



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её четвёртый член равен

$$\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}, \text{ десятый член равен } x+4, \text{ а двенадцатый член равен } \sqrt{(15x+6)(x-3)}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}, \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $9 : 25$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 150×200 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 820$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 2. Площади её боковых граней равны 5, 5 и 4. Найдите высоту призмы.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть a_i - i -ый член геом. прогрессии, q - множитель, т.е.

$$a_{i+1} = a_i \cdot q. \text{ Тогда } a_4 = \sqrt[3]{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}, a_{10} = x+4, a_{12} = \sqrt[3]{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$$

$$\text{Макже } a_{10} = a_4 \cdot q^6, a_{12} = a_4 \cdot q^8 = a_{10} \cdot q^2.$$

$$\sqrt[3]{(15x+6)(x-3)} = \sqrt[3]{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} \cdot q^8 \quad | : \sqrt[3]{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} \neq 0, \text{ т.е. } x \neq -\frac{6}{15}$$

$$x \neq -\frac{2}{5}.$$

$$q^8 = \sqrt[3]{\frac{(15x+6)(x-3)^4}{(15x+6)}}$$

$$* \text{ Если } x = -\frac{2}{5}, \text{ то } a_4 = 0,$$

$$\text{тогда } a_{10} = a_4 \cdot q^6 = 0 \cdot q^6 = 0.$$

$$q^8 = (x-3)^2$$

$$x+4=0 \Rightarrow x=-4, \text{ но } -4 \neq -\frac{2}{5}.$$

$$q^2 = \sqrt[4]{(x-3)^2}$$

$$q^2 = \sqrt{|x-3|}$$

$$a_{12} = a_{10} \cdot q^2 \Rightarrow \sqrt[3]{(15x+6)(x-3)} = (x+4) \cdot q^2$$

$$\sqrt[3]{(15x+6)(x-3)} = (x+4) \cdot q^2$$

$$\sqrt[3]{(15x+6)(x-3)} = (x+4)^2 \cdot |x-3|$$

Правая часть неотрицательна, поэтому левую можно возвести

$$\text{на } |15x+6| \cdot |x-3| = (x+4)^2 \cdot |x-3| \quad | : |x-3| \neq 0, \text{ т.к. } (x-3)^3 \text{ стоит в знаменателе } \& \text{ числителе.}$$

$$|15x+6| = (x+4)^2$$

$$15x+6 = x^2 + 8x + 16 \quad \text{или} \quad -15x-6 = x^2 + 8x + 16$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$x^2 + 23x + 22 = 0$$

$$(x-2)(x-5) = 0$$

$$(x+22)(x+1) = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x=2 \\ x=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-1 \\ x=-2 \end{cases}$$

Проверим: 1) При $x=2$, $\frac{15x+6}{(x-3)^3} = \frac{36}{-1} = -36 < 0$, но это отрицательное выражение $\Rightarrow x \neq 2$.

$$2) \text{ При } x=5, a_4 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} = \sqrt{\frac{81}{2^3}} = \sqrt{\frac{81}{8}} = \frac{9}{\sqrt{2}}$$

$$a_{10} = x+4 = 9, a_{12} = \sqrt{(15x+6)(x-3)} = \sqrt{81 \cdot 2} = 9\sqrt{2}$$

$$q^2 = \frac{a_{12}}{a_{10}} = \frac{9\sqrt{2}}{9} = \sqrt{2}$$

$$\text{При } q = \sqrt[4]{2}, a_4 = \frac{a_{10}}{q^6} = \frac{9}{(2^{\frac{1}{4}})^6} = \frac{9}{2^{\frac{3}{2}}} = \frac{9}{\sqrt{2}} - \text{верно.}$$

Геом. прогрессия существует: $q = \sqrt[4]{2}, a_4 = \frac{9}{\sqrt{2}}, a_{10} = 9, a_{12} = 9\sqrt{2}$.

$$3) \text{ При } x=-1, a_4 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} = \sqrt{\frac{-9}{(-4)^3}} = \sqrt{\frac{9}{2^6}} = \frac{3}{8}$$

$$a_{10} = x+4 = -1+4 = 3$$

$$a_{12} = \sqrt{(15x+6)(x-3)} = \sqrt{-9(-4)} = \sqrt{36} = 6$$

$$q^2 = \frac{a_{12}}{a_{10}} = \frac{6}{3} = 2. \text{ При } q = \sqrt{2}, a_{12} = q^2 \cdot a_{10} = 2a_{10},$$

$$a_4 = \frac{3}{8} = \frac{a_{10}}{2^3} = \frac{a_{10}}{q^6} - \text{верно.}$$

Значит, геом. прогрессия существует.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{При } x = -22, \quad a_4 = \sqrt[3]{\frac{-22 \cdot 15 + 6}{(-25)^3}} = \sqrt[3]{\frac{3(-22 \cdot 5 + 2)}{-5^6}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 108}{5^6}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 3 \cdot 36}{5 \cdot 5 \cdot 5^6}} = \frac{3 \cdot 6}{5 \cdot 5 \cdot 5^4} = \frac{18}{125}$$

$$a_{10} = x + 4 = -18.$$

$$a_{12} = \sqrt{(-22 \cdot 15 + 6) \cdot (x - 3)} = \sqrt{3 \cdot 108 \cdot 25} = \sqrt{9 \cdot 36 \cdot 25} = 3 \cdot 6 \cdot 5 = 90$$

$$q^2 = \frac{a_{12}}{a_{10}} = \frac{90}{-18} = -5 < 0, \text{ но квадрат}$$

не отрицателен $\Rightarrow x \neq -22$.

Ответ: при $x = 5$ и $x = -1$ существуют геом. прогрессии.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+7} + 6 = \sqrt{5-x-3z} + \sqrt{4-y-2x-x^2+z}$$

$$x+7+36+12\sqrt{x+7} = 5-x-3z + 4\sqrt{4-y-2x-x^2+z} + 4\sqrt{5-x-3z}\sqrt{4-y-2x-x^2+z}$$

$$\sqrt{x+7} + 6 \geq \sqrt{5-x-3z}$$

$$x+7+36+12\sqrt{x+7} \geq 5-x-3z \geq 0$$

$$12\sqrt{x+7} \geq -2x-3z+5-43$$

$$12\sqrt{x+7} \geq -2x-3z-38$$

$$\cos 3x + 6\cos x = 3\cos 2x + p$$

$$\cos 3x = \cos(\lambda x + x) = \cos \lambda x \cos x - \sin \lambda x \sin x =$$

$$= (2\cos^2 x - 1)\cos x - \lambda \sin x \cos x \sin x = 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x(1 - \cos^2 x) =$$

$$= 2\cos^3 x - 3\cos x + 2\cos^3 x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$$4t^3 - 3t + 6t = 3(2t^2 - 1) + p$$

$$4t^3 + 3t = 6t^2 - 3 + p$$

$$4t^3 - 6t^2 + 3t + 3 - p = 0$$

$$-1 \leq t \leq 1$$

$$4\cos^3 x - 6\cos^2 x + 3\cos x + 3 - p = 0$$

$$4\cos^3 x - 3\cos 2x + 3\cos x - p = 0$$

$$\cos x(4\cos^2 x + 3) - p - 3\cos 2x = 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x \geq -7 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq 3z + x & (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - 2x - x^2 + z \geq 0 & (5) \end{cases}$$

$$(5): y + z - (x+1)^2 + 1 \geq 0$$

$$y + z + 1 \geq (x+1)^2$$

$$\text{Из (3) и (4): } y \geq 3z + x \geq 3z - 7$$

$$1z \geq 3z$$

$$4 \geq z$$

$$\text{Из (5): } y + z + 1 \geq (x+1)^2$$

$$y + 4 + 1 \geq y + z + 1 \geq (x+1)^2$$

$$y + 5 \geq (x+1)^2$$

$$y \geq (x+1)^2 - 5 \geq -5$$

$$225 - z^2 \geq 0$$

$$225 \geq z^2$$

$$-15 \leq z \leq 15 \Rightarrow -5 \leq z \leq 4.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

Воспользуемся формулами: $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$ и

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1.$$

$$4 \cos^3 x - 3 \cos x + 6 \cos x = 6 \cos^2 x - 3 + p$$

Пусть $t = \cos x$, $-1 \leq t \leq 1$, $x = \pm \arccos(t) + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

$$4t^3 + 3t = 6t^2 - 3 + p$$

$$4t^3 - 6t^2 + 3t + 3 - p = 0 \quad | \cdot 2 \neq 0$$

$$8t^3 - 12t^2 + 6t + 6 - 2p = 0$$

$$(2t)^3 + 3 \cdot 4t^2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2t \cdot (-1)^2 + (-1)^3 + 7 - 2p = 0$$

$$(2t-1)^3 = 2p-7$$

$$2t-1 = \sqrt[3]{2p-7}$$

$$t = \frac{\sqrt[3]{2p-7} + 1}{2}$$

$$-1 \leq \frac{\sqrt[3]{2p-7} + 1}{2} \leq 1$$

$$-2 \leq \sqrt[3]{2p-7} + 1 \leq 2$$

$$-3 \leq \sqrt[3]{2p-7} \leq 1$$

$$-27 \leq 2p-7 \leq 1$$

$$-20 \leq 2p \leq 8$$

$$-10 \leq p \leq 4$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Уравнение имеет хотя бы 1 решение при $p \in [-10; 4]$.

$$\text{При } p = -10, x = \pm \arccos\left(\frac{\sqrt[3]{-27} + 1}{2}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm \arccos(-1) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{При } p = 3, x = \pm \arccos(0) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

$$x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{При } p = 4, x = \pm \arccos(\pm 1) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = 0 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: при $p \in (-\infty; -10) \cup (4; +\infty)$ решений нет.

$$\text{при } p = -10, x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{при } p = 3, x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{при } p = 4, x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{при } p \in (10; 3) \cup (3; 4), x = \pm \arccos\left(\frac{\sqrt[3]{2p-2} + 1}{2}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

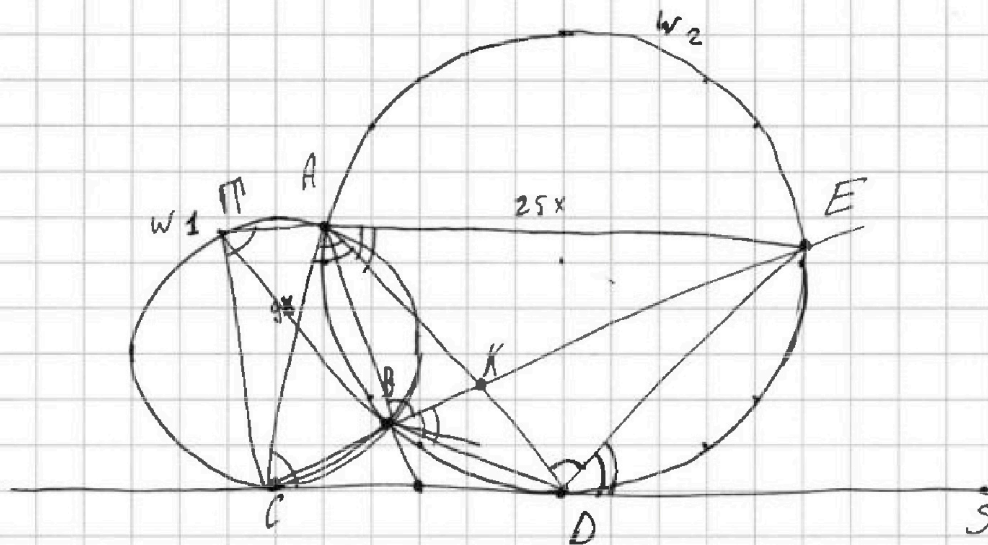


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть $AD \cap CE = K$, $\frac{CK}{KE} = \frac{9}{25}$.

$ABDE$ - вписанный, $\angle ABE = \angle ADE$ (опираются на AE).

$\angle EAD = \angle EDS$, т.к. угол между касательной DS и хордой DE равен углу, опирающемуся на DE .

$\angle EAD = \angle EBD$ из вписанности.

и $AT \parallel AE$

Пусть T' - точка на дуге AC , не содержащей B , тогда

$\angle AT'C = \angle ABE$, т.к. $CT'AB$ - вписанный.

$\angle ACD = \angle CT'A$, как угол между касательной и хордой AC .

$\angle ADS$ - внешний для $\triangle ACD \Rightarrow \angle CAD = \angle ADS - \angle ACD =$
 $= \angle ADE + \angle EDS - \angle ACD = \angle EDS = \angle EAD \Rightarrow AD$ - биссектриса

$\angle CAE$, по её свойству, $\frac{AC}{AE} = \frac{AK}{KE} = \frac{9}{25}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~*5 Чтобы посчитать кол-во способов с центральной симметрией, посчитаем кол-во способов выбрать~~
Посчитаем кол-во способов выбрать 4 клетки из

$$\frac{150 \cdot 200}{2} \text{ клеток. Это: } \frac{15000 \cdot (15000-1)(15000-2)(15000-3)}{4!} = A.$$

Заметим, что $150 : 2$ и $200 : 2 \Rightarrow$ "средняя линия" проходит по линиям сетки, не пересекая клетки, а центр прямоугольника - вершина каких-то клеток. Прямая, содержащая две клетки, два центра двух симметричных относительно центра прямоугольника клеток, проходит через центр прямоугольника. А прямая, содержащая центры ^{двух} клеток, симметричных относительно "средней линии", перпендикулярна этой средней линии. ~~т.е.~~ Прямая перпендикулярная средней линии и содержащая центр прямоугольника, проходит по линиям сетки, значит, две клетки не могут быть одновременно симметричны относительно центра и относительно средней линии. А также две клетки, симметричные относительно центра лежат по разные стороны от средней линии.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Есть A способов выбрать 4 клетки с одной стороны откосит. Выходящей средней линии. Если каждой клетке найти симметр. откос. Выходящей ср. лин., то будет раскраска и если найти симметр. откос. центра будет раскраска.

Но есть будет $2A$ раскрасок.

Для 4 точек с одной стороны откосит. меньшей ср. лин. аналогично будет $2A$ раскрасок.

Среди этих $4A$ раскрасок мы посчитали все возможные и некоторые не \pm раз. Т.к. в каждой подводящей раскраске из-за симметрии откос. каждой ср. лин. по 4 клетки с обеих сторон. Заметим, что если раскраска симметрична откос. обеих ср. лин., то она симметр. откос. центра, т.е. $2A$ если раскраска симметр. откос. центра и какой-то ср. лин., то она симметрична и откос. второй ср. линии. Значит, мы посчитали такие раскраски по $\frac{4}{2}$ раза, т.к. их можно получить 4 разными способами. Посчитаем кол-во таких раскрасок. Заметим, что в каждой четверти, образованной 2 ср. лин. будет по $\frac{8}{4} = 2$ клетки из-за



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

симметр. отнес. ср. мин. Тогда число способов =
число способов выбрать 2 кл. из четверки:

$$\frac{150 \cdot 200}{4} \cdot \frac{(150 \cdot 200 - 4)}{4} = B.$$

2!

Тогда всего способов: $4A - 3B$, учитывая все поправки
по 1 разу.

$$4A - 3B = \frac{15000(14999)(14998)(14997)}{6} - \frac{3 \cdot 7500(7499)}{2} =$$
$$= 2500 \cdot 14999 \cdot 14998 \cdot 14997 - 11250 \cdot 7499$$

Ответ: ↗



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a + b^2 = 820 \Rightarrow a = 820 - b^2$$

$$a > b \Leftrightarrow 820 - b^2 > b$$

$$b^2 + b - 820 < 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 820 = 1 + 3280 = 3281$$

$$\frac{-1 - \sqrt{3281}}{2} < b < \frac{-1 + \sqrt{3281}}{2}$$

$$(a-c)(b-c) = p^2, \text{ где } p - \text{ простое число.}$$

$$a, b, c - \text{ целые, значит, } \begin{cases} a-c = \pm 1 \\ b-c = \pm p^2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a-c = \pm p \\ b-c = \pm p \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a-c = \pm p^2 \\ b-c = \pm 1 \end{cases}$$

1) Если $\begin{cases} a-c = 1 \\ b-c = p^2 \end{cases}$ $\begin{cases} a = c+1 \\ b = c+p^2 \end{cases}$ По уш. $a > b \Rightarrow c+1 > c+p^2$
 $1 > p^2$, что невозможно, т.к. $p \geq 2$, потому что p - простое.

$$a = 820 - b^2 \Rightarrow c+1 = 820 - (c+p^2)^2$$

$$c+1 = 820 - c^2 - 2cp^2 - p^4$$

$$c^2 + c(1+2p^2) + p^4 - 819 = 0$$

$$a-b = c+1 - c - p^2 = 1-p^2$$

$a-b \div 3$ по условию. Если $p \neq 3$, то $p^2 \equiv 1 \pmod{3}$, т.к.

Если $p=3$, то $a=c+1$
 $b=c+$

$$\begin{array}{r} 1^2 \equiv 1 \\ 2^2 \equiv 1 \\ 3 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2) \text{ Имеем } \begin{cases} a-c=-1 \\ b-c=-p^2 \end{cases} \begin{cases} a=c-1 \\ b=c-p^2 \end{cases}$$

$$a-b = c-1-c+p^2 = p^2-1.$$

$$\text{Имеем } p \neq 3, \text{ то } p^2 \equiv 1 \pmod{3} \quad \left(1^2 \equiv 1, 2^2 \equiv 1\right).$$

$$\text{Но } a-b \not\equiv 3, \text{ т.е. } p^2-1 \not\equiv 3, \text{ тогда } p \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow p=3, \\ \text{т.к. } p \text{ - простое.}$$

$$\text{Имеем: } \begin{cases} b=c-9 \\ a=c-1 \\ a-c=-1 \\ b-c=-9 \end{cases}$$

$$a+b=820$$

$$c-1+(c-9)^2=820$$

$$c-1+c^2-18c+81=820$$

$$c^2-17c+80-820=0$$

$$c^2-17c-740=0$$

$$D=17^2+4 \cdot 740=289+2960=3249=57^2$$

$$c = \frac{17 \pm 57}{2}$$

$$c = \frac{74}{2} = 37 \quad \text{или} \quad c = \frac{-40}{2} = -20$$

$$\begin{cases} a=36 \\ b=28 \\ c=37 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=-21 \\ b=-29 \\ c=-20 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Проверим: } 36 > 28 \checkmark$$

$$-21 > -29 \checkmark$$

$$36 - 28 = 8 \div 3 \checkmark$$

$$-21 + 29 = 8 \div 3 \checkmark$$

$$(36 - 37)(28 - 37) = 3^2 \checkmark$$

$$(-21 + 20)(-29 + 20) = 3^2 \checkmark$$

$$36 + 28^2 = 820$$

$$-21 + (-29)^2 = 820$$

$$36 + 784 = 820 \checkmark$$

$$-21 + 841 = 820 \checkmark$$

$$3) \text{ Если } \begin{cases} a - c = p \\ b - c = p \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a - c = -p \\ b - c = -p \end{cases}$$

$$\text{то: } a - c = b - c$$

$$a = b$$

$a \neq b$ тогда $a - b = 0 \div 3$ - противоречие.

$$4) \text{ Если } \begin{cases} a - c = p^2 \\ b - c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = p^2 + c \\ b = c + 1 \end{cases}$$

$$a - b = p^2 + c - c - 1 = p^2 - 1 \div 3, \text{ значит, } p \equiv 0 \pmod{3} \text{ (аналогично на в. 2)}$$

$$p = 3.$$

$$\begin{cases} a = 9 + c \\ b = c + 1 \end{cases}$$

$$a + b^2 = 820 \Rightarrow 9 + c + c^2 + 2c + 1 = 820$$

$$c^2 + 3c - 810 = 0$$

$$D = 9 + 4 \cdot 810 = 9 + 3240 = 3249 = 57^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
4 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$c = \frac{-3 \pm 57}{2}$$

$$\begin{cases} c = -30 \\ a = -21 \\ b = -29 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} c = 17 \\ a = 36 \\ b = 18 \end{cases}$$

$$5) \text{ Если } \begin{cases} a - c = -p^2 \\ b - c = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = c - p^2 \\ b = c - 1 \end{cases}$$

$$a > b \Rightarrow c - p^2 > c - 1$$

$$-p^2 > -1$$

$$p^2 < 1, \text{ но } p - \text{ простое} \Rightarrow p \geq 2, \text{ а } p^2 \geq 4 > 1.$$

Значит, всего 4 решения.

$$\text{Ответ: } a = 36, b = 18, c = 17;$$

$$a = -21, b = -29, c = -20;$$

$$a = -21, b = -29, c = -30;$$

$$a = 36, b = 18, c = 17.$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-xz^2+z} \quad (1)$$

$$|y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2} \quad (2)$$

(2): Если $y \in (-\infty; 20]$, то:

$$20-y + 2(35-y) = \sqrt{225-z^2}$$

$$90-3y = \sqrt{225-z^2}$$

$$9y^2 - 540y + 8100 = 225 - z^2$$

$$(90-3y)^2 + z^2 = 225$$

$$z^2 = 225 - (90-3y)^2$$

Если $y \in [20; 35]$, то:

$$y-20 + 2(35-y) = \sqrt{225-z^2}$$

$$50-y = \sqrt{225-z^2}$$

$$y^2 - 100y + 2500 = 225 - z^2$$

$$z^2 = 225 - (y-50)^2$$

Если $y \in [35; +\infty)$, то:

$$3y - 90 = \sqrt{225-z^2}$$

$$z^2 = 225 - (3y-90)^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4t^3 - 6t^2 + 3t + 3 - p = 0$$

$$-1 \leq t \leq 1$$

~~$$4t^3$$~~

$$8t^3 - 12t^2 + 6t + 6 - 2p = 0$$

$$(2t)^3 + 3 \cdot 4t \cdot (-1) + 3 \cdot 2t \cdot (-1)^2 + (-1)^3 + 7 - 2p = 0$$

$$(2t-1)^3 = 2p - 7$$

$$2t-1 = \sqrt[3]{2p-7}$$

$$t = \frac{\sqrt[3]{2p-7} + 1}{2}$$

$$-1 \leq \frac{\sqrt[3]{2p-7} + 1}{2} \leq 1$$

$$-2 \leq \sqrt[3]{2p-7} + 1 \leq 2$$

$$-3 \leq \sqrt[3]{2p-7} \leq 1$$

$$-27 \leq 2p-7 \leq 1$$

$$-20 \leq 2p \leq 8$$

$$-10 \leq p \leq 4$$

$$\sqrt[3]{4} = 2^{\frac{2}{3}} \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$-3 \cdot t^2 \cdot 2^{\frac{4}{3}} \cdot 2^{-\frac{1}{3}}$$

$$+ 3 \cdot t \cdot 2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{2}$$

~~$$a > b$$~~

$$a > b$$

$$a^3 > b^3$$

$$x = \arccos\left(\frac{\sqrt[3]{2p-7} + 1}{2}\right)$$

~~$$p = 3,5$$~~

$$p = 4$$

$$x = \arccos 1 = 2\sqrt{\pi}, n \in \mathbb{Z}$$

$$p = 3$$

$$x = \arccos 0 = \frac{\pi}{2} + k\pi, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm \arccos$$

$$p = -10, x = \arccos(-1) = \sqrt{\pi} + k\pi, n \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$AC = 9$
 $AE = 25$
 $CK = 9$
 $KE = 25$
 $ED = ?$
 $DC = ?$

$18 + 18 = 36$
 $36 + 188 = 224$
 $224 + 58 = 284$

$29 + 29 = 58$
 $58 + 261 = 319$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a > b$$

$$820 - 80 = 800 - 60$$

$$820 - b^2 - c = 1$$

$$a - b \times 3$$

$$\begin{array}{r} 240 \overline{) 12} \\ - 68 \quad \overline{) 43} \\ \hline 260 \end{array}$$

$$(a-c)(b-c) = p$$

$$a+b^2 = 820$$

$$a = 820 - b^2$$

$$820 - b^2 > b$$

$$820 - b^2 - b \div 3$$

$$(a-c)(b-c) = (820 - b^2 - c)(b-c) = p^2$$

$$67+7$$

$$\begin{array}{r} \pm p^2 \quad \pm s \\ \pm p \quad \pm p \\ \pm 1 \quad \pm p \end{array}$$

$$b^2 + b - 820 < 0$$

$$820 = 10 \times 82 = 20 \cdot 41$$

$$D = 1 + 4 \cdot 820 = 1 + 3280 = 3281 =$$

$$= 41^2$$

$$b_{1,2} = \frac{-1 \pm 41}{2} = \begin{bmatrix} -21 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ \times 3750 \\ \hline 11250 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 51 \\ \times 51 \\ \hline 2601 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 255 \\ \times 10 \\ \hline 2550 \end{array}$$

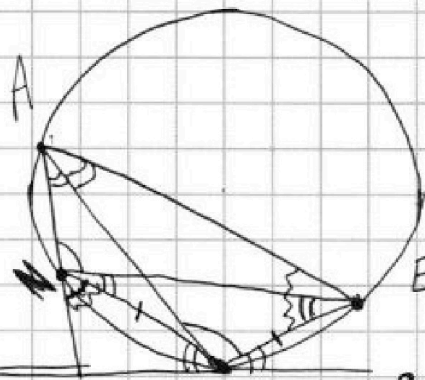
$$bc(-21; 20)$$

$$\begin{array}{r} 51 \\ \times 51 \\ \hline 2601 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ \times 157 \\ \hline 3297 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1200 \\ \times 281 \\ \hline 33600 \end{array}$$

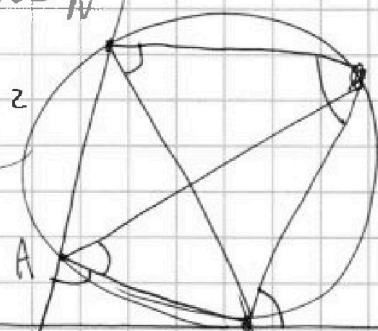
$$\begin{array}{r} 2500 \overline{) 3750} \\ - 5000 \\ \hline 1250 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 59 \\ \times 59 \\ \hline 295 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 295 \\ \times 12 \\ \hline 3480 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3249 \overline{) 9} \\ - 27 \quad \overline{) 361} \\ \hline -54 \quad \overline{) 9} \end{array}$$



$$\begin{array}{l} b^2 - b + 1 \div 3 \\ (b - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + 1 \div 3 \\ (b - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \div 3 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 41 \\ \times 41 \\ \hline 1681 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

симметр. относ. ср. линии. Тогда таких способов равно
или способов выбрать 2 клетки из четверти, т.е.

$$\frac{150 \cdot 200}{4} \cdot \frac{(150 \cdot 200 - 1)}{2!} = \frac{75000(75000-1)}{2} = B$$

Из всех способов (4A) вычтем 3B, чтобы посчитать
все по 1 разу. Тогда всего распраски: $4A - 3B =$

$$= \frac{15000(15000-1)(15000-2)(15000-3)}{6} - \frac{3 \cdot 75000(75000-1)}{2} =$$

$$= 2500 \cdot 14999 \cdot 14998 \cdot 14997 - 11250(7499) =$$

$$= 2500 \cdot 14999 \cdot 14998 \cdot 14997 - 11250 \cdot 7499$$

Ответ: \nearrow