n-12) = 0$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

2.1) Два узла лежат в <sup>одной</sup> зоне.  
 Каких соседей  $4 \cdot C_{30}^2$  (в каждой зоне 30 узлов), но заметим, что при 4-х поворотах ( $0^\circ, 90^\circ, 270^\circ, 180^\circ$ ) мы получаем 4 различных способа (т.к. всегда узлы лежат в одной зоне), которые на самом деле являются  $1$  и  $3$  и  $2$  и  $4$  узлами, т.е. разделим  $\frac{4 \cdot C_{30}^2}{4} = C_{30}^2$

2.2) Узлы лежат в соседних зонах, тогда при поворотах также всегда разные способы (в одной зоне лежат в 1 и 2-ой, в другой в 2 и 3-ей, в 3-ей 4-ой и 1 и 4-ой зонах) т.е. общее кол-во способов  $4 \cdot C_{30}^2$  (выбираем пару сосед. зон и выбираем 1-ый узел в одной, потом 2-ой узел в другой) в итоге на 4 и остается  $30 \cdot 30 = 900$  способов.

2.3) Узлы лежат в противоположных зонах.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Венера, ~~может~~ имеет 2 поделку:

2.3.1) Если при повороте получаем только 2 разл. раскраски. Это значит, что при повороте на  $180^\circ$  получаем то же самое, что и при пов. на  $0^\circ$  и повороты на  $90^\circ$  и  $270^\circ$  совпадают между собой. Также способов  $2 \cdot 30$  (выбираем первую противоположную зону, выбираем одну из зон угол, второй определяем ориентацию (нам надо, чтобы при повороте на  $180^\circ$  они поменялись местами) поворотом на  $180^\circ$ , симм. центра квадрата) и делим на 2, ~~чтобы~~ ~~считать~~ ~~имею~~ 30 вариантов.

2.3.2) Если при повороте 4 раскраски получаем. Также способов  $2 \cdot 30 = 29$  (2-мя способами выбираем первую противоположную зону, 30-ю выбираем





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

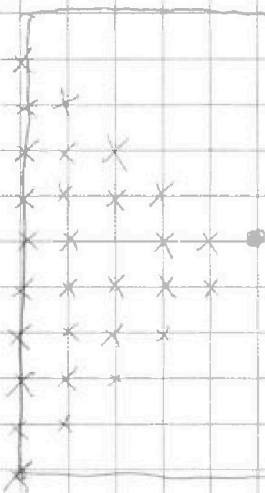
СТРАНИЦА  
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим 2 случая:

1) Один из <sup>двух</sup> узлов в центре. Тогда для 2-го <sup>двух</sup> узлов 120 вариантов, но заметим, что каждой вершиной, мы можем повернуть на  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  и  $270^\circ$ , таким образом ~~все время~~ ~~каждый~~ ~~раз~~ 120 вариантов делится на 4-ки одинаковых итого получается  $\odot$  30 различных вариантов.

2) Ни один из 5-узлов не в центре. Разобьем квадрат на 4 зоны:



x - узлы 1-ой зоны

2-ая, 3-ая, 4-ая зоны

концентрация поворотов 1-ой зоны  $\odot$   $90^\circ$ ,  $180^\circ$  и  $270^\circ$ . Тогда

заметим, что при повороте на  $90^\circ$  1-ая  $\rightarrow$  2-ая, 2-ая  $\rightarrow$  3-ая,

3-ая  $\rightarrow$  4-ая, 4-ая  $\rightarrow$  1-ая.

Теперь рассмотрим ещё  $\odot$  подслучай:



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1-ый угол, а ~~2-ой~~ 2-ой по мерк, что ~~был~~  
 от не совм. с повернутом на  $180^\circ$  1-ым  
 углом) и др. м.к. ~~В итоге~~  
 каждой способ ~~повышает~~ ч. раба  
 итого  $15 \cdot 29 = 435$

$$\text{Итого } 30 + 30 + 900 + 30 + 435 =$$

$$= 30 + 435 + 900 + 30 + 435 = 1800 + 30 = 1830$$

Ответ: 1830

Комментарий: при ч-х поворотах  
 в подм. з.1 и з.2<sup>2.4</sup>, а также  
 при повороте на  $90^\circ$  в см. з.3.1 и з.3.2  
 получаются разные раскладки, м.к.  
 набор з.т, ~~которые~~ в которых несут  
 5 углов различаются и м.к. ~~состав~~ состав-  
 ительно различаются. ~~на сколько, сколько раз~~  
~~на сколько раз~~ ~~различаются~~ ~~различаются~~ ~~различаются~~  
 различаются ~~различаются~~ ~~различаются~~ ~~различаются~~

$$\text{Итого } 30 + 30 + 900 + 30 + 435 = 1830$$

Ответ: 1830.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(m+2n)(m+2n-1) = 75p^2 \quad p=7$$

$$mn(m+2n+1) = 11p^2$$

$$11 \cdot 4 = 44^2 \rightarrow 11p$$

$10 \sqrt{3}$   
 $\sqrt{3} < 2$

$$(m+2n)(m+2n-1) = 300$$

~~3 4 5 6 10 15 20 25 30 60~~

$$3 \cdot 7 \cdot 5^2 \quad 15 \cdot 20$$

$11 \cdot 4$       20  
15  
12

$$x(x-1) = 300$$

$$x^2 - x - 300 = 0$$

$$49 + 49 = 300 = 9$$

$$x(x-1) = 44$$

$$x^2 - x - 44 = 0$$

1249

$m=3$       11      225

$n=5$

$m=5$        $7+15$

$n=3$        $x=11$        $mn(m+2n+1) = 75p^2$

$m+2n=11$        $mn=15$       300





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 74n$$

~~$$(m+2n)^2 - 7(m+2n)$$~~

$$(m+2n)(m+2n-7)$$

$$a \quad a-7 \quad a+9$$

$$7 \cdot 25 = 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 9^2$$

$$m \cdot n = 19 \cdot 75$$

$$11p^2 = 11 \cdot p \cdot p$$

$$m \cdot n \cdot (m+2n+9) = 45$$

$$2n+19=22 \quad n=6$$

$$m(n+11)$$

$$m=1$$

$$\begin{cases} m+1 & n+1 \\ m+1 & n+1 \\ n+1 & n+1 \end{cases}$$

$$p=2$$

$$h=6 \quad m=1$$

~~$$(m+2n)(m+2n-7) = 75 \cdot 9^2$$~~

$$m+2n-7=2$$

~~$$11p^2$$~~

$$m+2n=11$$

$$11p^2 \quad 1 \quad -$$

$$p^2 \quad 11$$

$$11 \quad p^2 \quad -$$

$$2 \cdot 3 \cdot 9^2$$

$$p^2 \quad 11 \quad -$$

$$7 \cdot 9$$

$$7$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4 - 9 = 3(2-3x) \cdot 2$$

$$x^2(x-2)$$

$$x=1 \quad (x-2)^2 = 8$$

$$10 \quad 9x^2$$

$$2x^4 - 9x^3 + 3x^2 + 18x - 12 = 5x^4 - x^4 + 4x^3 - 14x^3$$

$$4 + 4 \cdot 4 = 20$$

$$z \pm \sqrt{20}$$

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 3x^2 - 2x + 4 & x-1 \\ \hline x^3 - x^2 & x^2 - 2x - 4 \\ \hline -2x^2 - 2x + 4 & \\ -2x^2 + 2x + 4 & \\ \hline -4x + 4 & \\ -4x + 4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$4 + 4 \cdot 4 = 20$$

$$z \pm \sqrt{20}$$

$$2 \pm 2\sqrt{5}$$

$$(x-2)^2 - 8 = 0$$

$$(x-2)^2 = 8$$

$$x-2 = \pm 2\sqrt{2}$$

$$1 \pm \sqrt{5}$$

$$1 - 4 + 1 + 6 - 4 = 4x + 4$$

$$x = 2 \pm 2\sqrt{2}$$

$$\begin{array}{r|l} x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 & x-1 \\ \hline x^4 - x^3 & x^3 - 3x^2 - 2x + 4 \\ \hline -3x^3 + x^2 + 6x - 4 & \\ -3x^3 + 3x^2 & \\ \hline -2x^2 + 6x - 4 & \\ -2x^2 + 2x & \\ \hline 4x - 4 & \\ 4x - 4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$3x^4 - 12x^3 + 3x^2 + 18x - 12 = 0$$

$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 = 0$$

$$(x^3 - 3x^2 - 2x + 4)(x-1)$$

$$(x^2 - 2x - 4)(x-1)^2$$

3





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4-y \quad 5-9x$$

$$5-y(x^2-2x)^2$$

$$9x^2$$

$$x^2(x-2)^2$$

$$9x^2$$

$$8 \quad a+b \quad 2a+b \quad 3a+b$$

$$3+2-1$$

$$3a+b=6-9x$$

$$5a+b=(x^2-2x)^2=x^4-4x^3+4x^2=x^2(x-2)^2$$

$$9a+b=9x^2$$

$$x^2(x^2-4x+4)$$

$$x^2(x-2)^2$$

$$6a=9x^2+9x-6$$

$$2a=3x^2+3x-2$$

$$5x^2+5x-4$$

$$9x^2-9x+6$$

$$4a=x^2(9-(x-2)^2)$$

$$x^2(x+1)(5-x)$$

$$-x^2+4x+5$$

$$\rightarrow 9(x^2-x+\frac{2}{3})$$

$$5x-x^2+5-x$$

$$5x^2+5x-4=x^2(x+1)(5-x)$$

$$5x^2+5x-4=-x^4+4x^3+5x^2$$

$$x^4-4x^3+x^2+5x-4=0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} |x-2y| \leq 2 \\ |2x-y| \leq 1 \end{cases}$$

$$\max(3y+6x)$$

13

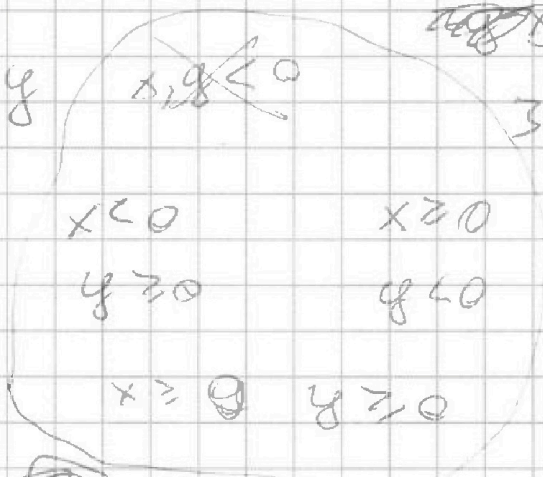
$$\begin{cases} y \leq 1 \\ 2y \leq 2 \\ 2y-x \leq 2 \end{cases}$$

$$x-2y \geq 0$$

$$x \geq 2y \quad 2x \geq y$$

$$2x-y \geq 0$$

$$-3 \geq -2 \cdot 2$$



4

$$\textcircled{1} \begin{cases} x-2y \leq 2 \\ 2x-y \leq 1 \end{cases}$$

$$3(x-y) \leq 3$$

$$(x-y) \leq 1$$

$$x = -1$$

$$y = -y$$

$$3y + 6x \leq -3y - 6x$$

$$6(y+2x) \leq 0$$

$$\begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = \frac{5}{3} \end{cases}$$

13

4

$$x < 1 \quad y = \frac{8}{3} - 1$$

$$y = 0$$

$$2x - y = 1 \quad y = 2x - 1$$

$$x - 2y = -2$$

$$x - 2(2x - 1) = -2$$

$$x - 4x + 2 = -2$$

$$-3x = -4$$

12

$$x - 2y \leq 2$$

$$x \leq 2$$





На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1 + \sqrt{5}$$

$$a \quad b \quad c$$

$$1 + 2\sqrt{5} + 5$$

$$a - b = 2(b - c)$$

$$6 + 2\sqrt{5} - 2 - 2\sqrt{5} - 4$$

$$54 + 18\sqrt{5}$$

~~200~~

~~200~~

$$(x - 1)^2 = 5$$

$$6 + 2\sqrt{5}$$

$$1 + \sqrt{5}$$

$$1 + \sqrt{5}$$

$$6 - 9 - 9\sqrt{5}$$

$$4^2 \quad 16$$

$$-3 - 9\sqrt{5}$$

$$6 + 2\sqrt{5} - 2 - 2\sqrt{5}$$

$$16$$

$$\frac{19 + 9\sqrt{5}}{2}$$

$$54 + 18\sqrt{5}$$

$$\frac{38 + 18\sqrt{5}}{4}$$

$$24 + 12\sqrt{5}$$

$$12 + 6\sqrt{5}$$

~~200~~

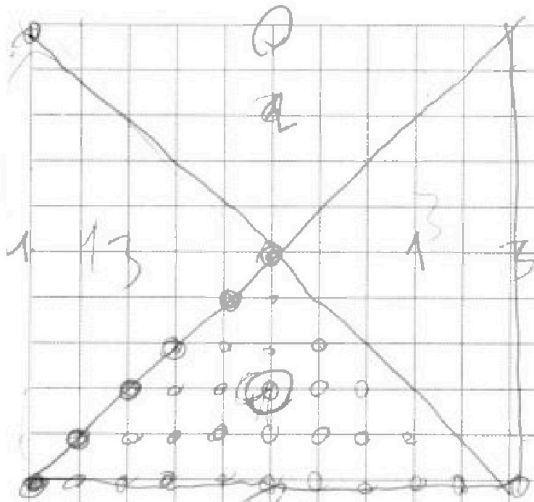


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$2(1 + \dots + 5)$$

$$\frac{5 \cdot 6}{2} = 30$$

$$\frac{4 \cdot C_{30}^2}{4}$$

$$\frac{4 \cdot C_{30}^2 \cdot C_{30}^2}{4}$$

$$\frac{2 \cdot C_{30}^2}{2}$$

$$\frac{2 \cdot C_{30}^2 \cdot C_{30}^2}{4}$$



$$\begin{array}{r} 40 \\ \times 15 \\ \hline 145 \\ 29 \\ \hline 435 \end{array}$$

$$C_{30}^2 + C_{30}^2 \cdot C_{30}^2 + C_{30}^2$$

$$+ \frac{\quad}{4}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$t^6 + 3t^2 + 2t =$$

~~14~~  $t(t^5 + 3t + 2)$

$2$

$t(t^5 + 3t + 2)$

$x^2 - 2$

$y^2 - 4 \geq 0$   $x \geq 0$   $x \geq 0$

$14 + 5x - 4y^2 \geq 0$

~~14~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

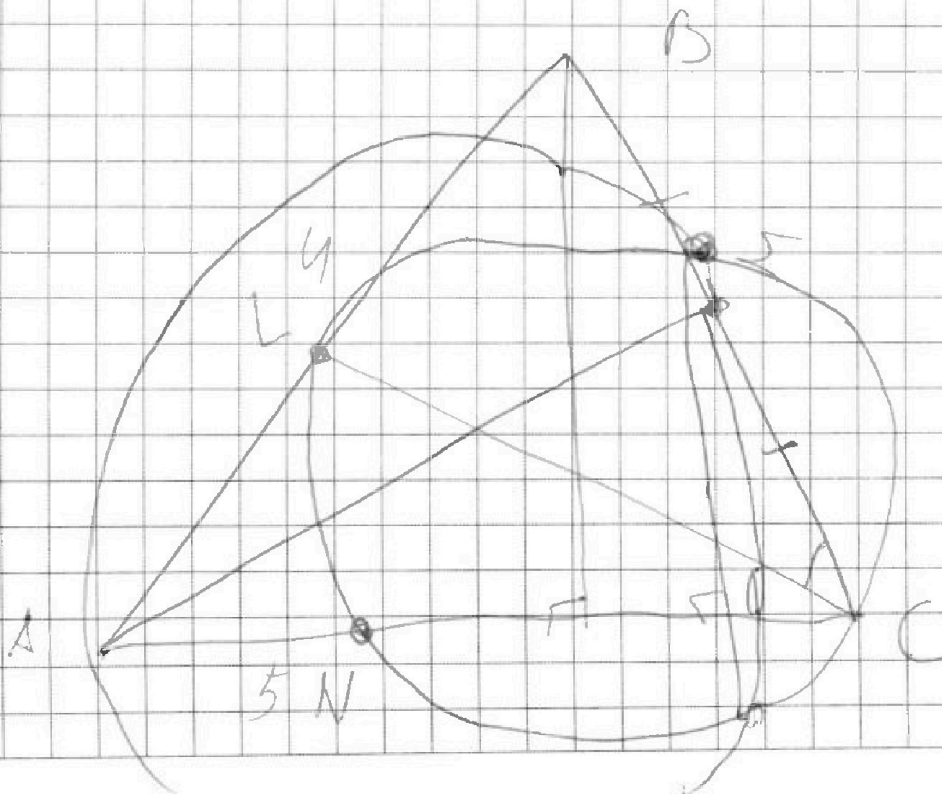
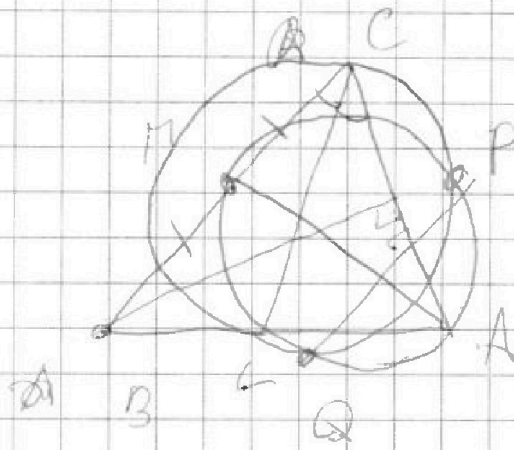
1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{4-y} + 7 = 2\sqrt{4+5x-y^2}$$

$$x^3 + 3x + \sqrt{2x} = 3y + \sqrt{4-y}$$







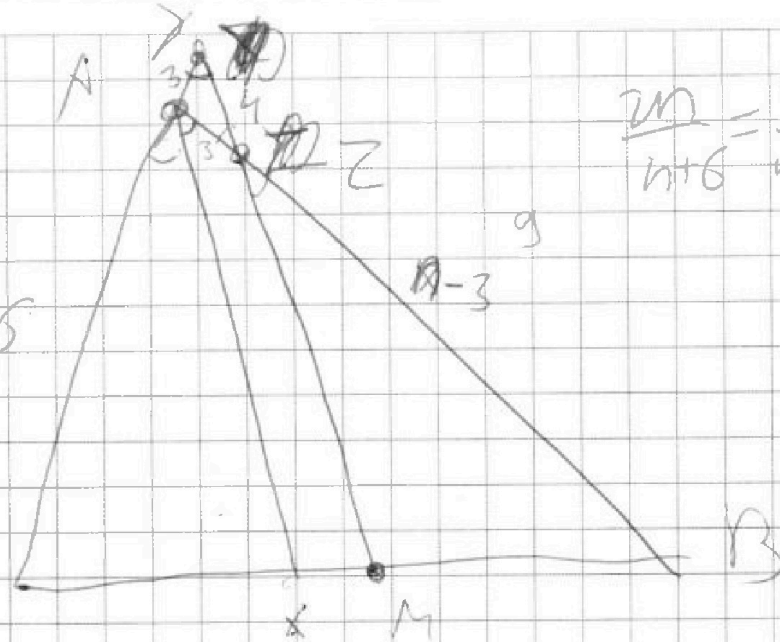
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} 129 \overline{) 143} \\ \underline{12} \phantom{0} \\ 9 \phantom{0} \\ \underline{43} \phantom{0} \\ 1 \phantom{0} \\ \underline{14} \\ \times 14 \\ \underline{56} \\ 14 \phantom{0} \\ \underline{14} \\ 0 \end{array}$$



$$\frac{2n}{n+6} = \frac{n}{n-3}$$

$$x > 6$$

$$\frac{CX}{BX} = \frac{6}{n}$$

$$\frac{6BX}{n} = \frac{n \cdot CX}{\cancel{6(CX+BX)}} \quad \cancel{6(CX+BX)}$$

$$\frac{BX}{BC} = \frac{6}{n}$$

$$2n^2 - 6n = n^2 + 6n \quad n^2 - 12n = 0$$

$$\frac{2BX}{BC} = \frac{2n}{n+6}$$

$$\frac{6+n}{n} BX = BC \quad n(n-12) = 0$$

$$\frac{BX}{BC} = \frac{n}{n+6}$$

$$\frac{n-3}{3} = \frac{2n}{n+6}$$

$$9 + 4 \cdot 18 = 2n + 9 = 81$$

$$n^2 + 6n - 3n - 18 = 0$$

$$\frac{3+9}{2}$$

$$n^2 - 3n - 18 = 0$$

$$\cancel{2n+9=81}$$