



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{15}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{23}7^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 17 : 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-13; 26)$ ,  $Q(3; 26)$  и  $R(16; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$ .

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\mathbb{N}1$

Заметим, что если обе минимально, то оно не включается  
в себя <sup>множества</sup> кроме 2 и 7, поэтому мы можем  
представить  $a, b, c$  в виде:

$$a = 2^{\alpha_1} \cdot 7^{\beta_1}; \quad b = 2^{\alpha_2} \cdot 7^{\beta_2}; \quad c = 2^{\alpha_3} \cdot 7^{\beta_3}, \text{ тогда}$$

$$ab = 2^{\alpha_1 + \alpha_2} \cdot 7^{\beta_1 + \beta_2} = 2^{\alpha_1 + \alpha_2} \cdot 7^{\beta_1 + \beta_2}, \text{ аналогично}$$

$$bc = 2^{\alpha_2 + \alpha_3} \cdot 7^{\beta_2 + \beta_3}$$

$$ac = 2^{\alpha_1 + \alpha_3} \cdot 7^{\beta_1 + \beta_3}$$

Из условия задачи мы можем вывести неравенства  
на степени из-за делимости:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 \geq 15 \\ \alpha_2 + \alpha_3 \geq 17 \\ \alpha_1 + \alpha_3 \geq 23 \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_1 + \beta_2 \geq 11 \\ \beta_2 + \beta_3 \geq 18 \\ \beta_1 + \beta_3 \geq 39 \end{cases}$$

Сложим неравенства и поделим на 2 и получим:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 27,5 \quad \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 34, \text{ но } \beta_1 + \beta_3 \geq 39, \Rightarrow$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 28, \text{ т.к. } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{N} \quad \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 39$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{N}$ , т.к. иначе числа  $a, b, c$  были бы рациональ-  
ными.

Из неравенств следует, что  $abc = 2^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \cdot 7^{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3} \geq 2^{28} \cdot 7^{39}$ .

Пример:

$$a = 2^{11} \cdot 7^{11} \quad ab = 2^{15} \cdot 7^{11}; \quad (2^{15} \cdot 7^{11})$$

$$b = 2^4 \cdot 7^0 \quad bc = 2^{17} \cdot 7^{28}; \quad (2^{17} \cdot 7^{18}) \quad abc = 2^{20} \cdot 7^{39}$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{28} \quad ac = 2^{24} \cdot 7^{39}; \quad (2^{23} \cdot 7^{39})$$

Ответ:  $2^{28} \cdot 7^{39}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2

$$\frac{a+b}{a^2-2ab+b^2} = \frac{a+b}{a^2+2ab+b^2-2ab-2ab} = \frac{a+b}{(a+b)^2-2ab}, \text{ по условию}$$

$$(a+b) : m$$

$$((a+b)^2 - 2ab) : m \Rightarrow (-2ab) : m \quad [\text{п.к. } (a+b) : m \Rightarrow (a+b)^2 : m, \text{ а}$$

если  $(-2ab) \nmid m$ , то и разность  $2a$  ~~на~~  $m$  не делится]

У  $a$  и  $b$  нет общих множителей, т.к. дроби несократ-

има, а это значит, что и у  $a^2$  нет общих множителей

ни с  $a$ , ни с  $b$  <sup>①</sup>, т.е.  $ab \nmid m$ , а значит  $(-2) : m$

$$\text{и } m=2$$

① Если бы были, то  $ab = x \cdot a$

$$b = a(x-1) \Rightarrow \text{дроби сократима на } a \text{ — противоречие}$$

Ответ: 2

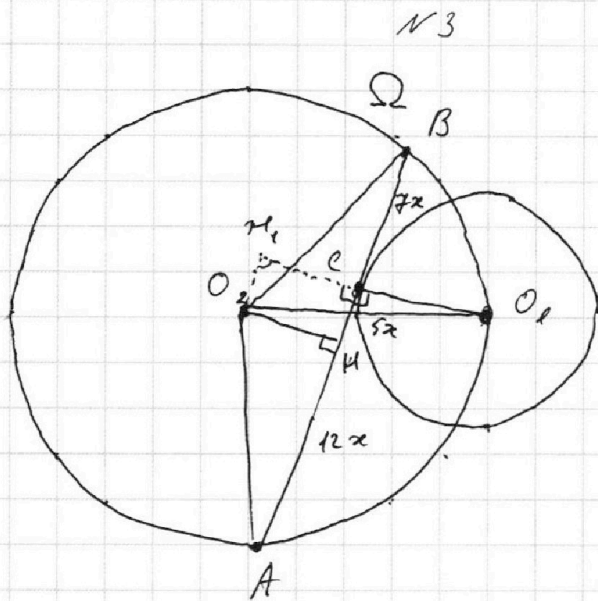
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$O_2 - \text{ц. } \Omega; O_1 - \text{ц. } \omega$$

Пусть  $BC = 7x$ , тогда

$$AC = 17x, \text{ а } AB = 7x + 17x = 24x$$

Проведём  $O_2H$  - перпендикуляр на

$\omega$  из ц.  $\Omega$  к  $AB$ . По

$$\text{свойству } AH = HB = \frac{24x}{2} = 12x$$

Найдём  $CH$ :

$$CH = BH - CB = 12x - 7x = 5x$$

Обозначим  $O_2H$  за  $h$

Дополним  $O_2HC$  до прямоугольника  $O_2HCN_1$ .

$$O_2N_1 = CH = 5x; O_2H = N_1C = h; C \in N_1O_1, \text{ т.к. } \angle N_1CN = \angle O_1CN = 90^\circ$$

Рассмотрим прямоуг. треуго.  $O_2N_1O_1$ : по т. Пифагора:

$$O_2N_1^2 + N_1O_1^2 = O_2O_1^2$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 5x & h + CO_1 = h + r(\omega) & r(\Omega) \end{matrix}$$

$$25x^2 + h^2 + 14h + 49 = 169$$

Рассмотрим в  $O_2HA$ , он тоже прямоуг. и по т. Пиф.

$$O_2A^2 = HA^2 + O_2H^2$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ r(\Omega) & 12x & h \end{matrix}$$

$$169 = 144x^2 + h^2$$

Приравняем:

$$25x^2 + h^2 + 14h + 49 = 144x^2 + h^2$$

$$\begin{aligned} 14h &= 111x^2 - 49 \\ h &= \frac{111}{14}x^2 - \frac{49}{14} \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Подставим это в т. Падр для  $O_2$  и А:

$$\left(\frac{17}{2}x^2 - \frac{7}{2}\right)^2 + 144x^2 = 13^2$$

$$\frac{17^2}{4}x^4 - \frac{17 \cdot 7}{2}x^2 + \frac{49}{4} + 144x^2 = 169 \quad | \cdot 4$$

$$289x^4 - 238x^2 + 49 + 576x^2 = 676$$

$$289x^4 + 338x^2 - 627 = 0$$

$$\begin{cases} x^2 = 1 \rightarrow \text{подбирается} \\ x^2 = -\frac{627}{289} \rightarrow \text{лот. Ваета (D > 0, м.н. D = 338^2 + 627 \cdot 289 \cdot 4)} \\ \quad \quad \quad \uparrow \text{не подходит} \end{cases}$$

Значит  $x = 1$

$$AB = 24x = 24$$

Ответ: 24

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№4

$$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-2x$$

$$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = (3x^2-6x+2) - (3x^2+3x+1)$$

$$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = (\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1})(\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1})$$

$$\sqrt{3x^2-6x+2} = \sqrt{3x^2+3x+1} \quad (1)$$

$$\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 1 \quad (2)$$

$$(1): \sqrt{3x^2-6x+2} = \sqrt{3x^2+3x+1} \quad |^2$$

$$\begin{cases} 3x^2-6x+2 = 3x^2+3x+1 \\ 3x^2+3x+1 \geq 0 \end{cases} \begin{cases} 1=2x \\ 3x^2+3x+1 \geq 0 \end{cases} \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ 3 \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{2} + 1 = 1\frac{10}{4} > 0 \end{cases}$$

$$(2): \sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 1 \quad |^2$$

$$3x^2-6x+2 + 3x^2+3x+1 + 2\sqrt{3x^2-6x+2}\sqrt{3x^2+3x+1} = 1$$

$$6x^2-3x+3 + 2\sqrt{3x^2-6x+2}\sqrt{3x^2+3x+1} = 1$$

Рассмотрим  $6x^2-3x+3$ :  $6x^2-3x+3 = 3(x^2-x+1)$

$$x^2-x+1$$

Вершина:  $-\frac{b}{2a} = \frac{1}{4}$  мин. знач.  $-2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{4} + 1 = \frac{7}{8}$ , значит

$$6x^2-3x+3 \geq 3 \cdot \frac{7}{8} > 1, \text{ то тогда } 2\sqrt{3x^2-6x+2}\sqrt{3x^2+3x+1} < 0,$$

это невозможно, значит корней нет

Ответ:  $\frac{1}{9}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№5

Каждой ~~каждой~~ точке  $(x, y)$  сопоставим число  $2x + 4y$

Рассмотрим как будет выглядеть плоскость:

0	2						
-1	1	3	4	7	8	11	13
-2	0	2	4	6	8	10	12
-3	-1	1	3	5	7	9	11
-4	-2	0	2	4	6	8	10
-5	-3	-1	1	3	5	7	9
-6	-4	-2	0	2	4	6	8
-7	-5	-3	-1	1	3	5	7
-8	-6	-4	-2	0	2	4	6

ед. отрезок - 1 клетка, пересечение осей:  $(0, 0)$

Заметим, что на прямой вида  $y = -2x + b$ , все  $b$  имеют одинаковые значения, что

фрагментируются:

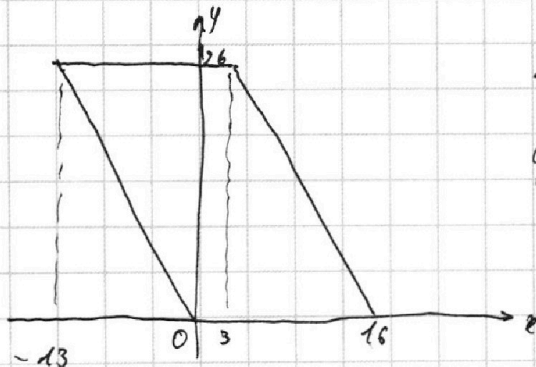
$$2x + 4y = 2x + (-2x + b) = b$$

Условие для пары точек:  $2x_2 - 2x_1 + 4y_2 - 4y_1 = 14$

$$(2x_2 + 4y_2) = 14 + (2x_1 + 4y_1)$$

т.е. для чисел на прямой  $y = -2x + b$  можно сопоставить числа на прямой  $y = -2x + b + 14$

Теперь рассмотрим наш параллелограмм.



Левая сторона задается уравнением  $y = -2x$ , значит на ней все точки будут иметь  $2x + 4y = 0$  и их там будет 14 (от -13 до 0 вал.)

Все единицы будут сложены на  $y = -2x + 14$  их будет 13; ~~по формуле~~

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Ординами от 1 до 25 пере  $z \{1; 3; 5; \dots; 25\}$   
Для двоих будет  $y = -2x + z$ , а напомним что с 0 их будет  
14 и т.д.

Каждая нечетная  $2x + y$  будет иметь 13 чисел, а  
четная: 14

$$\text{Последнее } 2x + y = 2 \cdot 16 + 0 = 32,$$

Теперь будем составлять  $2x + y$  так, чтобы  
 $(2x_2 + y_2) = 14 + (2x_1 + y_1)$

14	0
15	1
16	2

На четном  $y$  нас будет

$$14 \cdot 14 = 196 \text{ пар}$$

⋮	⋮
31	17
32	18

На нечетном -  $13 \cdot 13 = 169$  пар,  
при этом пары эти же

среденнаюше.

Четная всего ~~10~~, нечетная: 9

$(0, 2, 4, \dots, 18)$

$(1, 3, 5, \dots, 17)$

$$\text{Значит всего пар: } 10 \cdot 196 + 9 \cdot 169 = 3489$$

Ответ: 3489 пара точек

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



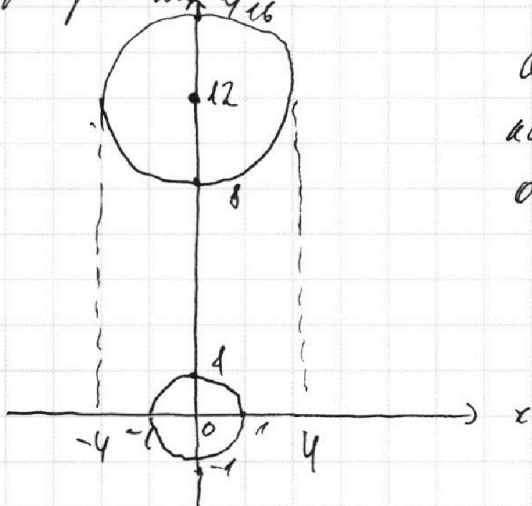
16

$$\begin{cases} ax+4-8b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax+4-8b=0 \\ \begin{cases} x^2+y^2-1 \leq 0 \\ x^2+(y-12)^2-16 \geq 0 \\ x^2+y^2-1 \geq 0 \\ x^2+(y-12)^2-16 \leq 0 \end{cases} \end{cases}$$

Заметим, что это  
уравнение окружности

нарисуем их



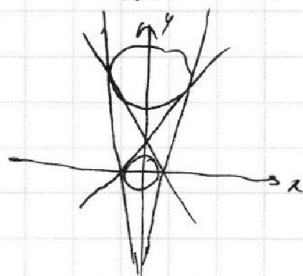
$ax+4-8b=0$  - прямая, которая  
как-то проходит через  
окружности.

$\leq$  значит, что прямая проходит  
внутри окружности (+ касательная)

$\geq$  значит, что снаружи (+кас)

Роз если решить, но пока бы и роз прямая пере-  
секает окружности, но если она это делает не  
по касательной, то решений будет бесконечно. Значит,  
прямая  $ax+4-8b=0$  - касательная к обеим окружностям

и и штука





На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1



2



3



4



5



6



7

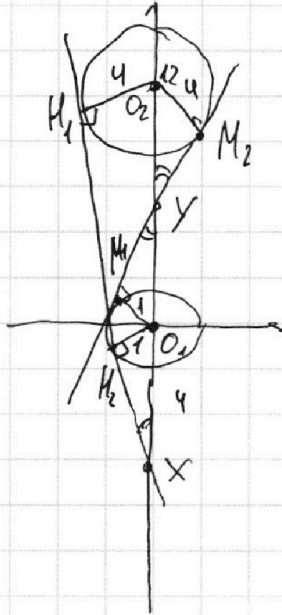


МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Найдем их точки пересечения с осью  $y$ :



$$r_{\text{вал}} = R_1 = 1 \quad R_{O_2} = \sqrt{16} = 4$$

$$1. \quad O_2 H_1 X \sim O_1 H_2 X$$

$$\frac{O_2 H_1}{O_1 H_2} = \frac{O_2 X}{O_1 X}$$

$$y = \frac{O_2 X}{O_1 X} \quad ; \quad O_2 O_1 = 12 \Rightarrow$$

$$O_1 X = y$$

$$2. \quad O_2 M_2 Y \sim O_1 M_1 Y$$

$$\frac{O_2 M_2}{M_1 O_1} = \frac{y O_2}{y O_1}$$

$$y = \frac{y O_2}{y O_1} \quad ; \quad O_1 O_2 = 12 \Rightarrow O_1 Y = 2,4$$

$$O_2 Y = 2,4$$

~~$x^2 + y^2 - 1 = 0$~~   ~~$y = 4$~~

Далее все совпадает



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

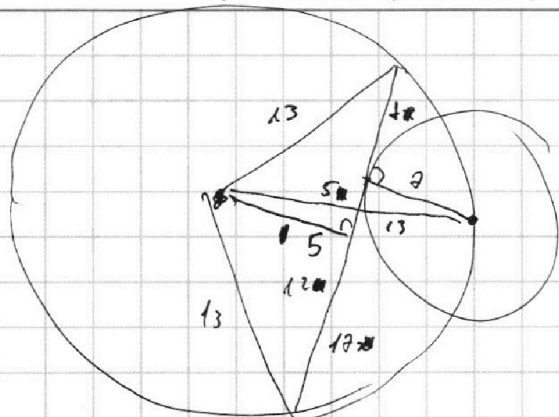
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



29

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times 626 \\ \hline 5830 \\ - 626 \\ \hline 5208 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 20 \\ \times 626 \\ \hline 1252 \\ - 08 \\ \hline 08 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5208 \text{ / } 8 \\ \underline{48} \phantom{00} \\ 40 \phantom{00} \\ \underline{40} \phantom{00} \\ 00 \phantom{00} \\ \hline 651 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 526 \\ - 238 \\ \hline 738 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5008 \text{ / } 8 \\ \underline{48} \phantom{00} \\ 20 \phantom{00} \\ \underline{16} \phantom{00} \\ 48 \phantom{00} \\ \hline 626 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 168 \\ \hline 136 \\ \phantom{136} 626 \\ \hline 626 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times 626 \\ \hline 125 \\ \phantom{125} 626 \\ \hline 5208 \end{array}$$

$$\begin{aligned} (h+2)^2 + 25x^2 &= 13^2 \\ h^2 + 4hx + 4 + 25x^2 &= 13^2 \end{aligned}$$

$$h^2 - (h+2)^2 = -119x^2$$

$$(h-h-2)(h+h+2) = -119x^2$$

$$2h+2 = 17x^2$$

$$h = 8,5x^2 - 1 = \frac{17}{2}x^2 - 1$$

$$22,25x^4 - 7,5x^2 + 12,25 + 144x^2 = 13^2$$

$$22,25x^4 - 238x^2 + 12,25 = 13^2 \cdot 4 - 49$$

$$22,25x^4 + 338x^2 - 627 = 0$$

$$x^2 = p \Rightarrow x = \sqrt{p} \Rightarrow x^2 = -4$$

$$x = \frac{-50 \pm \sqrt{2500 + 626 \cdot 289 \cdot 4}}{289 \cdot 2} = \frac{-50 \pm \sqrt{50^2 + 626 \cdot 17^2}}{289 \cdot 2}$$

$$= \frac{-25 \pm \sqrt{25^2 + 626 \cdot 17^2}}{289}$$

$$\begin{array}{r} \times 626 \\ 289 \\ \hline 5834 \\ - 5208 \\ \hline 626 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 182914 \\ 625 \\ \hline 183539 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 626 \\ 289 \\ \hline 1252 \\ - 08 \\ \hline 08 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 17 \\ \hline 182 \\ \phantom{182} 26 \\ \hline 442 \\ \phantom{442} 626 \\ \hline 443 \\ \phantom{443} 443 \\ \hline 1329 \\ \phantom{1329} 26 \\ \hline 22 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 72 \\ \times 14 \\ \hline 68 \\ \phantom{68} 17 \\ \hline 238 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 38 \\ \times 289 \\ \hline 1756 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 238 \\ \times 626 \\ \hline 338 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1252 \\ 182914 \\ \hline 182914 \end{array}$$



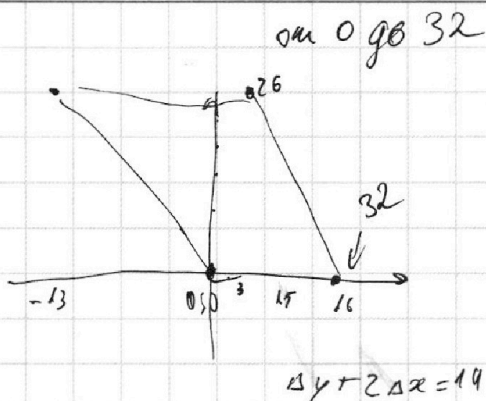
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

$$2(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 14$$

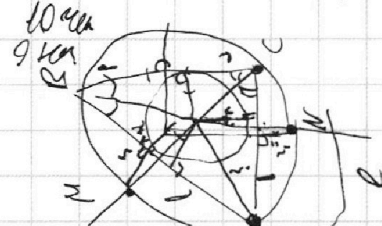
$$y_2 - y_1 = 2$$

$$\begin{matrix} 0 & 14 \\ 1 & 15 \end{matrix}$$

$$r = \frac{|AC \cdot AB|}{|AB \cdot BC|}$$

$$r = \frac{|AC \cdot AB|}{|AB \cdot BC|} = \frac{|AC| \cdot |AB|}{|AB| \cdot |BC|} = \frac{|AC|}{|BC|}$$

$$r = \frac{2.5}{1.5} = \frac{5}{3}$$



одно:

$$\begin{cases} 2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14 \\ x_2, x_1, y_2, y_1 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$x_2 - x_1 = 7 - \frac{y_2 - y_1}{2}$$

$$2x_2 - 2x_1 = 14 \text{ до } 32$$

$A(x_1, y_1) \in [-26; 26]$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

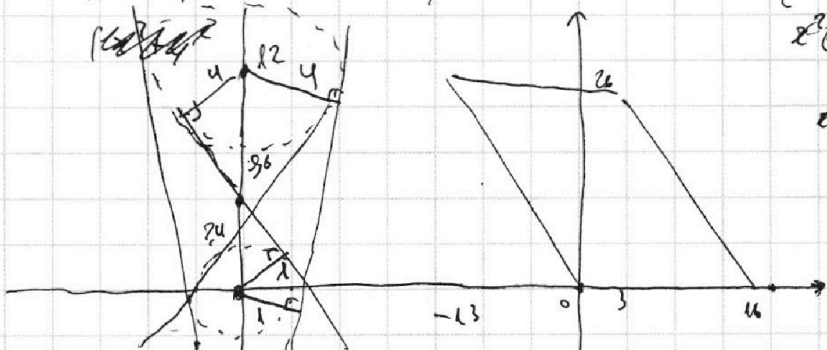
$$2x_2 + y_2 - 14 = x_1 + y_1 + x_1$$

$$ax + y - 86 = 0$$

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 16)^2 - 16) \leq 0$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 \leq 0 \\ x^2 + (y - 16)^2 - 16 \geq 0 \\ x^2 + y^2 - 1 \geq 0 \\ x^2 + (y - 16)^2 - 16 \leq 0 \end{cases}$$

скорее (на зрел.)



$$y = -ax + 86$$

$$\begin{cases} y = -ax + 4 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$x^2 + a^2$$

$$2x_2 - 2x_1 = [-y_2 - 6 - 26 + y_2; 6 + 26 - y_2 + y_2]$$

$$x_1 \in \left[-\frac{y_1}{2}; 3 + \frac{26 - y_1}{2}\right], y_1 \in (0; 26]$$

$$2x_2 - 2x_1 \in (y_1 - y_2; y_2 + 32 - y_1)$$

$$x_2 \in \left[-\frac{y_2}{2}; 3 + \frac{26 - y_2}{2}\right]$$

$$\frac{12}{5} = 2,4$$

$$\text{tg} = \frac{5}{15} \quad -x_1 \in \left[\frac{y_1}{2} - 16; \frac{y_1}{2}\right]$$

$$\text{tg} = \frac{5}{15} \quad x_1 \in \left[-\frac{y_1}{2}; 18 - \frac{y_1}{2}\right]$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab: 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$bc: 2^{17} \cdot 7^{18}; ac: 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$a = 2^{\alpha_1} \cdot 7^{\beta_1} \cdot x, \quad b = 2^{\alpha_2} \cdot 7^{\beta_2} \cdot y, \quad c = 2^{\alpha_3} \cdot 7^{\beta_3} \cdot z$$

$$d_1 + d_2 \geq 15$$

$$d_2 + d_3 \geq 17$$

$$d_1 + d_3 \geq 23$$

$$\beta_1 + \beta_2 \geq 11$$

$$\beta_2 + \beta_3 \geq 18$$

$$\beta_1 + \beta_3 \geq 39$$

$$2(d_1 + d_2 + d_3) \geq 55$$

$$d_1 + d_2 + d_3 \geq 27.5$$

$$d_1 + d_2 + d_3 \geq 28$$

$$2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \geq 68$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 34$$

но  $\beta_1 + \beta_3 \geq 39$ , поэтому

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 39$$

$$abc \geq 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$a = 2 \cdot 7$$

$$b = 2^4 \cdot 7^0 = 16$$

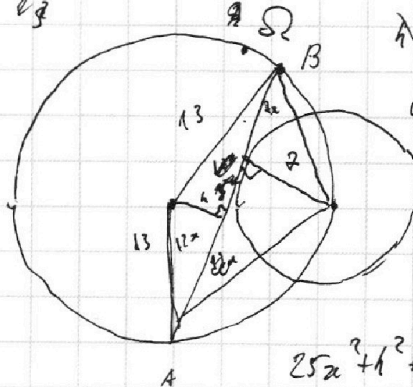
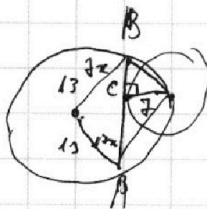
$$c = 2 \cdot 7$$

$$1410 = 82 \cdot 9$$

$$ab = 2^{15} \cdot 7^{11}; 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$bc = 2^{17} \cdot 7^{18}; 2^{17} \cdot 7^{18}$$

$$ac = 2^{29} \cdot 7^{39}; 2^{29} \cdot 7^{39}$$



$$25x^2 + (h+x)^2 = 13^2$$

$$25x^2 + h^2 + 2hx + x^2 = 13^2$$

$$h^2 + 44x^2 = 13^2$$

$$h^2 + 44x^2 = 25x^2 + h^2 + 2hx + x^2$$

$$14h = 119x^2 + 2hx$$

$$2h = 17x^2 + x$$

$$\frac{h}{x} = 8.5x^2 + 0.5$$

$$25x^2 + h^2 + 119x^2 + 2hx + x^2 = 13^2$$

$$100 - 59.5 = 40.5$$

$$= 100 - 89.5 = 10.5$$

$$(8.5x^2 + 0.5)^2 + 44x^2 = 13^2$$

$$72.25x^4 + 8.5x^2 + 144x^2 + 0.25 = 169$$

$$72.25x^4 + 152.5x^2 - 168.75 = 0$$

$$289x^4 + 610x^2 - 675 = 0$$

$$17x^2 + 13.2x - 63500 = 0$$

$$84.5x + 189.2 = 338$$

$$84.5x = 148.8$$

$$x = 1.76$$

$$\begin{array}{r} 238 \\ 15825 \\ \times 7 \\ \hline 63500 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 815 \\ 163 \\ \hline 1318 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$289a^2 + 815a - 63500 = 0$$

$$a = \frac{-815 \pm \sqrt{815^2 + 63500 \cdot 4 \cdot 289}}{2 \cdot 289}$$

$$289a^2 + 338a - 63500 = 0$$

$$a = \frac{-338 \pm \sqrt{338^2 + 289 \cdot 63500 \cdot 4}}{2 \cdot 289}$$

$$\begin{array}{r} + 815 \\ + 815 \\ \hline 4085 \\ + 6520 \\ \hline 69285 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + 635 \\ + 289 \\ \hline 5715 \\ + 5080 \\ \hline 1270 \end{array}$$

$$\times 183515$$

$$+ 33406000$$

$$69285$$

$$73405245$$

$$12695055$$

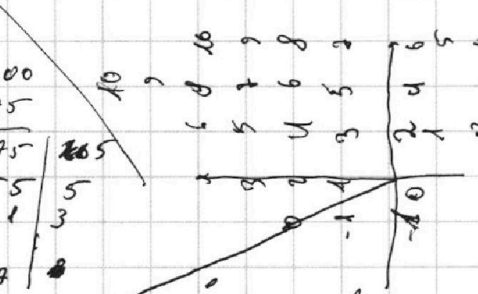
$$2539011$$

$$846$$

$$338$$

$$\begin{array}{r} + 338 \\ + 338 \\ \hline 2804 \\ + 1014 \\ \hline 1014 \\ + 114244 \\ \hline 114244 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + 73406000 \\ + 114244 \\ \hline 22520244 \quad | 2 \\ 36760122 \quad | 2 \\ 18380061 \quad | 3 \\ 6126688 \quad | 3 \\ 2042229 \quad | 3 \\ \hline 680743 \end{array}$$



$$\frac{a+b}{a^2+2ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 2ab}$$

$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{(a+b)^2 - 2ab}$   
 $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{(a+b)^2 - 2ab}$   
 $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{(a+b)^2 - 2ab}$   
 $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{(a+b)^2 - 2ab}$   
 $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{(a+b)^2 - 2ab}$

$$\begin{array}{r} 68 \\ + 168 \\ \hline 196 \\ + 1521 \\ \hline 1960 \\ \hline 3984 \end{array}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = (3x^2 - 6x + 2) - (3x^2 + 3x + 1)$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = (\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{\dots}) (\sqrt{3x^2 + 3x + 1} + \sqrt{\dots})$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1 & x = \frac{1}{9} \\ \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{\dots} = 1 \end{cases}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{\dots} = 1$$

$$3x^2 - 6x + 2 + 3x^2 + 3x + 1 + 2\sqrt{\dots} \sqrt{\dots} = 1$$

$$6x^2 - 3x + 3 + 2\sqrt{\dots} \sqrt{\dots} = 1$$

$$3(2x^2 - x + 1)$$

$$2x^2 - x + 1$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} - 3 > 1$$

$2x_2 - 2x_1 - 14 = 4x_1 - 4x_2 \in [y_1 - y_2 - 48; y_2 - y_1 - 48]$   
 $2x_2 + y_2 = 14 + 2x_1 + 4x_1 \in [14; 48]$   
 $\Rightarrow 2x_2 + y_2 = 14 + 4x_1 \in [14; 32]$   
 $[0; 32]$