



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен

$$\sqrt{\frac{13x - 35}{(x + 1)^3}}, \text{ тринадцатый член равен } 5 - x, \text{ а пятнадцатый член равен } \sqrt{(13x - 35)(x + 1)}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $3 : 10$ , считая от вершины  $C$ .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $200 \times 250$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:

- $a > b$ ,
- число  $a - b$  не кратно 3,
- число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство  $a + b^2 = 560$ .

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$a_1, a_2, a_3, \dots$   
 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  - члены геом прогрессии

тогда  $a_i = a \cdot b^{(i-1)}$  где  $b$  - шаг прогрессии

$$\text{тогда } \frac{a_{15}}{a_7} = \frac{a \cdot b^{14}}{a \cdot b^6} = b^8 = \frac{\sqrt{(13x-35)} \sqrt{x+1}}{\sqrt{13x-15} \sqrt{x+1^3}}$$

или  $13x-35 \neq 0$  5

$$\text{то } (x+1)^2 = b^8$$

$$\text{и } b^2 = \sqrt{x+1}$$

$$a_{13} = \frac{a_{15}}{b^2} = \frac{\sqrt{(13x-35)} \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{13-35x} = 5-x$$

$$x > 5 \quad x < 5$$

$$13-35x = 25+x^2-10x$$

$$x^2 + 25x + 12 = 0$$

$$D = 625 - 12 \cdot 4 = 577$$

$$x = \frac{\pm \sqrt{577} - 25}{2} \quad \text{или}$$

$$\text{тогда } b = \sqrt{\frac{25 \pm \sqrt{577}}{2}}$$

$$\text{или } x = \frac{25 - \sqrt{577}}{2} \quad \text{и } x = -12 - \frac{1 - \sqrt{577}}{2} < -1$$

$$\text{или } x = \frac{\sqrt{577} - 25}{2} > -1 \quad \text{т.к. } 577 > 23^2 = 529$$

$$\sqrt{577} - 25 > -2$$

$$\sqrt{577} > 23$$

$$\text{или } 13x-35=0 \quad \text{то } x = \frac{35}{13}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\sqrt{577} - 25}{2}$$

$$\text{тогда } a_7 = a_{15} = 0 = a_i$$

$$5-x = a_7 = 0$$

$$x = 5$$

противоречие

$$13x-35 \neq 0 \quad \text{т.к. } \frac{13x-35}{x+1}$$

$$x \neq -1$$

$$x+1 > 0$$

$$25^2 = 625$$

$$\begin{array}{r} \times 25 \\ 125 \\ 625 \\ \hline 625 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 25 \\ 125 \\ 625 \\ \hline 625 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 25 \\ 125 \\ 625 \\ \hline 625 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 25 \\ 125 \\ 625 \\ \hline 625 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 25 \\ 125 \\ 625 \\ \hline 625 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 25 \\ 125 \\ 625 \\ \hline 625 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 25 \\ 125 \\ 625 \\ \hline 625 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 25 \\ 125 \\ 625 \\ \hline 625 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 25 \\ 125 \\ 625 \\ \hline 625 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 25 \\ 125 \\ 625 \\ \hline 625 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 25 \\ 125 \\ 625 \\ \hline 625 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 25 \\ 125 \\ 625 \\ \hline 625 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 25 \\ 125 \\ 625 \\ \hline 625 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 25 \\ 125 \\ 625 \\ \hline 625 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 25 \\ 125 \\ 625 \\ \hline 625 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 25 \\ 125 \\ 625 \\ \hline 625 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 25 \\ 125 \\ 625 \\ \hline 625 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 25 \\ 125 \\ 625 \\ \hline 625 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 25 \\ 125 \\ 625 \\ \hline 625 \end{array}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

возьмем  $z$  как параметр

$$x + 3 > 0$$

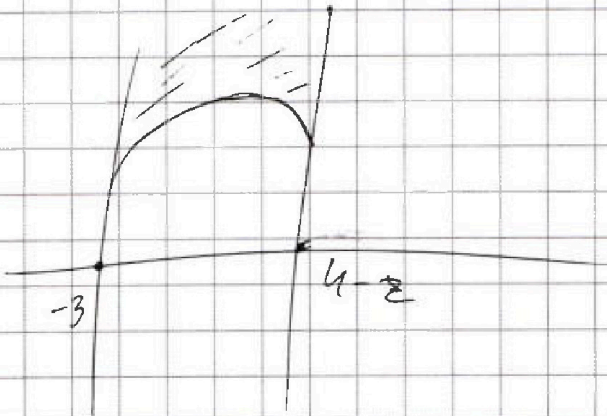
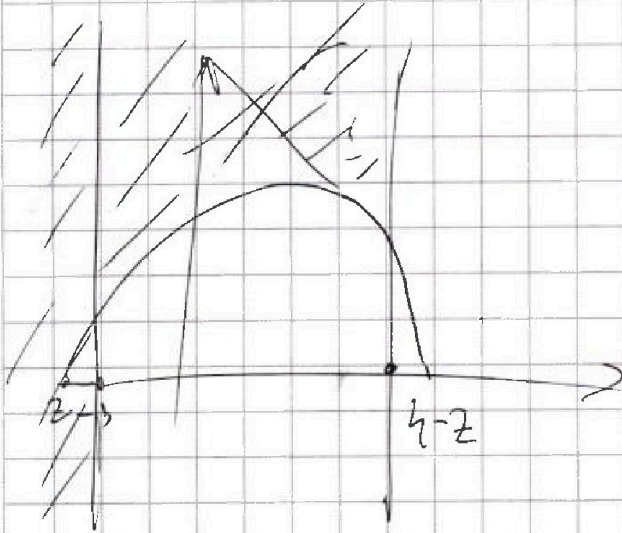
$$x > -3$$

$$4 - x - z > 0$$

$$x < 4 - z$$

$$y + x - x^2 + z > 0$$

$$y > x^2 - x - z$$



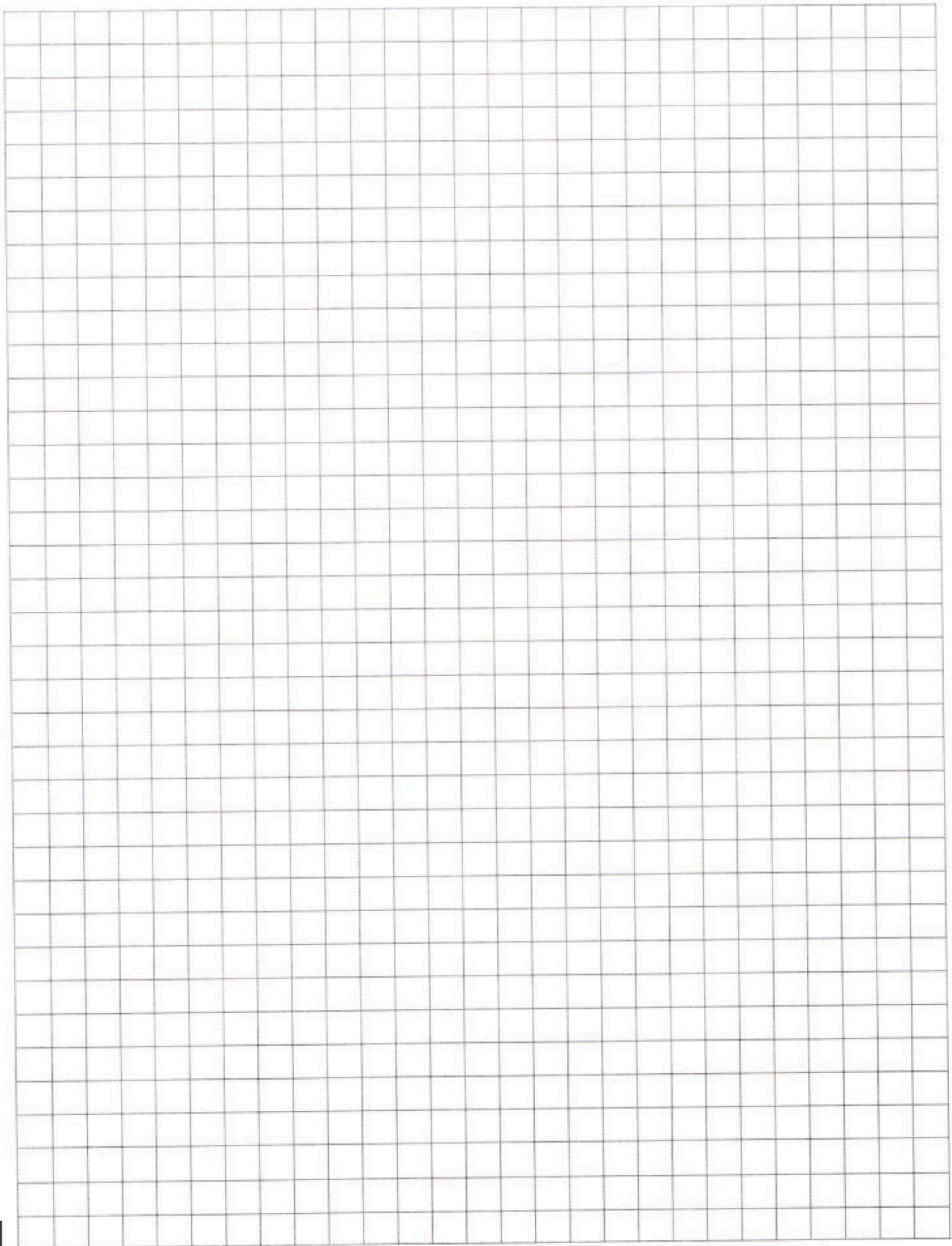


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!







1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №3

$$\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p$$

$$4\cos^3 x - 3\cos x + 3\cos^2 x - 3\sin^2 x + 6\cos x = p \quad \text{т.к. } \sin \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$$4\cos^3 x + 3\cos x + 6\cos^2 x = p + 3 \quad \text{т.к. } \eta = \sin^2 x + \alpha \cos^2 x$$

пусть  $k = \cos x \quad k \in [-1; 1]$

и пусть  $f(k) = 4k^3 + 3k + 6k^2 = 4\cos^3 x + 3\cos x + 6\cos^2 x = p + 3$

посмотрим на  $f'(k) = 12k^2 + 12k + 3 = 12\left(k + \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$

т.к.  $D_f = 36 - 3 \cdot 12 = 0 \quad D = 0 \quad x = k = \frac{-12}{12 \cdot 2} = -\frac{1}{2}$   
корень

Заметим что т.к.  $f'(k) \geq 0$  наша функция  $f(k)$  на любом

промежутке не убывает. Значит максимум и минимум функции достигается по крайней мере в тех отрезке по краям, а т.к. функция непрерывна то, все они проходят все значения между минимумом и максимумом  $\Rightarrow$  при  $k \in [-1; 1], f(k) \in [f(-1); f(1)]$

Значит  $f(-1) = -1 \cdot 4 + 6 \cdot 1 - 3 = -1; f(1) = 4 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 3 = 13$

$p + 3 = f(k) \in [-1; 13], p \in [-4; 10]$  - есть решение

Заметим что т.к.  $12\left(k + \frac{1}{2}\right)^2$  - обнуляется только в 1 точке

то  $f(k)$  - строго во строго возрастает и принимает любое значение  
т.е. Значит у уравнения  $f(k) = p$ , где  $p \in [-4; 10]$  ровно одно решение

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим что  $f(k) = 4k^3 + 6k^2 + 3k$

тогда  $f(k) = (k + \frac{1}{2})^3 \cdot 4 - \frac{1}{2}$

пусть  $f(k) = p+3 \Rightarrow (k + \frac{1}{2})^3 \cdot 4 - \frac{1}{2} = p+3$

$k + \frac{1}{2} = \sqrt[3]{\frac{p+3+\frac{1}{2}}{4}}$

$k \pm \frac{1}{2} = \sqrt[3]{\frac{p+\frac{7}{2}}{4}}$

$k = \sqrt[3]{\frac{p+7}{8}} - \frac{1}{2}$

$\cos x = \sqrt[3]{\frac{2p+7}{8}} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt[3]{2p+7}-1}{2}$

$\sqrt[3]{\frac{2p+7}{8}} - \frac{1}{2} \in [-1; 1]$

$x = \pm \arccos\left(\frac{\sqrt[3]{2p+7}-1}{2}\right) + 2\pi k \in \mathbb{Z}$

при  $p \in [-4; 10]$

290 z - yovce

X =

Ответ:  $x = 2\pi k$  при  $p \in [-4; 10]$  есть решения

$x = 2\pi k \pm \arccos\left(\frac{\sqrt[3]{2p+7}-1}{2}\right)$

$x = \pm \arccos\left(\frac{\sqrt[3]{2p+7}-1}{2}\right) + 2\pi k$

знаки

$x = \arccos\left(\frac{\sqrt[3]{2p+7}-1}{2}\right) + 2\pi k$

$x = -\arccos\left(\frac{\sqrt[3]{2p+7}-1}{2}\right) + 2\pi k$

$x = 2\pi k - \arccos\left(\frac{\sqrt[3]{2p+7}-1}{2}\right)$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$AD \cap CE = K$$

✓

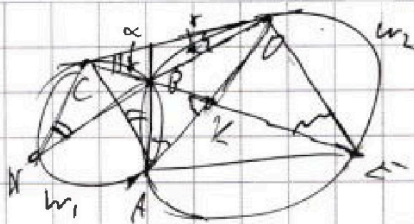


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AD \cap CE = K \quad \angle C B = \alpha$$

$$\angle C B D C = \gamma$$

$$\frac{EK}{CK} = \frac{2 \cdot 10}{3}$$

$$AB \cap CD = M$$

$$CM = MD \text{ т.к. } CM^2 = MD^2 \text{ как стороны}$$

точки уга w, w2

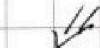
ми крест. осн. Г.К.

MEAB - равнобедренный  
осн уга  
w, w2

2π

$$CB \cdot CE = CD^2 \text{ ст.1}$$

степень точки C отн w2



$$\frac{CB}{CD} = \frac{CD}{CE} \quad \text{значит } \triangle C B D \sim \triangle C D E$$

с коэффициентом  $\frac{CE}{CB}$

тогда  $\frac{BD}{DE} = \sqrt{\frac{CE}{CB}} = \sqrt{\frac{CE}{CE - BE}} = \sqrt{1 - \frac{BE}{CE}}$

$$KB \cdot KE = KB^2$$

$$\frac{10}{3} = \frac{KB \cdot KE}{KB \cdot CK} = \frac{KB \cdot AK \cdot BK \cdot CO}{KB \cdot KC}$$

т.к.  $EO$  кас к  $w_2$   $\angle CDB = \angle BDE$

$$\frac{DE}{BCD} = \frac{BO}{CB}$$

угр

$$\frac{DE}{CD} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \cdot \frac{BO}{CO}$$

$$\frac{CK}{KE} = \frac{CA}{KADE} = \frac{KE}{\sin \alpha}$$

$$\frac{CA}{\sin \angle CMB} \cdot \frac{AD}{\sin \angle AMO} = \frac{CA}{AB} = \frac{CM}{\sin \alpha} \cdot \frac{AD}{\sin \gamma} \Rightarrow \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{CD}{DE}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5

11-параллельной

по формуле включения и исключений

Трое пустых клеток -  $a$  - симметрична отн прямой 11 стороны 200

8 клеток  $\left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ условия} - b \text{ симметрична отн прямой 11 стороны 250} \\ 3 \text{ условия} - c \text{ симметрична отн. центричной} \\ \text{наставить в tower} \end{array} \right.$

$f(a), f(b), f(c)$  - колво вариантов  $\forall$  где выполняются  $a, b, c$  соответственно

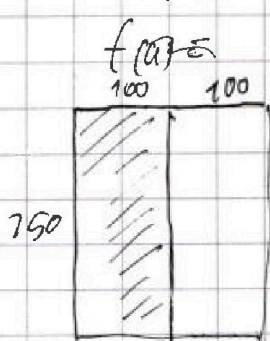
$f(a, b), f(b, c), f(c, a)$  - колво вариантов расставить в tower

где выполняются  $a, b, c$  соответственно

$f(a, b, c)$  - всего колво расстановок где все 3 условия выполняются

тогда с ними требуют найти  $f(a) + f(b) + f(c) - f(a, b) - f(b, c) - f(c, a) + f(a, b, c)$

по формуле включения и исключений



Заметим что если мы возьмем  $n$  крайней прямой прямоугольнике  $100 \times 250$ , в раскраске

то любой точке, удовлетворяющей условию  $f(a)$  или  $f(c)$  пишется пара симметричных

ей. тогда  $a, b$  это  $a, b$  этой пары 1 клетка

летит в заштрихованном прямоугольнике и вторая

в углу, при этом пара однозначно задается по 1 клетке в заштрихованном прямоугольнике, тогда

$$f(a) = f(c) = C_{250}^4$$

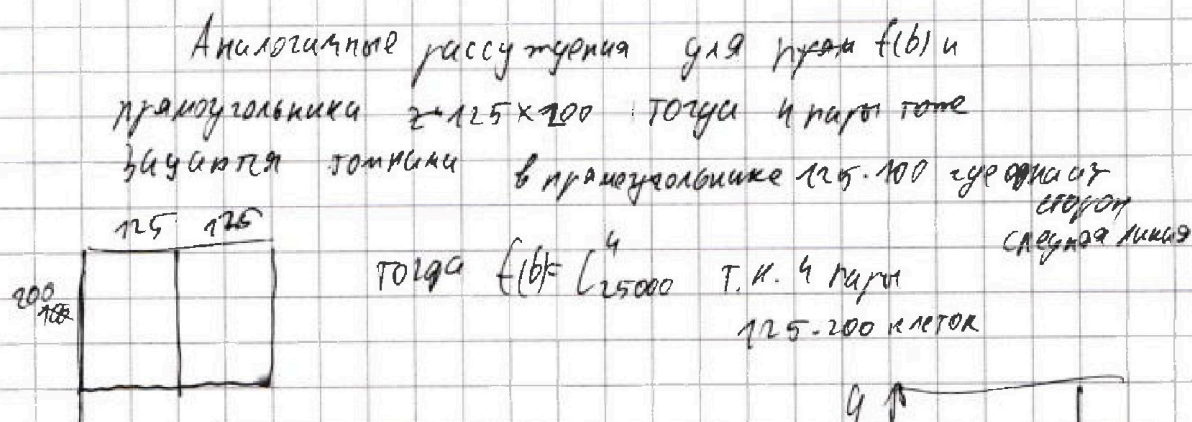
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

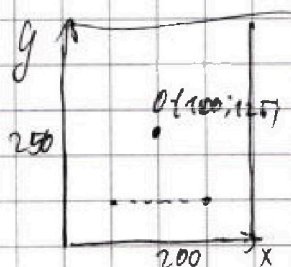
СТРАНИЦА  
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$x$  ну осматрив  
на  $f(ac)$  и  $f(bc)$  и  $f(b)$

в факте в раскрасе из  $f(ac)$



покрываем точку  $A(x, y)$  то должны быть закраски

и  $B(200-x, y)$  как симметричная от  $x=100$

и  $C(200-x, 250-y)$  как симметричная от  $O(100, 125)$

где  $O$  - центр прямоугольника

и  $D(x, 250-y)$  как симметричная от  $C$  от  $x=100$

значит выполняется и в т.к. площадь

$$f(ac) = f(bc) \Leftrightarrow f(x, y) \text{ то есть } f(x, 250-y)$$

это для раскрасок  $f(bc)$

$A(x, y)$  закраски,  $A(x, 250-y)$  закраски как

$B(200-x, 250-y)$  закраски как симметричной

$C(200-x, y)$  - закраски как симметричной

$D$  относительно  $y=125$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 34

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

тогда выполняется и тогда выполняется  $(x, y)$

Значит  $x = 25(200 - x, y)$

Значит  $a$  выполняется

$$\text{тогда } f(a, c) = f(a, b, c)$$

Если выполняется  $f(a, b)$  тогда выполняется  $A(x, y)$

то выполняется  $B(200 - x, y)$  как симметричный  $A$  от  $x = 100$ ,

$C(175 - x, 125 - y)$  как симметричный  $B$  относительно  $y = 125$

$$y = 125$$

Значит если выполняется  $a$  и  $b$ , то и  $c$

если  $b$  и  $c$ , то и  $a$

если  $a$  и  $c$ , то и  $b$

$$f(a, b) = f(b, c) = f(c, a) = f(a, b, c)$$

Значит ответ:  $3 \cdot C_{25000}^4 \cdot 2 \cdot f(a, b, c)$

+  $f(a, b, c)$ . это заметим много если два выполняется

$A(x, y)$ , то и выполняется  $B(200 - x, y)$ ,  $C(x, 125 - y)$ ,  $D(200 - x, 125 - y)$

Для каждой клетки  $A, B, C, D$  у нас есть клетка симметричная ей от  $x = 100, 0, x = 175, y = 125$

$A(x, y)$  симметрична  $B(200 - x, y)$  от  $x = 100$

$C$  от  $y = 125$

$D$  от  $(100, 125)$

тогда метверги

тогда  $f(a, b, c) =$  при заметим что каждая из клеток имеет метверги

в своей метверги

$$\text{тогда } f(a, b, c) = C_{12500}^2$$

	100	
125	I	II (100, 125)
125	III	IV



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

тогда ответ:  $4 \cdot 3 \cdot C_{2500}^4 - 2 \cdot C_{1250}^2 =$   
 $= 3 \cdot \frac{2500!}{4! \cdot 2496!} - 2 \cdot \frac{1250!}{2! \cdot 1248!}$



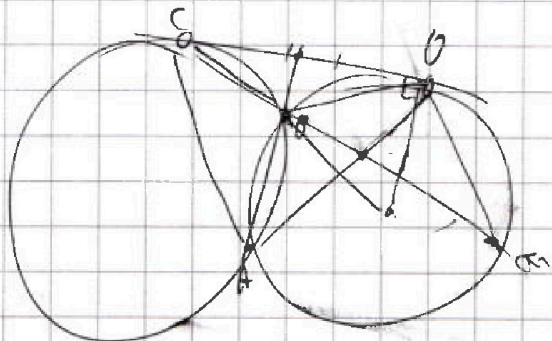


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$AD \perp CO$

$$\frac{DE}{CO} = \frac{DB}{BC}$$

$$BC \cdot CE = DC^2$$

$$BC = \frac{DC^2}{EC}$$

$$\textcircled{2} \frac{DB \cdot EC}{DC^2} = \frac{DE}{DC}$$

$$DB \cdot EC = DC^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (x+3) - (x-2) + 5 = 2 \end{array} \right.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6

$$\begin{cases} a > b \\ a - b \nmid 3 \\ (a - c)(b - c) = p^2 \\ a + b^2 = 560 \end{cases}$$

$p$  - простое число  
 $a, b, c \in \mathbb{Z}$

Заметим что если  $(a - c)(b - c) = p^2$

то т.к.  $a - c$  - целое  
 $b - c$  - целое то

$$\begin{cases} (a - c)(b - c) = p^2 \\ a > b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - c = 1; b - c = p^2 \\ a - c = -1; b - c = -p^2 \\ b - c = 1; a - c = p^2 \\ b - c = -p^2; a - c = -1 \\ b - c = a - c = p \\ b - c = a - c = -p \\ b - c = -1; a - c = -p^2 \\ a > b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 1 - p^2; c = a + 1 \quad \times \\ a - b = p^2 + 1; c = a + 1 \quad \checkmark \\ a - b = p^2 - 1; c = b + 1 \quad \checkmark \\ a - b = p^2 + 1; c = a + 1 \\ a - b = 1 - p^2; c = b + 1 \quad \times \\ a = b; c = a - p \quad \times \\ a = b; c = a + p \quad \times \\ a > b \end{cases}$$

т.к. если  $a > b$  то  $a \neq b$

и т.к.  $1 - p^2 < 0$  т.к.  $p > 1 \Rightarrow p^2 > 1 \Rightarrow 1 - p^2 < 0 \Leftrightarrow p^2 - 1 > 0$

$a - b > 0$  если  $a > b$  то эти системы равносильны

$$\begin{cases} \begin{cases} a - b = p^2 - 1 \\ c = a + 1 \\ b - c = b + 1 \\ a > c \end{cases} \quad \text{т.к. } b p^2 - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a - b = p^2 - 1 \\ c = a + 1 \\ c = b + 1 \end{cases} \end{cases}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Значит где  $a+b$  и  $a, b, c$  — целые

$$\begin{cases} a \neq b \\ a-b \neq 3 \\ (a-c)(b-c) = p^2 \\ a+b^2 = 560 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b \neq 3 \\ a^2+b^2 = 560 \\ a-b = p^2-1 \\ \begin{cases} c = a+1 \\ c = b-1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p^2-1 \neq 3 \\ a+b^2 = 560 \\ a-b = p^2-1 \\ \begin{cases} c = a+1 \\ c = b-1 \end{cases} \end{cases}$$

Заметим что если  $p \neq 3$  то  $\begin{cases} p \equiv 1 \pmod{3} \\ p \equiv 2 \pmod{3} \end{cases} \Leftrightarrow p^2 \equiv 1 \pmod{3}$

тогда  $a$  по  $p^2-1 \neq 3 \pmod{3}$  противоречие значит  $p \equiv 3$  тогда  $p \neq 3$

тогда  $9 \nmid 560$

$$p^2-1 = 9-1 = 8 \neq 3$$

$$p \neq \frac{p}{3} \neq 3$$

$$\frac{p}{3} = 1 \quad p \neq 3$$

$$\begin{cases} a+b^2 = 560 \\ a-b = 8 \\ \begin{cases} c = a+1 \\ c = b-1 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow$$

мы подставим  $b = a-8$   
 $a = b+8$

$$\begin{array}{r} 560 \\ -8 \\ \hline 552 \\ \times \frac{552}{4} \\ \hline 2208 \end{array}$$

$$\begin{cases} b^2+b+8 = 560 \\ c = a+1 \quad b+8+1 \\ c = b+8-1 \end{cases}$$

$$b^2+b+8 = 560 \Rightarrow b^2+b-552$$

$$D = 1 + 552 \cdot 4 = 2209 = 47^2$$

$$\sqrt{D} = 47 \quad b_{1,2} = \frac{-1 \pm 47}{2} = -24, 23$$

т.к.  $b \neq$

$$\begin{cases} b = -24 \\ b = 23 \\ \begin{cases} c = b+9 \\ c = b-1 \end{cases} \end{cases}$$

тогда все трики это

$$b = -24 \quad c = -15 \quad a = -16$$

$$b = -24 \quad a = -16 \quad c = -25$$

$$b = 23 \quad a = 31 \quad c = 22$$

$$b = 23 \quad a = 31 \quad c = 32$$

Дни подходят т.к. переходят равенствам



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Ответ~~

I  $a = -16$   $b = -24$   $c = -15$

II  $a = -16$   $b = 24$   $c = -25$

III  $b = 23$   $a = 31$   $c = 22$

IV  $b = 23$   $a = 31$   $c = 32$

Заметим что  $a > b$

$$a - b = 8 \cdot 3$$

$$(a - c)(a - b) = -1$$

$$(a - c)(b - c) = -1 \cdot -9 = 3^2 \cdot 1 \text{ I и III}$$

$$(a - c)(b - c) = 1 \cdot 4 = 3^2 \cdot 1 \text{ II и IV}$$

и  $a + b^2 = 560$  Значит все 4 варианта подходят

Ответ:  $a = -16$   $b = -24$   $c = -15$

$a = -16$   $b = 24$   $c = -25$

$a = 31$   $b = 23$   $c = 22$

$a = 31$   $b = 23$   $c = 32$





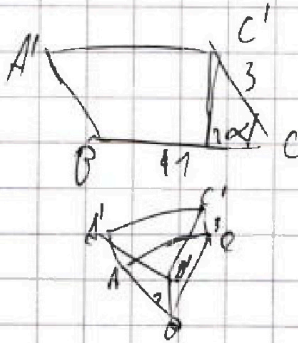
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\text{Поэтому } S_{\Delta A'B'C'} = S_{\Delta C'AC} = 4$$

$$\angle B'PC = 90^\circ = \angle C'CB$$

$$BB' = CC' = \frac{3}{1} = 3$$

$$4 = S_{\Delta C'AC} = BC \cdot \sin \alpha \cdot CC' = 1 \cdot \sin \alpha \cdot 3$$

$$\sin \alpha = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

XF-

$$4 \cos^3 x - 3 \cos x + 3 \cos^2 x - 3 \sin^2 x + 6 \cos x = p$$

$$4 \cos^3 x + 6 \cos^3 x + 3 \cos x + 6 \cos^2 x = p + 3$$

-1; 1

$$4 \cos^3 x + 36 \cos^2 x + 3 \cos x - (p+3) = 0$$



$$\begin{aligned} \cos x = 1 & \quad p \leq 10 & \quad \frac{2500}{4} \\ 13 - p - 3 = 0 & & \quad \frac{2996}{4} \\ -1 & \quad 6 - 7 = -1 & \quad p \geq -4 \end{aligned}$$

$$4p^3 + 6p^2$$

$$f(x) = 4x^3 + 6x^2 + 3x - (p+3) = 0$$

$x \in [1, 1]$

0

$$f(x) = 4x^2 + 12x + 3$$

пусто

$$\frac{D}{4} = 36 - 36 = 0$$

$$x_1 = \frac{-12}{2 \cdot 4} = -\frac{1}{2}$$



$$4 + 3 - 6 \cos^2 = 4$$

$$f(k) = 4k^3 + 3k + 6k^2 = (p+3)$$

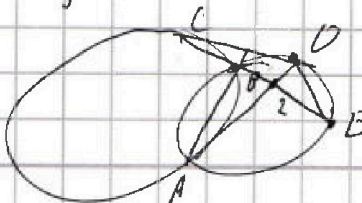


$\& \cos x = 1$

$$\frac{-1}{2} \quad \Bigg/ \quad k + \frac{1}{2} = L$$

g+8

$$4k^3 + 3k + 6k^2 = \left(\frac{k+\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}\right)^3 = \frac{12}{3} \cdot \left(k + \frac{1}{2}\right)^3 = 4k^3$$







На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

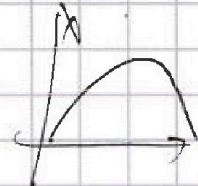
$$\cos 3x + 3 \cos 2x + \cos x = p$$

$$DB \cdot DN = CD^2$$

$$3 \cos^3 x - 4 \cos x + 3 \cos^2 x - 3 \sin^2 x + \cos x = p$$

$\frac{DE}{DB \cdot DN} = x+3$

$$3(\cos^3 x + 3 \cos^2 x - \cos^2 x - \cos x) = p$$



$$\begin{aligned} \cos 3x &= \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = \\ &= \cos^3 x - \sin^2 x \cos x - 2 \sin x \cos x \end{aligned}$$

$$\cos 3x = 3 \cos^3 x - 4 \cos x$$

$$x = \frac{\pi}{2}$$

~~-1~~

$$\cos \frac{3\pi}{2} = \pm \frac{\pi}{3}$$

$$\cos \pi = 3 \cos^3 \frac{\pi}{3}$$

$$-1 = 3 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ 36 \\ \hline 68 \\ 4 \\ \hline 72 \end{array}$$

$$36 + 4 \cdot 2^4$$

$$D = 4$$

$$D = 4 \cdot \sqrt{17}$$

$$SD = \sqrt{7} \cdot 2$$

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + \cos x$$

$$4 \cos^3 x - 3 \cos x + 3 \cos^2 x - 3 \sin^2 x + \cos x = p$$

$$4 \cos^3 x - 2 \cos x + 6 \cos^2 x = p + 3 \quad u-b+1p$$

$$\cos x = k$$

$$4k^3 - 2k + 6k^2 = p + 3$$

$$k(4k^2 + 6k - 2) = p + 3$$

$$x_{1,2} = -6 \pm$$

$z = 2$

$2x^3 - 5x^2 + 29x - 29 = 0$