



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен

$$\sqrt{\frac{13x - 35}{(x + 1)^3}}, \text{ тринадцатый член равен } 5 - x, \text{ а пятнадцатый член равен } \sqrt{(13x - 35)(x + 1)}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $3 : 10$ , считая от вершины  $C$ .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $200 \times 250$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:

- $a > b$ ,
- число  $a - b$  не кратно 3,
- число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство  $a + b^2 = 560$ .

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.

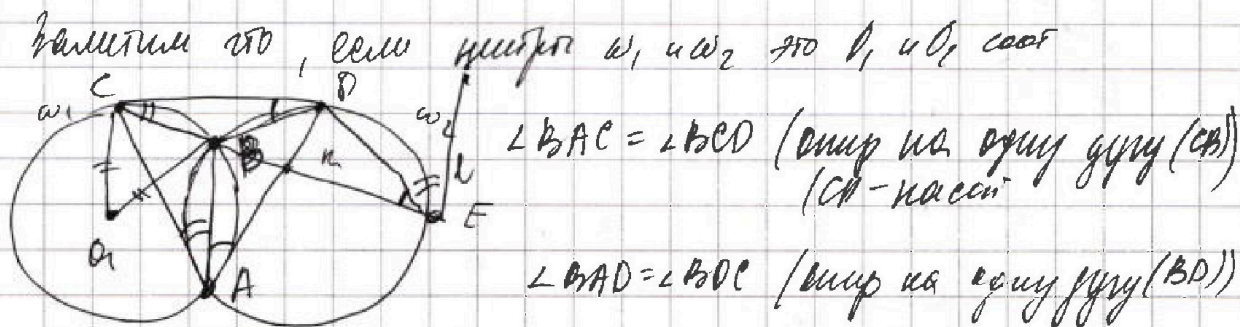
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
5 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что  $O_1C \perp ED$  (CD касат.)  $O_2D \perp CE$   
 $\Rightarrow \angle O_1CB + \angle BCD = 90^\circ$  ( $\angle O_1CB = 90^\circ$ )  $\Rightarrow \angle O_1CB = \angle O_1CE$  ( $O_1C = O_1K$ )

и проведем AB до пересечения с CD в точке M тогда  $\triangle AMC \sim \triangle MBD$   
 по двум углам ( $\angle CMB = \angle DMB$  и  $\angle CMA = \angle DMB$ )  $\Rightarrow \frac{AC}{CD} = \frac{AM}{MB}$

Пусть K - пересечение AB с CE  $\Rightarrow \angle CDB = \angle DEB$  (один на одну дугу (BD))  
 $\triangle CMD \sim \triangle DEB$  по двум углам ( $\angle CDB = \angle DEB$  и  $\angle DCB = \angle DEB$ )  $\Rightarrow$

$$\frac{CD}{AB} = \frac{CE}{EB} \quad \frac{CD}{BD} = \frac{CE}{DE} \quad \frac{CD}{DE} = \frac{CB}{BD} \quad \frac{CK}{KE} = \frac{3}{10}$$

$\angle DEB = \angle DAB$  (один на одну дугу (AD))  $\angle KCA = \angle DKE$  (верт.)  $\Rightarrow \triangle EKD \sim \triangle AKB \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{DE}{EK} = \frac{AB}{AK}$$

AB - радикальная ось  $\omega_1$  и  $\omega_2 \Rightarrow$  точки на ней имеют равную степень точки  $\Rightarrow MC = MD$ , верь CD - касат., а степеней точки M у  $\omega_1 = CM^2$  у  $\omega_2 = MD^2$

Если из E провести прямую  $\ell$  касат., то  $\angle DE$  и  $\ell = \angle CAM$ , то

$\angle KET$  (где T пересек  $\ell$  с AD) =  $\angle KAC$  ( $\angle DET = \angle CAM$ ;  $\angle BED = \angle BAD$ )

и  $\angle KCA = \angle TKE$  (верт.)  $\Rightarrow \triangle KET \sim \triangle KAC$  по двум углам  $\Rightarrow$

$$\frac{KE}{EK} = \frac{KA}{KC} \Rightarrow \frac{10x}{TK} = \frac{KA}{3x}$$



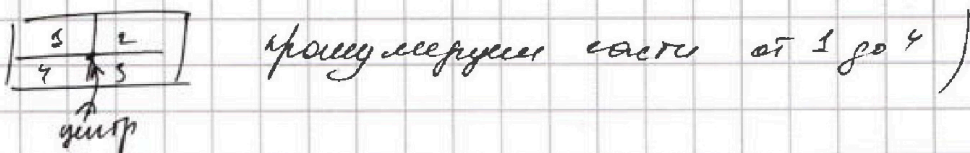
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что если  $\square$  диагональ симметричного относительно центра, то (симметричные на 4 прямоугольника <sup>среди них</sup> <sub>линейка</sub> <sup>мм</sup>)



если ставим клетку в 1 область то для симметрии поставим в 3; если в 2  $\Rightarrow$  мм в 4, если 3  $\Rightarrow$  мм в 1 мм в 4  $\Rightarrow$  мм в 2. Тогда у нас по 4 диагонали клетки в 1+2 области и в 3+4  $\Rightarrow$  нужно оставить и посчитать различные варианты расстановки 4-х клеток в области 1+2, верь в 3+4 ставится симметрично:

Таких способов  $\frac{250 \cdot 200}{2} \cdot \left(\frac{250 \cdot 200}{2} - 1\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{250 \cdot 200}{2} - 3\right) = \left(\frac{250 \cdot 200}{2}\right)! : \left(\frac{250 \cdot 200}{2} - 4\right)!$

Заметим что для горизонтальной симметрии у нас будут 1с4 и 2с3 области сверху и опять получим такое же пол-во; для вертикальной симметрии будут сверху 1с2 и 3с4 области опять же получим то же пол-во. (Для горизонтальной симметрии 1+2 с 3+4 областями и будем ставить 4 клетки в 1+2, а в 3+4 ставится симметрично.) (Аналогично для вертикальной симметрии 1+4 с 2+3).

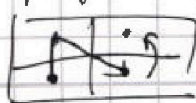
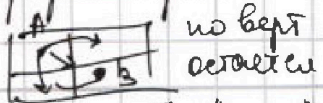
Но мы посчитали 3 раза варианты когда раскраска и симметрия относительно центра и симметрия по горизонтальной и вертикальной.

Притом заметим, что если есть хотя бы 2 из 3 осей симметрии, то 3-я ось симметрии тоже есть.

горизонтальная + вертикальная

горизонтальная + центр

центр симметрии (сохраняет)



вертикальная + горизонтальная по оси 1+2  
горизонтальная центр мм мм 1+2  
вертикальная центр мм мм 1+2

симметрия относительно центра и по горизонтали.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$a > b$   $a - b \not\equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow a \not\equiv b \pmod{3}$  Тогда же если  $p$ -простое  
 $(a-c)(b-c)$  - квадраты простого и  $p \neq 3 \Rightarrow p^2 - 1 \equiv 0 \pmod{3}$   
 $\Downarrow$  верно если  $p-1 \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow p^2 - 1 \equiv 0 \pmod{3}$   
 либо оба делители это  $p$  если  $p-2 \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow p^2 - 1 \equiv 0 \pmod{3}$   
 либо оба  $-p$   $p \equiv 1 \pmod{3} \quad p^2 \equiv 1^2 \pmod{3}$   
 либо одна из делителей  $= 1$ , а вторая  $= p^2$  (либо одна  $-1$  и вторая  $-1$ )  $p \equiv 2 \pmod{3} \quad p^2 \equiv 4 \equiv 1 \pmod{3}$

I  $a-c = p^2 \Rightarrow b-c = 1 \Rightarrow a-b = a-c-b+c = p^2 - 1$  или  
 $p \neq 3$ , то  $a-b \not\equiv 0 \pmod{3}$  противоречие  $\Rightarrow p=3 \Rightarrow a-b = 9-1 = 8$   
 $b = a-8 \quad a+b^2 = a+(a-8)^2 = 560 \quad a = b+8$   
 $b+8+b^2 = 560 \quad b^2+b-552 = 0 \quad \sqrt{D} = \sqrt{1+4 \cdot 552} = \sqrt{2209} = 47$

II  $a-c = -p^2 \Rightarrow b-c = -1 \quad a-b = (-p^2) - (-1) = -(p^2-1)$  или  
 наоборот только  $p=3 \Rightarrow a-b = -8 \quad a+8=b \quad a = b-8$   
 $b-8+b^2 - 560 = 0 \quad \sqrt{D} = \sqrt{1+4 \cdot 568} = \sqrt{2273}$  - нецелое  $\Rightarrow a$  нецелое  
 противоречие.

III  $a-c = 1 \Rightarrow b-c = p^2 \quad a-b = 1-p^2$   
 IV  $a-c = -1 \Rightarrow b-c = -p^2 \quad a-b = -1+p^2$   
 еще были такие варианты

V  $a-c = p \quad b-c = p \Rightarrow a-b = 0 \pmod{3}$   
 VI  $a-c = -p \quad b-c = -p \Rightarrow a-b = 0 \pmod{3}$   
 не подходит из условия

I\*  $a-c = p^2 \Rightarrow b-c = 1 \quad a-b = a-c-b+c = p^2 - 1$  если  $p \neq 3 \Rightarrow$   
 $a-b \not\equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow p=3 \quad a-b = 8 \quad a = b+8 \quad a+b^2 = b+8+b^2 = 560$   
 $b^2+b-552 = 0 \quad \sqrt{D} = \sqrt{1+4 \cdot 552} = \sqrt{2209} = \sqrt{47^2} = 47$

Арамант  
Сидур



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$b^2 + b - 552 = 0 \quad \sqrt{D} = 47 \quad b_1 = \frac{-1 + 47}{2} = \frac{46}{2} = 23 \Rightarrow a = 23 + 8 = 31$$

$$c = b - 1 \quad (b - c = 1) \quad c = 23 - 1 = 22 \quad (31; 23; 22) = a, b, c$$

$$b_2 = \frac{-1 - 47}{2} = \frac{-48}{2} = -24 \quad a = -24 + 8 = -16 \quad c = b - 1$$

$$c = -24 - 1 = -25$$

$$a, b, c = (-16; -24; -25)$$

\* IV  
#  $a - c = -1 \quad a - b = 8 \quad \text{или} \quad b = 23 \Rightarrow a = 31 \Rightarrow c = a + 1$   
 $c = 32$

$$a, b, c = (31; 23; 32)$$

$$\text{или} \quad b = -24 \Rightarrow a = -16 \quad c = -16 + 1 = -15$$

$$a, b, c = (-16; -24; -15)$$

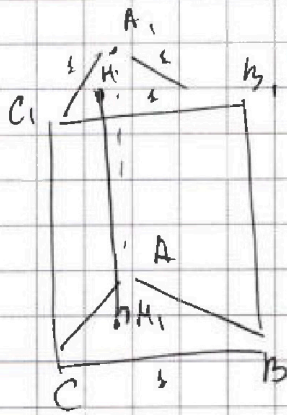
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

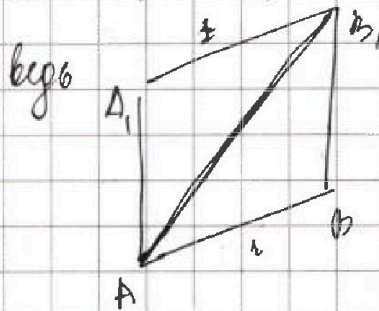
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



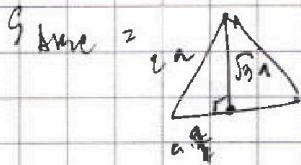
$\triangle A_1 H_1 B_1$  - равнобедрен.

$$S_{C A_1 B_1} = 3 \quad \text{если } S_{A C A_1} \text{ и } S_{A B B_1} = 4 \quad \text{и}$$

$$C A_1 = A_1 B_1 = C A = A B = 1 \Rightarrow C C_1 = A B_1$$



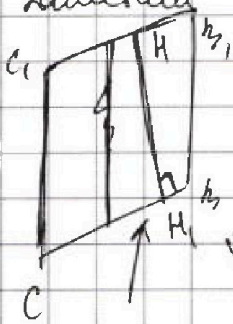
$H_1$  - высота  
кружка



$$\sqrt{3} a \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{3} a^2 \quad \text{где } a^2 = \frac{1}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{4}$$

(ведь  $C C_1 = A B_1$  и  $C A_1 = C B_1 = 1$ )

Заметим что  $\Rightarrow C C_1, B_1 B$  - параллелограмм  $\Rightarrow C_1 B_1 \parallel C B$  и  $C C_1 \parallel B_1 B$ .



тогда внутри него есть наша высота  $H_1$ ,  
крючком  $S = 3 \quad C C_1 = C_1 B_1 = 1$

$$S = \frac{1}{2} (C C_1 + C B_1) \cdot h = 3 \Rightarrow h = 3$$

наша  
высота  
кружка.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a > b \quad a - b \neq 3 \Rightarrow a \equiv b \pmod{3}$$

$$(a-c)(b-c) - \text{квадрат простого} \Rightarrow a-c \stackrel{\pm}{=} p^2 \quad b-c \stackrel{\pm}{=} 1 \text{ либо}$$

$$a-c \stackrel{\pm}{=} 1 \quad b-c \stackrel{\pm}{=} p^2$$

без квадрата простого  
делится только на  $4p^2$  и 1

и выше либо  
на  $4$  и  $1$  либо  
на  $4$  - перер

$$a + b^2 = 560$$

$$a + b^2 = 560$$

$$a > b \Rightarrow \sqrt{a + a^2} > 560 \Rightarrow a^2 + a - 560 > 560 \Rightarrow \sqrt{1 + 4 \cdot 560} = \sqrt{2241}$$

$$\text{I: } a - c \stackrel{\pm}{=} p^2 \quad b - c \stackrel{\pm}{=} 1$$

$$\text{если } a - c = p^2 \Rightarrow b - c = 1 \Rightarrow a - b = a - c - b + c = p^2 - 1$$

$$\text{если } p \neq 3 \quad p^2 \equiv 1 \pmod{3} \quad \left( \begin{array}{l} \text{если } p \text{ имеет окт } 1 \Rightarrow p^2 \text{ окт } 1 \\ p \text{ имеет окт } 2 \Rightarrow p^2 \text{ окт } 1 \end{array} \right)$$

$$a - b \equiv 3 \text{ противоречие}$$

$$\text{если } a - c = -p^2 \Rightarrow b - c = -1 \Rightarrow a - c - b + c = -p^2 + 1$$

$$a - c = -(p^2 - 1) \quad p^2 - 1 \text{ делится на } 5 \text{ кроме } p = 3.$$

$$\text{если } p = 3 \Rightarrow a - b = \frac{8}{3} \text{ и там или } a = b + 3 \text{ или } b = a - 3$$

$$a + (a-3)^2 = 560 \Rightarrow a^2 + a^2 - 6a + 9 = 560 \Rightarrow 2a^2 - 6a - 551 = 0$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{36 + 8 \cdot 551} - \text{не целое число} \Rightarrow a - \text{не целое противоречие.}$$

$$\text{если } p = 3 \quad a - b = -3 \quad a + 3 = b$$

$$a + (a+3)^2 = 560$$

$$2a^2 + 6a + 9 - 560 = 0$$

дискриминант  
тоже не целое  
противоречие

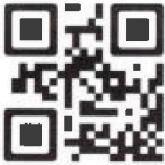
$$\begin{array}{r} \times 452 \\ 4 \\ \hline 1808 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 43 \ 1809 \\ \times 43 \\ \hline 129 \\ 12 \\ \hline 1809 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 560 \\ 4 \\ \hline 224 \\ 2252 \\ \hline 2252 \\ 21 \\ \hline 21 \\ 9 \end{array}$$

69

Прерван  
судей



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть  $a_i$  - это  $i$  элемент последовательности, а  $d$  - ее

шаг прогрессии  $\Rightarrow a_7 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$   $a_{13} = 5-x$   $a_{15} = \sqrt{\frac{(13x-35) \cdot \sqrt{(x+1)^3}}{\sqrt{(x+1)^3}}}$

ОДЗ:  $(x+1)^3 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$

$a_{15} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$

$\frac{13x-35}{(x+1)^3} \geq 0$   $(13x-35)(x+1) \geq 0$  ( $13x-35 \neq 0$ , иначе шаг прогрессии  $(a_{15}) = 0 \Rightarrow$  также не может быть прогрессией.)

Теперь заметим, что  $\frac{a_{13}}{a_7} = d^6$   $\frac{a_{15}}{a_{13}} = d^2$   $5-x \neq 0$   
 $5 \neq x$

$d^6 = \frac{5-x}{\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}}$

$d^2 = \frac{\sqrt{(13x-35)(x+1)}}{5-x}$

Пусть  $t = \frac{5-x}{\sqrt{13x-35}} \Rightarrow d^6 = t \cdot \sqrt{(x+1)^3}$   $d^2 = \frac{\sqrt{(x+1)}}{t}$

$d^6 = t \sqrt{(x+1)^3} = (d^2)^3 = \frac{(\sqrt{(x+1)})^3}{t^3}$   $\Downarrow$   $\frac{1}{t^3} = 1$   $t^3 = 1$   $t = 1$   $t^3 \neq 0$ , берем  $5-x \neq 0$  и  $\sqrt{13x-35} \neq 0$   $\Rightarrow$   $t^4 = 1 \Rightarrow t^2 = \pm 1$  и так как  $t$  действителен, берем  $x$  - действителен  $\Rightarrow t = \pm 1$

$\frac{5-x}{\sqrt{13x-35}} = 1 \Rightarrow 5-x = \sqrt{13x-35} \Rightarrow 25 - 10x + x^2 = 13x - 35 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 23x + 60 = 0$   $\sqrt{D} = \sqrt{23^2 - 4 \cdot 60} = \sqrt{289} = 17$

$x_1 = \frac{23+17}{2} = \frac{40}{2} = 20$

$x_2 = \frac{23-17}{2} = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow$  оба корня подходят по ОДЗ  $\Rightarrow$

$(13 \cdot 20 - 35 > 0 \quad 5 - 20 \neq 0)$   
 $20 + 1 > 0$

$(13 \cdot 3 - 35 > 0 \quad 5 - 3 \neq 0)$   
 $3 + 1 > 0$

Ответ:  $x = 20; 3$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пира при горю и верт симметрично по горю из  $1 \Rightarrow 4$ , а по верт из  $4 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1 \Rightarrow 5$  сеть или (верт или горю).

При горю + верт: горю  $1 \Rightarrow 3$  горю  $3 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1 \Rightarrow 2$  (верт.)

При верт + горю: горю  $1 \Rightarrow 3$  верт  $3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1 \Rightarrow 4$  (горю.)

Пира можно считать пол-во раскрасок симметрично по 3 вертам, заметим 250 или по раскрас 1 область, то 2, 3, 4 области раскраски симметрично  $\Rightarrow$

можно поставить 2 метки в область  $\frac{250 \cdot 200}{4}$ :

$$\frac{250 \cdot 200}{4} \cdot \left( \frac{250 \cdot 200}{4} - 1 \right) = \frac{250 \cdot 200}{4} \cdot \left( \frac{250 \cdot 200}{4} - 2 \right)!$$

использовано 3 page  $\Rightarrow$

$$\text{Ответ: } 3 \cdot \left( \frac{250 \cdot 200}{2} \cdot \left( \frac{250 \cdot 200}{2} - 4 \right) \right) - 2 \left( \frac{250 \cdot 200}{4} \cdot \left( \frac{250 \cdot 200}{4} - 2 \right) \right)!$$

$$3 \cdot \frac{250 \cdot 100}{(250 \cdot 100 - 4)!} - 2 \frac{(250 \cdot 50)!}{(250 \cdot 50 - 2)!}$$



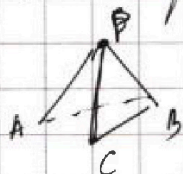
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

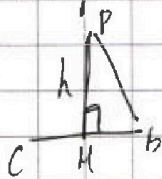
Найти то в боковых сторонах есть равнобедр  $\Delta$ , верь  
д площади шлои = 5.



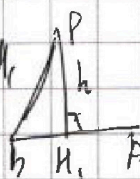
$\Rightarrow CB=AB=5$   $PB$ -общ  
и площади  $\Rightarrow$  равнос

высота ш  $P$  равно  $\Rightarrow$

$\Delta$  равнос, верь 2 стороны и  $\angle PBC = \angle PBA$  равнос  $\Rightarrow$   $PC = PA$



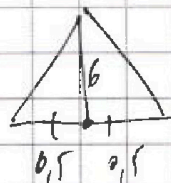
$\Rightarrow$   $h \cdot b = 10$



$\Rightarrow HC = HA$   $\Rightarrow$  по Пифагору  $PC = PA$

с площадью  $\Rightarrow 3 \Rightarrow$  высота ш  $P$  ш  $AC = 6$  ( $\frac{1}{2}h \cdot s = AC = 3$ )

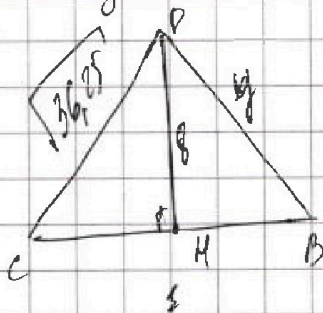
Пира высота = медиана  $\Rightarrow$



$\Rightarrow PC = PA = \sqrt{0,5^2 + 6^2} = \sqrt{36,25}$

Площа  $PH = PH_1 = 8$  ( $\frac{1}{2}h \cdot s = ABC = 4$ ) тогда в  $\Delta PBC$

$CH = x \Rightarrow HH_1 = 1-x$   $CH^2 = 36,25 - PH^2$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x+x^2+z}$$

$$|y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2} = \sqrt{(13-z)(13+z)}$$

DP3:  $x+3 \geq 0$   $4-x-z \geq 0 \Rightarrow 4-z \geq x$

$$y+x+x^2+z \geq 0 \Rightarrow y+z \geq x^2-x = x(x-1)$$

$$169-z^2 \geq 0 \Rightarrow 13 \geq |z|$$

Пусть  $y \geq -1$  и  $y \leq 12 \Rightarrow$

$$(y+1) + 3|y-12| = y+1 + 3(12-y) = 37-2y$$

$$37-2y = \sqrt{169-z^2} \Rightarrow 1369 - 148y + 4y^2 = 169 - z^2$$

$$1200 - 148y + 4y^2 + z^2 = 0 \quad 1200 + 4y^2 + z^2 = 148y$$

$$\sqrt{2} = \sqrt{4y^2 - 16 \cdot 1200 + 16 \cdot z^2} = \sqrt{54 \cdot 4y^2 - 19200 - 16z^2} =$$

$$= \sqrt{(44y - 42)(74y + 42) - 19200} \geq 0 \leftarrow \text{если есть решение}$$

$$1200 - 148y + 4y^2 + z^2 \geq 1200 - 148y + 4y^2$$

значит всегда  $\geq 0 \Rightarrow \neq 0$

$$\sqrt{2} = \sqrt{44^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1200}$$

$$44^2 < 160 \cdot 1200 \Rightarrow \text{нет решений.}$$

Пусть  $y \leq -1 \Rightarrow y \leq 12$

$$|y+1| + 3|y-12| = -1-y + 36-3y = 35-4y = \sqrt{169-z^2}$$

$$35^2 - 8 \cdot 35y + 16y^2 = 169 - z^2 \Rightarrow 1225 - 169 - 8 \cdot 35y + 16y^2 + z^2 = 0$$

$$1056 - 280y + 16y^2 + z^2 = 0$$

$$\begin{array}{r} \times 52 \\ \times 52 \\ \hline 104 \\ 10 \\ \hline 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 551 \\ \times 551 \\ \hline 4408 \\ 36 \\ \hline 4954 \end{array}$$

cos 3x + 3(cos 3x cos x - sin 3x sin x) + 16 cos x = 9  
cos x + 3 - 3 sin x + 16 cos x = 9  
2241  
cos 3x cos x  
cos 3x / 4 ... 6/



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x = ? \quad a_7 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$        $a_{13} = 5-x$        $a_{15} = \sqrt{(3x-35)/(x+1)}$

$d^6 = \frac{5-x}{\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}}$        $d^2 = \frac{\sqrt{(13x-35)(x+1)}}{5-x}$

$\frac{5+x}{\sqrt{13x-35}} = t$        $\sin 2x = 2 \cos x \sin x$        $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$

$d^6 = \frac{1}{t} \cdot \sqrt{(x+1)^3}$        $d^2 = \frac{\sqrt{(x+1)}}{t}$        $4.70 = 280$

$d^6 = t \sqrt{(x+1)^3} = (d^2)^3 = \frac{\sqrt{(x+1)}}{t^3}$        $(\sqrt{2})^3 = 2 \cdot \sqrt{2}$

$(x+1) \neq 0 \Rightarrow t = \frac{1}{t^3}$        $\sqrt{2^3} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$t^2 = \pm 1$

$t = \pm 1$        $\cos 90^\circ = 0$

$5-x = \pm \sqrt{13x-35}$        $13x-35 \geq 0$        $(x+1)^3 \geq 0 \Rightarrow x+1 \geq 0$

$25+x^2-10x = 13x-35$        $x^2 - 23x + 60 = 0$        $\sqrt{D} = \sqrt{23^2 - 4 \cdot 60} = \sqrt{289} = 17$

$x = \frac{23 \pm 17}{2}$        $\frac{23+17}{2} = 20 \checkmark$

$\frac{23-17}{2} = 3 \checkmark$

$\sin 2x = \cos x \sin x + \cos x \sin x = \sqrt{1 - \cos^2 2x}$

$\cos 2x = \cos x \cdot \cos x$        $4 \cos^2 x \sin^2 x = 1 - \cos^2 2x$

$\cos 2x = \cos 3x \cdot \cos x - \sin 3x \sin x$        $4 \sin^2 x = \cos 2x - 1$

$\cos^2 2x = \sqrt{1 - 4 \cos x \sin x}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

II  
 $a-c = \pm 1$      $b-c = \pm p^2$

если  $a-c = 1 \Rightarrow b-c = p^2$      $a-b = 1-p^2 = -(p^2-1)$

аналогично только

$p=3$

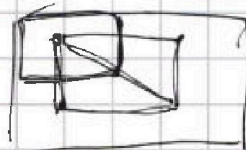
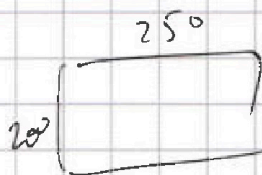
$$\begin{array}{r} \times 552 \\ 4 \\ \hline 2208 \\ 2208 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 53 \\ 53 \\ \hline 159 \\ 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 47 \\ 47 \\ \hline 281 \\ 281 \\ \hline (16) \\ \hline 2209 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 568 \\ 4 \\ \hline 2032 \\ 24 \\ \hline 2152 \\ 2259 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 98 \\ 98 \\ \hline 64 \\ 32 \\ 32 \\ \hline (16) \\ \hline 2304 \end{array}$$



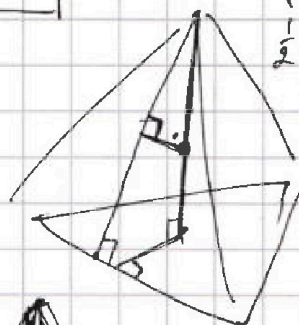
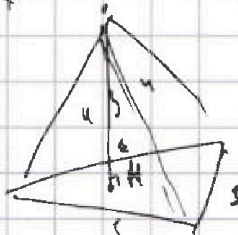
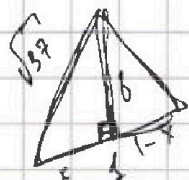
$\frac{1}{2} \cdot h \cdot S = V$

V

$$\begin{array}{r} 6,5 \\ \times 6,5 \\ \hline 325 \\ 30 \\ \hline \times 56 \\ \hline 25 \end{array}$$

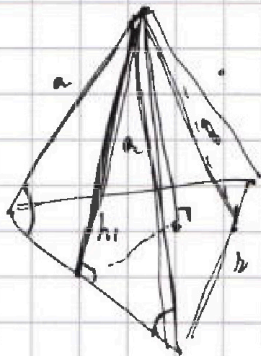
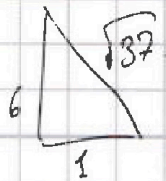
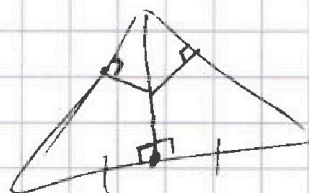
$h_1 \cdot \frac{1}{2} = 4$   
 $h_2 = 8$

$(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}) \cdot 4$



$g^2 = x^2 = 9$

$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-9} = \sqrt{-8}$   
 $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-9} = \sqrt{-8}$   
 $(x+3) - \sqrt{1-x^2} = (x+3) - \sqrt{1-9} = (x+3) - \sqrt{-8}$



$h_1 \cdot \frac{1}{2} = 9$   
 $h_1 = 9 \cdot \frac{1}{2} = 9$   
 $h_1 = 6$

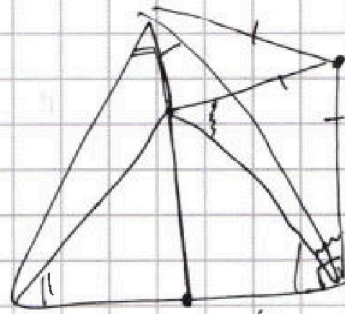
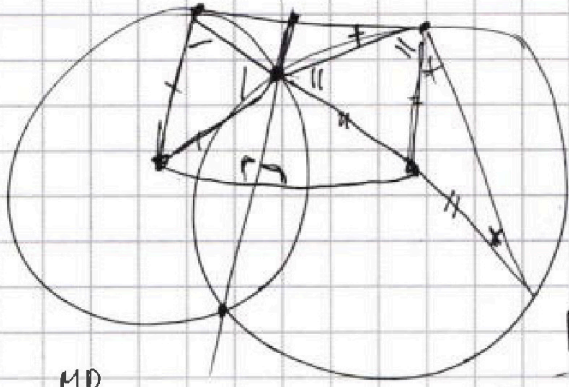


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AM}{MD} = \frac{MD}{MD}$$

$$MD^2 = AM \cdot MD$$

$$AM \parallel DM \parallel MB \quad AD = \frac{DB}{MM}$$

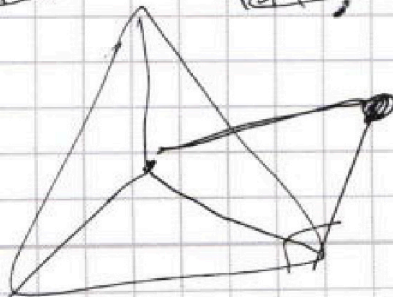
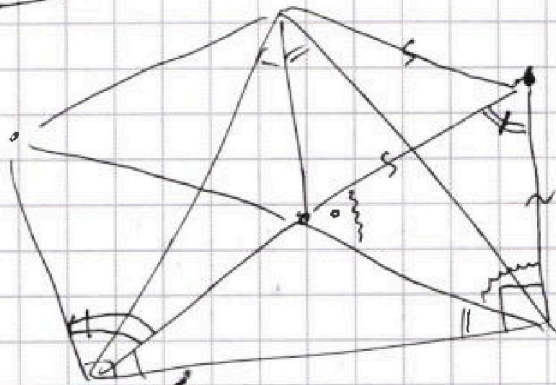
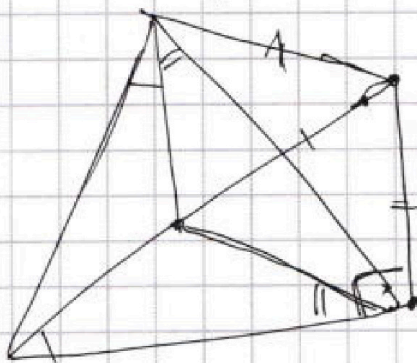
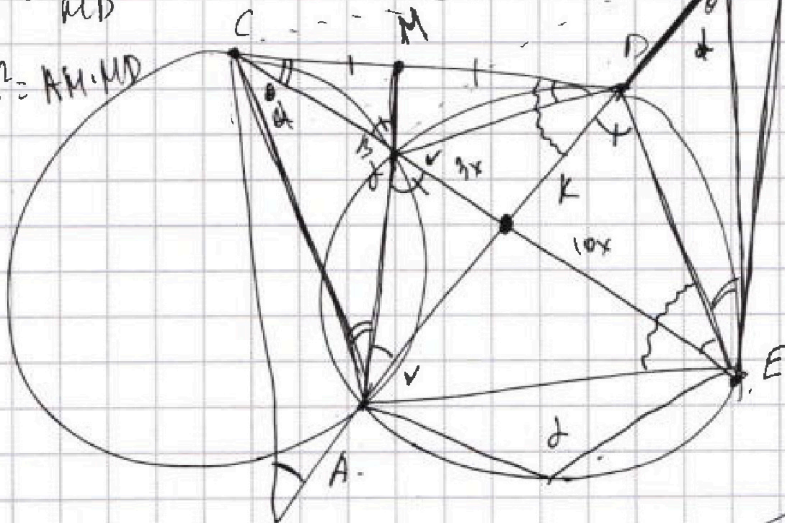
$$\frac{BD}{CD}$$

$$\frac{AM}{AD} = \frac{DM}{MD}$$

$$\frac{CK}{KE} = \frac{5}{10}$$

$$\frac{ED}{CD} = \frac{AM}{DM} = \frac{BD}{PB}$$

$$\frac{ED}{CD} = \frac{BD}{CB}$$



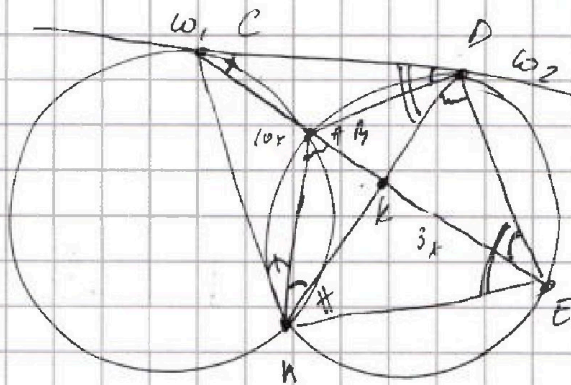


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{ED}{CD} = ?$$

Пусть K - пересек AD и CE  $\Rightarrow$

$$\frac{CK}{KE} = \frac{10}{5} \text{ пусть } CE = 13x$$

$\angle BED = \angle BDC$  (на одной дуге)

$\triangle CKD \sim \triangle CDE$  по 2 углам  $\angle C$  общ и  $\angle BED = \angle BDC \Rightarrow \frac{CD}{CE} = \frac{CK}{CD} \Rightarrow$

$$\Rightarrow CD^2 = CB \cdot CE = 10x \cdot 13x = 130x^2 \Rightarrow CD = \sqrt{130x^2} \quad \frac{CD}{DE} = \frac{CK}{KD}$$

$\angle BAD = \angle BED$  (дуга на одной дуге)  $\angle ABE = \angle ADE$  (дуга на одной дуге)

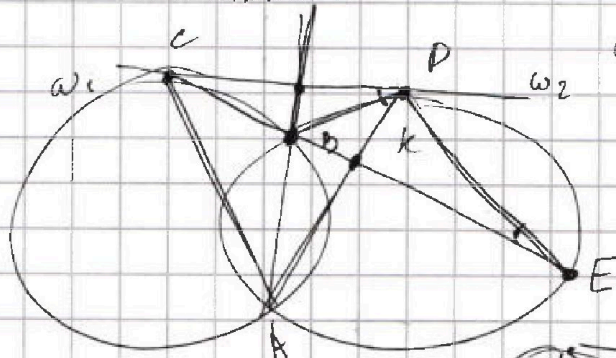
$\Rightarrow \triangle ABK \sim \triangle EDK$  по 2 углам ( $\angle BAD = \angle BED$  и  $\angle ABE = \angle ADE$ )  $\Rightarrow$

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BK}{KE} \Rightarrow DE = \frac{AB \cdot KE}{BK}$$

$\angle CDA = \angle DEA$  (дуга на одной дуге)  ~~$AB \perp CD$  /  $AB \perp$~~

$$\angle ECD (= \angle CAB) + \angle CDA (= \angle CDA) + \angle ADE + \angle DEC (= \angle BAD) = 180^\circ$$

$$\angle DCR + \angle CDA + \angle DAC + \angle CA = 180^\circ \Rightarrow \angle ACK = \angle ADE - \angle CAB \text{ (вспомогательная)}$$



$$\frac{CK}{KE} = \frac{3}{10}$$

