



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен

$$\sqrt{(25x - 9)(x - 6)}, \text{ девятый член равен } x + 3, \text{ а пятнадцатый член равен } \sqrt{\frac{25x - 9}{(x - 6)^3}}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z}, \\ |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $2 : 5$ , считая от вершины  $C$ .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $100 \times 400$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:

- $a < b$ ,
- число  $b - a$  не кратно 3,
- число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство  $a^2 + b = 710$ .

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 1. Площади её боковых граней равны 3, 3 и 2. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть  $d$  - шаг профессии  
Тогда

$$\sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} = d^6 \cdot \sqrt{(25x-9)(x-6)}$$

$$d^6 = \sqrt{\frac{1}{(x-6)^4}}$$

1)  $x-6 > 0 \Rightarrow 25x-9 > 0$

$$d = \sqrt[4]{\frac{1}{x-6}}$$

Тогда  $\sqrt{(25x-9)(x-6)} \cdot d^6 = x+3$

$$\sqrt{25x-9} = x+3$$

$$25x-9 = x^2 + 6x + 9$$

$$x^2 - 19x + 18 = 0$$

$$x = 1 \quad x = 18$$

Т.к.  $x-6 > 0$  :  $x = 18$ .

2)  $x-6 < 0 \Rightarrow 25x-9 < 0 \Rightarrow$   
 $x < \frac{25}{9}$

Тогда  $d = \sqrt[4]{\frac{1}{6-x}}$

Аналогично к. 1

$$\sqrt{-(25x-9)} = x+3 \quad x > -3$$

$$-25x+9 = x^2 + 6x + 9$$

$$x^2 + 31x = 0$$

$$x = 0 \quad x = -31, \text{ т.к. } x > -3$$

$$x = 0$$

Ответ:  $x_1 = 18 \quad x_2 = 0$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$z^2$

$$|y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2}$$

$$81-z^2 \leq 81 \Rightarrow \sqrt{81-z^2} \leq 9$$

1)  $y \geq 5$

$$y+4+4y-20 = 5y-16 > 25-16 > 9 \geq \sqrt{81-z^2}$$

2)  $y = 5$

$$y+4+4y-20 = 9 \geq \sqrt{81-z^2}$$

3)  $-4 < y < 5$

$$y+4-4y+20 = 24-3y > 24-15 > 9 \geq \sqrt{81-z^2}$$

4)  $y \leq -4$

$$-y-4-4y+20 = 16-5y \geq 36 > 9 \geq \sqrt{81-z^2}$$

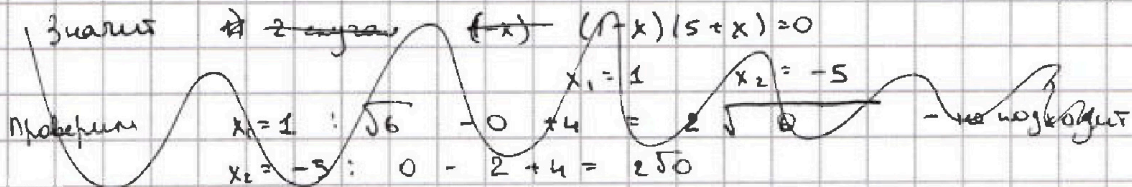
Значит вариантов только 1  $y = 5 \Rightarrow \sqrt{81-z^2} = 9 \quad z = 0$

Имеем  $\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 4 = 2\sqrt{5-4x-x^2}$

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 4 = 2\sqrt{(x-1)(5+x)}$$

$$-(x-1)(5+x) \geq 0 \Rightarrow (1-x)(5+x) \geq 0, \text{ или } \exists \text{ ТОМ } x+5 \geq 0 \text{ и } 1-x \geq 0$$

$(\sqrt{1-x} \text{ и } \sqrt{x+5})$



При  $x \in [-5; 1]$  имеем:  $\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 4 = 2\sqrt{(x+5)(1-x)}$  и  
 $\sqrt{1-x} \leq \sqrt{4} = 2 \Rightarrow \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 4 > 0$

Введем обе части в квадрат:  $x+5+1-x+16+2(4\sqrt{x+5}-4\sqrt{1-x}-\sqrt{(x+5)(1-x)}) =$

= Имеем:

$$\begin{aligned} \sqrt{x+5} + 4 &= 2\sqrt{(x+5)(1-x)} + \sqrt{1-x} \\ x+5 + 8\sqrt{x+5} + 16 &= 4(x+5)(1-x) + 4(1-x)\sqrt{x+5} + 1-x \\ x+5 + 8\sqrt{x+5} + 16 &= 20 - 16x - 4x^2 + 4\sqrt{x+5} - 4\sqrt{x+5} + 1-x \\ 2x + 4\sqrt{x+5} &= -16x - 4x^2 - 4x\sqrt{x+5} \\ 18x + 4x^2 &= -4\sqrt{x+5} - 4x\sqrt{x+5} \\ 18x + 4x^2 &= -4\sqrt{x+5}(-1-x) \\ 18x + 4x^2 &= -4\sqrt{x+5}(x+1) \\ 9x + 2x^2 &= -2\sqrt{x+5}(x+1) \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$$3x + 2x^2 = -2\sqrt{x+5}(x+1)$$~~

~~$$4x^4 + 36x^3 + 81x^2 = 2(x+5)(x^2 + 2x + 1)$$~~

~~$$4x^4 + 36x^3 + 81x^2 = 2(x^3 + 2x^2 + x + 5x^2 + 10x + 5)$$~~

~~$$4x^4 + 36x^3 + 81x^2 = 2x^3 + 4x^2 + 2x + 10x^2 + 20x + 10$$~~

~~$$4x^4 + 34x^3 + 67x^2 - 22x - 10 = 0$$~~

Пусть  $x+5 = t$   
 $t \in [0; 6]$

Умножим:  $\sqrt{t} + \sqrt{6-t} + 4 = 2\sqrt{t(6-t)}$

$\sqrt{t} - \sqrt{6-t} + 4$  возрастает при  $t \in [0; 6]$ , а  $2\sqrt{t(6-t)}$  — убывает.  
Значит  $\sqrt{t} - \sqrt{6-t} \leq 6$  и  $\sqrt{t} - \sqrt{6-t} \leq 2$

$$\sqrt{t} + 4 = 2\sqrt{t(6-t)} + \sqrt{6-t}$$

$$t + 8\sqrt{t} + 16 = 4t(6-t) + 4(6-t)\sqrt{t} + 6-t$$

~~$$(t+4)^2 = 4(6-t)(t+\sqrt{t})$$~~

~~$$2t + 8\sqrt{t} + 10 = 4(6-t)(t+\sqrt{t})$$~~

~~$$t + 2\sqrt{t} + 5 = (12-t)(t+\sqrt{t})$$~~

~~$$t + 2\sqrt{t} + 5 = 12t + 12\sqrt{t} - 2t^2 - 2\sqrt{t} +$$~~

~~$$5 = 11t + 8\sqrt{t} - 2t^2 - 2\sqrt{t}$$~~

~~$$2t^2 + 2\sqrt{t} - 11t - 8\sqrt{t} + 5 = 0$$~~

$$2t + 8\sqrt{t} + 10 = 24t - 4t^2 + 24\sqrt{t} - 4\sqrt{t}$$

$$t + 4\sqrt{t} + 5 = 12t - 2t^2 + 12\sqrt{t} - 2\sqrt{t}$$

$$2t^2 + 24\sqrt{t} - 11t - 8\sqrt{t} + 5 = 0$$

Пусть  $\sqrt{t} = a$ ,  $a \geq 0$ ,  $a \in [0; \sqrt{6}]$

$$2a^4 + 2a^3 - 11a^2 - 8a + 5 = 0$$

↑ непрерывна

при  $a = 0$   $2a^4 + 2a^3 - 11a^2 - 8a + 5 > 0$

при  $a = 1$   $2a^4 + 2a^3 - 11a^2 - 8a + 5 < 0$  ( $4 - 19 < 5$ )

Значит

корень есть

на промежутке  $a \in (0; 1)$

$$t \in (0; 1)$$

$$x+5 \in (0; 1)$$

$$x \in (-5; -4)$$

Ответ:  $x$   $y=5$   $z=0$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

7.к  $x \in [-1; 1]$   $p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt[p-1]{1+x}}$$

или  $p \in (-\infty; -7]$   $\cos x < 0$   
или  $p \in [1; +\infty)$   $\cos x > 0$

$$x = \pm \arccos \frac{1}{\sqrt[p-1]{1+x}} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ:  $p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$  или  $p \in (-\infty; -7]$ :

$$x = \arccos \frac{1}{\sqrt[p-1]{1+x}} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

или  $p \in [1; +\infty)$   $x = \arccos \frac{1}{\sqrt[p-1]{1+x}} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

или  $p \in \mathbb{Z} \cdot (-7; 1)$  решение нет



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{3}$

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

$$p(4 \cos^3 x - 3 \cos x) + 3p \cos x + 12 \cos x = 6(2 \cos^2 x - 1) + 10$$

$$4p \cos^3 x + 12 \cos x = 12 \cos^2 x + 4$$

$$4p \cos^3 x - 4 = 12 \cos^2 x - 12 \cos x$$

$$4(p \cos^3 x - 1) = 12 \cos x (\cos x + 1)$$

$$p \cos^3 x - 1 = 3(\cos^2 x - \cos x)$$

или  $\cos^2 x - \cos x = t \quad t \in [-1; 1]$

или  $p \cdot t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = 0$

$$(t-1)^3 + t^3(p-1) = 0$$

$$t^3(p-1) = (1-t)^3$$

$$t \sqrt[3]{p-1} = 1-t$$

$$t = \frac{1-t}{1+t \sqrt[3]{p-1} + 1} = 1$$

$$t = \frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1} \quad p \neq 0$$

или  $p \geq 1 \quad \frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1} \leq \frac{1}{1} \quad \sim \quad \frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1} > 0$

или  $p \in (0; 1): \quad \sqrt[3]{p-1} \in (-1; 0) \Rightarrow 1 + \sqrt[3]{p-1} \in (0; 1) \Rightarrow$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1} > 1$$

или  $p \in (-7; 0): -2 < \sqrt[3]{p-1} < 0 \quad -1 < 1 + \sqrt[3]{p-1} < 1 \Rightarrow \left| \frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1} \right| > 1$

$p \in (-\infty; -7]: \sqrt[3]{p-1} < -2 \quad 1 + \sqrt[3]{p-1} < -1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1} \geq -1$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

а) Если симметрична по каким-то 2-м параметрам из 3 одновременно, то и по 3-му тоже).

б) Если симметрична по всем параметрам, ср. линиям и центр. клетке, то в каждой четверти по 2 клетки

и где 2х клеток из 2х частей любых 2х клеток из одной четверти однозначно строится множество.

Подсчитаем для 2х клеток из 1 Тогда кол-во способов:  $C_{10.000}^2$  (достаточно посчитать для пары клеток из 1 четверти).

Эти варианты посчитаны трижды, а должны 4 раз. Значит имеем

Всего вариантов:  $6 \cdot C_{10.000}^4 + 3(2 \cdot C_{10.000}^1 \cdot C_{10.000}^3 + (C_{10.000}^2)^2) -$

$$- 2 \cdot C_{10.000}^2 = 6 \cdot C_{10.000}^4 + 6 \cdot C_{10.000}^1 \cdot C_{10.000}^3 + 3(C_{10.000}^2)^2 - 2 \cdot C_{10.000}^2$$

$$\approx 6 \cdot C_{10.000}^4 + 6 \cdot C_{10.000}^1 \cdot C_{10.000}^3 + 3(C_{10.000}^2)^2 =$$

$3 \cdot C_{20.000}^4$ , т.к. это все варианты выбора 4 клеток из 2х четвертей (  $2 \cdot C_{10.000}^4 \leftarrow 4$  из 16 кв.  $2 \cdot C_{10.000}^1 \cdot C_{10.000}^3 \leftarrow 1$  и  $3 \cdot (C_{10.000}^2)^2 \leftarrow$  по 2.

Тогда получаем ответ  $3 \cdot C_{20.000}^4 - 2 \cdot C_{10.000}^2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 5



Пусть есть 4 четверти (полученные разрезанием по средним линиям) каждая: прямоугольник  $50 \times 200$

Заметим, что для клеток в одной четверти ~~любая~~ пара симметричных клеток находится в разных четвертях (симметричных относит. центра или ср. линии)

Возьмем любую клетку I четверти. Она может быть в множестве с одной из 3х симметрий

1) Относительно

Найдем кол-во способов выбрать множество с центральной симметрией

Заметим, что клетки одного целого множества могут лежать в 2х или 4х различных четвертях.

1) Пусть клетки множества лежат в 2х разл. четвертях.

Тогда для каждой пары в каждой из этих четвертей ровно 4 точки клетки. Рассмотрим для I четверти:

Способов выбрать 4 клетки  $C_{10000}^4$ , и есть 3 варианта, в какую четверть эти клетки опустить. То есть всего

3 ·  $C_{10000}^4$  вариантов. Так для каждой четверти

всего  $4 \cdot 3 \cdot C_{10000}^4$  вариантов, но каждой почитаем

дважды (из I в IV и из IV в I) ⇒ всего вариантов

$$6 \cdot C_{10000}^4$$

Если клетки лежат во всех 4х четвертях. Допустим, симметрично относительно горизонт. ср. линии. Тогда надо выбрать по 2 точки в I и II четверти ⇒ вариантов

$$2 \cdot C_{10000}^2 \cdot C_{10000}^2 + C_{10000}^1 \cdot C_{10000}^1 \quad (по 2 или 1 и 3) \quad (\text{клетки в I и IV})$$

Аналогично с симметрией относит. вертик. ср. линии, и

с симметрией относительно центральной точки.

Но, часть вариантов, полученных отражением относительно есть вариант, когда симметрия одновременно по нескольким всем 3м параметрам (по обеим ср. линиям и по центральной точке)





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) Если  $c < a < b$  :  $(a-c)(b-c) = p^2$  и  $a-c > 0$  и  $b-c > 0$

Также  $(a-c) \in \mathbb{N}$  и  $(b-c) \in \mathbb{N}$  т.к.  $p$  - простое и

$(b-c) > (a-c)$   $(b-c) = p^2$   $a-c = 1$

$(b-c) - (a-c) = p^2 - 1$

$b-a = p^2 - 1$  Заметим, что  $p^2 \equiv 1 \pmod{3}$   
или  $p^2 \equiv 0 \pmod{3}$

значит  $p^2 - 1 \equiv 0 \pmod{3}$  или  $p = 3$

т.к.  $(b-a) \not\equiv 3$   $p = 3$  Тогда  $b = a + 8$

$a^2 + b = 710 \Rightarrow a^2 + a + 8 = 710$

$a^2 + a + 702 = 0$

$a_1 = 26$   $a_2 = -27$   
 $b_1 = 34$   $b_2 = -19$   
 $c_1 = 25$   $c_2 = -28$

2) Если  $a < c < b$ , то  $(a-c)(b-c) < 0$ , но  $(a-c)(b-c) = p^2 > 0$   
Невозможно

3) Если  $a < b < c$ , то  $(a-c) < 0$  и  $(b-c) < 0$  и  $(b-c) > (a-c)$   
аналогично н. 1 (значит  $b-c = -1$   $a-c = -p^2$ )

$(b-c) - (a-c) = b-a = p^2 - 1$  аналогично н. 1  $b-a = 8$

аналогично н. 1  $a_3 = 26$   $a_4 = -27$   
 $b_3 = 34$   $b_4 = -19$   
 $c_3 = 35$   $c_4 = -18$

Подстановкой под условие задачи можно убедиться, что все варианты подходят. Других случаев упорядочивания  $a, b$  и  $c$  нет, т.к.  $a < b$

Ответ  $(a_1 = 26, b_1 = 34, c_1 = 25)$   $(a_2 = -27, b_2 = -19, c_2 = -28)$   
 $(a_3 = 26, b_3 = 34, c_3 = 35)$   $(a_4 = -27, b_4 = -19, c_4 = -18)$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

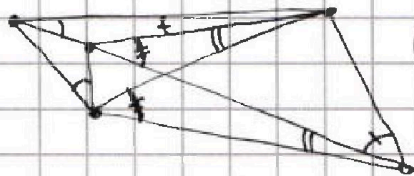
1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a < b$$

$$1 + 1^i = 2^i$$

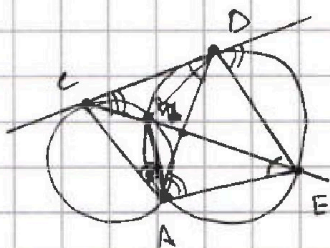


$$(a-c)(b-c) = p^2$$

$$p \cdot p \quad p^2 - 1$$

$$b - a = 3a + 1$$

$$b - a = 3k + 1$$



$$k \in \mathbb{N} \quad k=0$$

$$b - a = 1$$

$$b = a + 1$$

$$a^2 + a + 709 = 0$$



$$1) \quad c < a < b$$

$$a - c = 1$$

$$b - c = p^2$$

$$b - a = p^2 - 1$$

$$p^2 = 1 \quad p$$

$$1) \quad p = 3$$

$$81$$

$$b - a = 8$$

$$a^2 + a + 8 = 710$$

$$a^2 + a - 702 = 0$$

$$D = 1 +$$

$$a_1 = -27$$

$$a_2 = 26$$

$$\begin{array}{r} \times 26 \cdot 22 \\ \hline 304 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 702 \\ \hline 2808 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 26 \\ \hline 156 \\ + 52 \\ \hline 676 \end{array}$$

$$2809$$

$$\begin{array}{r} 702 \overline{) 26} \\ \underline{52} \quad \overline{) 27} \\ 182 \end{array}$$

$$2) \quad a < a < b$$

$$a < b < c$$

$$a - c = -p^2$$

$$b - a = 8$$

$$b - a = p^2 - 1$$