



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{14}7^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{20}7^{37}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-12; 24)$ ,  $Q(3; 24)$  и  $R(15; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$ .

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1.

1. По условию:

$$\begin{cases} ab : 2^{14} \cdot 7^{10} \\ bc : 2^{17} \cdot 7^{17} \\ ac : 2^{20} \cdot 7^{37} \end{cases}$$

2. Найдите наименьшее возможное значение произведения

$abc$ :

$$\underbrace{abc}_{: 2^{14} \cdot 7^{10}} = \frac{2^{17} \cdot 7^{17}}{2^{14} \cdot 7^{10}} \cdot \frac{2^{20} \cdot 7^{37}}{2^{14} \cdot 7^{10}} = 2^{20} \cdot 7^{37}$$

(т.к.  $abc$ )

Ответ:  $abc = 2^{20} \cdot 7^{37}$   
(наим)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 2.

$\frac{a}{b}$  - несократима,  $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ .  $\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$  (\*)

При каком наиб  $m$  числитель и знаменатель (\*)  $\div m$ :

Решение:

1.  $\frac{a}{b}$  - несократима.

2.  $a^2-6ab+b^2 = a^2-4ab-2ab+b^2 = (a-b)^2 - 2ab$ .

$$a^2-6ab+b^2 = a^2+2ab-8ab+b^2 = (a+b)^2 - 8ab$$

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab}$$

$$\frac{a+b}{2} \leq ab$$

$$a+b \leq 2ab$$

Берём наименьшее,  $\Rightarrow a+b = 2ab$   
 $(a+b)^2 = 4a^2b^2$

$$(a+b)^2 \leq 4a^2b^2$$

$\Rightarrow$  дробь примет вид:  $\frac{2ab}{4a^2b^2-8ab} = \frac{2ab}{4ab(ab-2)} = \frac{1}{2(ab-2)}$

$\Rightarrow$  для сокращения  $m_{\text{наиб}} = 1$

Ответ:  $m = 1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

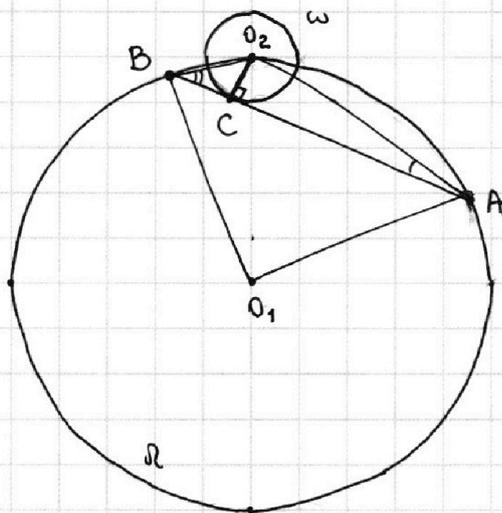
1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



### Задача 3



Дано: Дкр.  $\Omega$  ( $O_1; R$ )  
 Дкр.  $\omega$ . ( $O_2; r$ ).  
 $R = 5; r = 1$ .  
 $O_2C \perp AB$ . ( $AB$  - касат.  
 к (окр) Дкр. ( $O_2; r$ )).  
 $AC: CB = 7$ .  
 Найти:  $AB$  - ?

### Решение:

1.  $\frac{AC}{CB} = 7, \Rightarrow AC = 7CB$ . Пусть  $CB = x, \Rightarrow AC = 7x$ .

2.  $O_2C \perp AB$  - как радиус, проведенный в точку касания.

3.  $O_2C \perp AB, \Rightarrow \angle O_2CB = \angle O_2CA = 90^\circ$ .

4. Рассмотрим  $\triangle BCO_2$  - и/у ( $\angle BCO_2 = 90^\circ$ ):

По т. Пифагора:  $BO_2 = \sqrt{BC^2 + O_2C^2} = \sqrt{BC^2 + r^2} = \sqrt{x^2 + 1}$

$$\sin \angle O_2BC = \frac{O_2C}{BO_2} = \frac{r}{BO_2} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

5. Рассмотрим  $\triangle AO_2C$  - и/у ( $\angle O_2CA = 90^\circ$ ):

По т. Пифагора:  $AO_2 = \sqrt{O_2C^2 + AC^2} = \sqrt{1 + 49x^2}$

$$\sin \angle O_2AC = \frac{O_2C}{AO_2} = \frac{r}{AO_2} = \frac{1}{\sqrt{49x^2 + 1}}$$

6.  $\triangle ABO_2$  - вписанный  $\triangle$  (из условия): в Дкр  $\Omega$ :

$\Rightarrow$  По т. Синусов:  $\frac{AO_2}{\sin \angle O_2BC} = \frac{BO_2}{\sin \angle O_2AB} = 2R$

$$\Rightarrow \sqrt{49x^2 + 1} \cdot \sqrt{x^2 + 1} = 2 \cdot 5 \quad | :2$$

$$(49x^2 + 1)(x^2 + 1) = 100$$

$$49x^4 + 49x^2 + x^2 + 1 = 100 = 0$$

$$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$$

Очевидно, что  $x = 1$  - корень ( $49 + 50 - 99 = 0$  (в)).

Проверим, есть ли у ур-я другие корни:

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

 МФТИ

1  2  3  4  5  6  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$$

$$\begin{array}{r} 49x^4 + 50x^2 - 99 \\ - 49x^4 - 49x^3 \\ \hline 49x^3 + 50x^2 - 99 \\ - 49x^3 - 49x^2 \\ \hline 99x^2 - 99 \\ - 99x^2 - 99x \\ \hline 99x - 99 \\ - 99x - 99 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} x-1 \\ \hline 49x^3 + 49x^2 + 99x + 99 \end{array}$$

$$\Rightarrow 49x^4 + 50x^2 - 99 = (x-1)(49x^3 + 49x^2 + 99x + 99)$$

Очевидно, что для второй скобки не существует положительных  $x$ , при которых она бы обращалась в ноль.

$$\Rightarrow x = 1. \Rightarrow CB = 1 \Rightarrow AC = 7.$$

$$7. AB = AC + CB = 7 + 1 = 8.$$

Ответ:  $AB = 8$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

МФТИ

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

Начальное условие:  $\begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \text{ (1)} \\ 2x^2 + 2x + 1 \geq 0 \text{ (2)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3x - 2x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 + 2x + 1 > 0 \text{ при } \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Delta = 4 - 4 \cdot 2 \cdot 1 < 0.$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x(x-1) - 3(x-1) \geq 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x-3)(x-1) \geq 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 1] \cup [\frac{3}{2}; +\infty) \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1] \cup [\frac{3}{2}; +\infty)$$

Умножим обе части ур-е на  $(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}) > 0$ :

$$\Rightarrow (2x^2 - 5x + 3 - 2x^2 - 2x - 1) = (2 - 7x)(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})$$

$$(-7x + 2) - (-7x + 2)(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}) = 0$$

$$(-7x + 2)(1 - \sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -7x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{7} - \text{подходит по нач. усл.} \\ 1 = \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \quad (3) \end{cases}$$

Выйдем из совокупности:

$$(3) \quad \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1 \quad |^2$$

$$2x^2 - 5x + 3 + 2x^2 + 2x + 1 + 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} = 1$$

$$4x^2 - 3x + 4 + 2\sqrt{(4x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 10x^3 - 10x^2 - 5x + 6x^2 + 6x + 3)} = 1$$

$$4x^2 - 3x + 3 + 2\sqrt{4x^4 - 6x^3 - 2x^2 + x + 3} = 0$$

$$2\sqrt{4x^4 - 6x^3 - 2x^2 + x + 3} = -4x^2 + 3x - 3. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(4x^4 - 6x^3 - 2x^2 + x + 3) = (-4x^2 + 3x - 3)^2 \quad (4) \\ -4x^2 + 3x - 3 \geq 0 \Rightarrow 4x^2 - 3x + 3 \leq 0 \\ \Delta = 9 - 4 \cdot 3 \cdot 4 = 9 - 48 = -41 < 0, \Rightarrow 4x^2 - 3x + 3 > 0 \text{ при } \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Выйдем из системы

$$(4): \underline{16x^4} - \underline{24x^3} - 8x^2 + 4x + 12 = \underline{16x^4} - \underline{24x^3} + 33x^2 - 18x + 9$$

$$41x^2 - 22x - 3 = 0.$$

$$\Delta = 22^2 + 4 \cdot 3 \cdot 41 = 484 + 492 = 976 = 16 \cdot 61 = (4\sqrt{61})^2$$

$$x_1 = \frac{22 + 4\sqrt{61}}{2 \cdot 41} = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41}; \quad x_2 = \frac{22 - 4\sqrt{61}}{2 \cdot 41} = \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

 МФТИ



1    2    3    4    5    6    7  
                 

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Но! корни  $x_1$  и  $x_2$  не подходят, т.к.  
 $4x^2 - 3x + 3 > 0$  при  $\forall x \in \mathbb{R}$

Ответ:  $x = \frac{2}{7}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

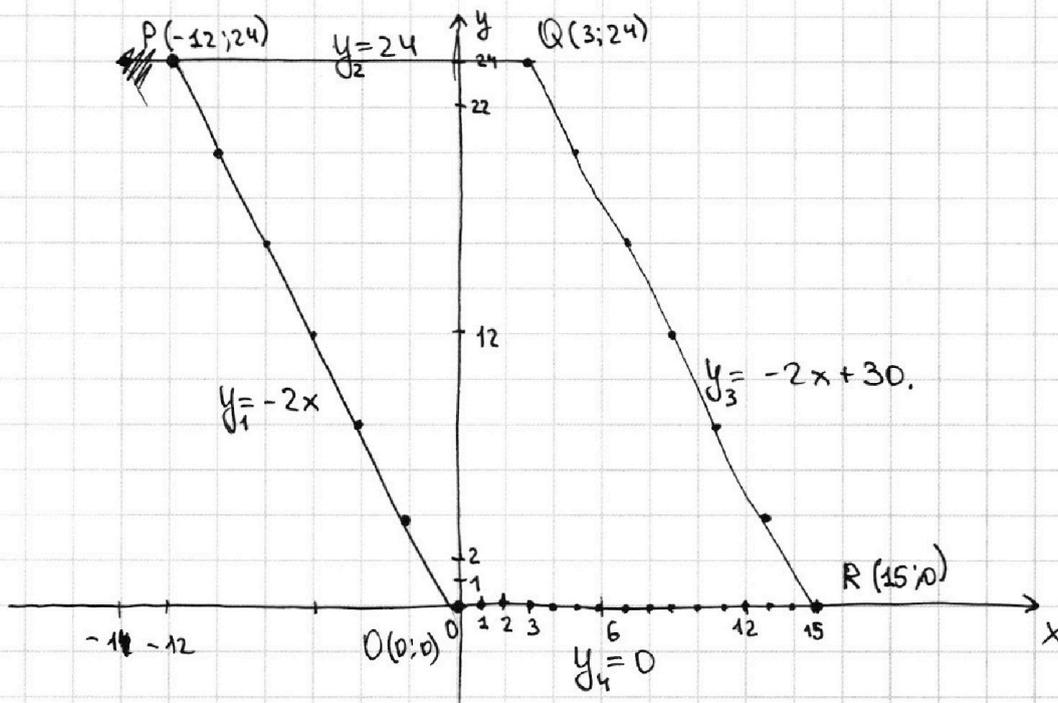
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5.



1. Составим ур-я сторон пар-ма:

PO:  $y_1 = -2x$

OR:  $y_4 = 0$

PQ:  $y_2 = 24$

QR:  $y_3 = -2x + 30$

$$\begin{cases} 24 = 3k + b \Rightarrow 24 = 3k - 15k \Rightarrow k = -2 \\ 0 = 15k + b \Rightarrow b = -15k \Rightarrow b = 30 \end{cases}$$

2. Всего точек с целыми координатами в пар-льнике.

$$N = 16 \cdot 13 + 14 \cdot 12 = 208 + 168 = 376 \text{ точек.}$$

3. Система для точек (сущ-няя пар-мма)

$$\begin{cases} y \leq 24 \\ y \geq 0 \\ y \leq -2x + 30 \\ y \geq -2x \end{cases}$$

4. Это условие:  $A(x_1; y_1); B(x_2; y_2)$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$2(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 12$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

у р-е б ценорх:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 - x_1 = 2 \\ y_2 - y_1 = 2 \\ x_2 - x_1 = 1 \\ y_2 - y_1 = 10 \\ x_2 - x_1 = 3 \\ y_2 - y_1 = 6 \\ x_2 - x_1 = 4 \\ y_2 - y_1 = 4 \\ x_2 - x_1 = 5 \\ y_2 - y_1 = 2 \\ x_2 - x_1 = 6 \\ y_1 = y_2 \\ x_1 = x_2 \\ y_2 - y_1 = 12 \end{array} \right.$$

кон-во нар:  $\frac{376}{2} = 188$

Ответ: 188 нар.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\rho(O_2; CB) = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|C|}{A} = 2 \Rightarrow 2A = |C|$$

$$DE = \sqrt{64 + 4} = \sqrt{68}$$

$$y = ax + 10b$$

$$K(-16; 0); S(0; 2)$$

$$0 = -16a + 10b \Rightarrow +16a = 10b$$

$$16a = 2, \Rightarrow a = \frac{1}{8}$$

$$2 = 10b \Rightarrow b = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \text{сумм.} \quad a = -\frac{1}{8}$$

$$E\left(-\frac{16}{3}; 0\right) \quad S(0; 2)$$

$$0 = -\frac{16}{3}a + 10b \Rightarrow \frac{16}{3}a = 2 \Rightarrow a = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

$$2 = 10b \Rightarrow b = \frac{1}{5}$$

$$\text{сумм.т.} \quad a = -\frac{3}{8}$$

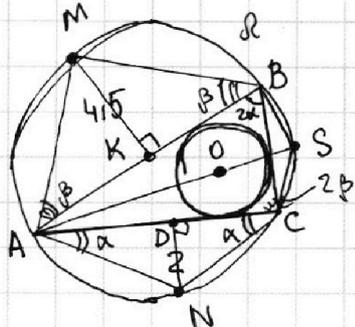
Ответ:  ~~$a = \frac{1}{8}$~~   $a = \left\{ \frac{1}{8}; -\frac{1}{8}; \frac{3}{8}; -\frac{3}{8} \right\}$

1  2  3  4  5  6  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 7



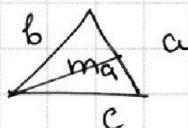
Дано:  $\triangle ABC$  вписан в окруж.  $\Omega$   
 $M$  - сер.  $\cup AB$ . Окруж.  $(O; r)$  вписана в  $\triangle ABC$ .  
 $N$  - сер.  $\cup AC$   
 $MK = 4,5$ ;  $ND = 2$ .  
 Найти:  $AO$  - ?

Решение:

- $M$  - сер.  $\cup AB$ ,  $\Rightarrow \cup AM = \cup MB \Rightarrow \angle MAB = \angle MBA$  - как впис. остр. на равные дуги,  $\Rightarrow \triangle MAB$  - р/б,  $\Rightarrow AM = MB$ .
- $N$  - сер.  $\cup AC$ ,  $\Rightarrow \cup AN = \cup NC$ ,  $\Rightarrow \angle DAN = \angle DCN$  - как впис., остр. на равные дуги,  $\Rightarrow \triangle ANC$  - р/б,  $\Rightarrow AN = NC$ .
- Центр впис. в  $\triangle$  окруж. - т. пер. биссектрис.  
 $\Rightarrow AO$  - биссектриса  $\angle BAC$ ,  $\Rightarrow \cup BS = \cup SC$  (т.к.  $\angle BAO = \angle CAO$ )  
 (т.к.  $AO$  - бисс.).
- $\angle SCB = \angle SBC$  - как впис. угол, остр. на равные дуги,  $\Rightarrow \triangle SBC$  - р/б,  $\Rightarrow BS = SC$ .
- $\triangle MAB$  - р/б,  $\Rightarrow MK$  - бисс., медиана, высота.
- $\triangle NAC$  - р/б,  $\Rightarrow ND$  - бисс., медиана, высота.

7. Формула Медианы  $\triangle$ :

$$m = \sqrt{\frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}}$$



Пусть  $AN = NC = x$

$\Rightarrow$  Это т. Пер. для  $\triangle ADN$ :

$$AD = \sqrt{AN^2 - ND^2} = \sqrt{x^2 - 4}$$

$$\Rightarrow ND = \sqrt{\frac{2x^2 + 2x^2 - (x^2 - 4)}{4}} = \sqrt{\frac{16}{4}} = 2.$$

8. По т. синусов  $\triangle ANC$ :

$$\frac{AN}{\sin \alpha} = 2R \Rightarrow x = \sin \alpha \cdot 2R.$$

9.



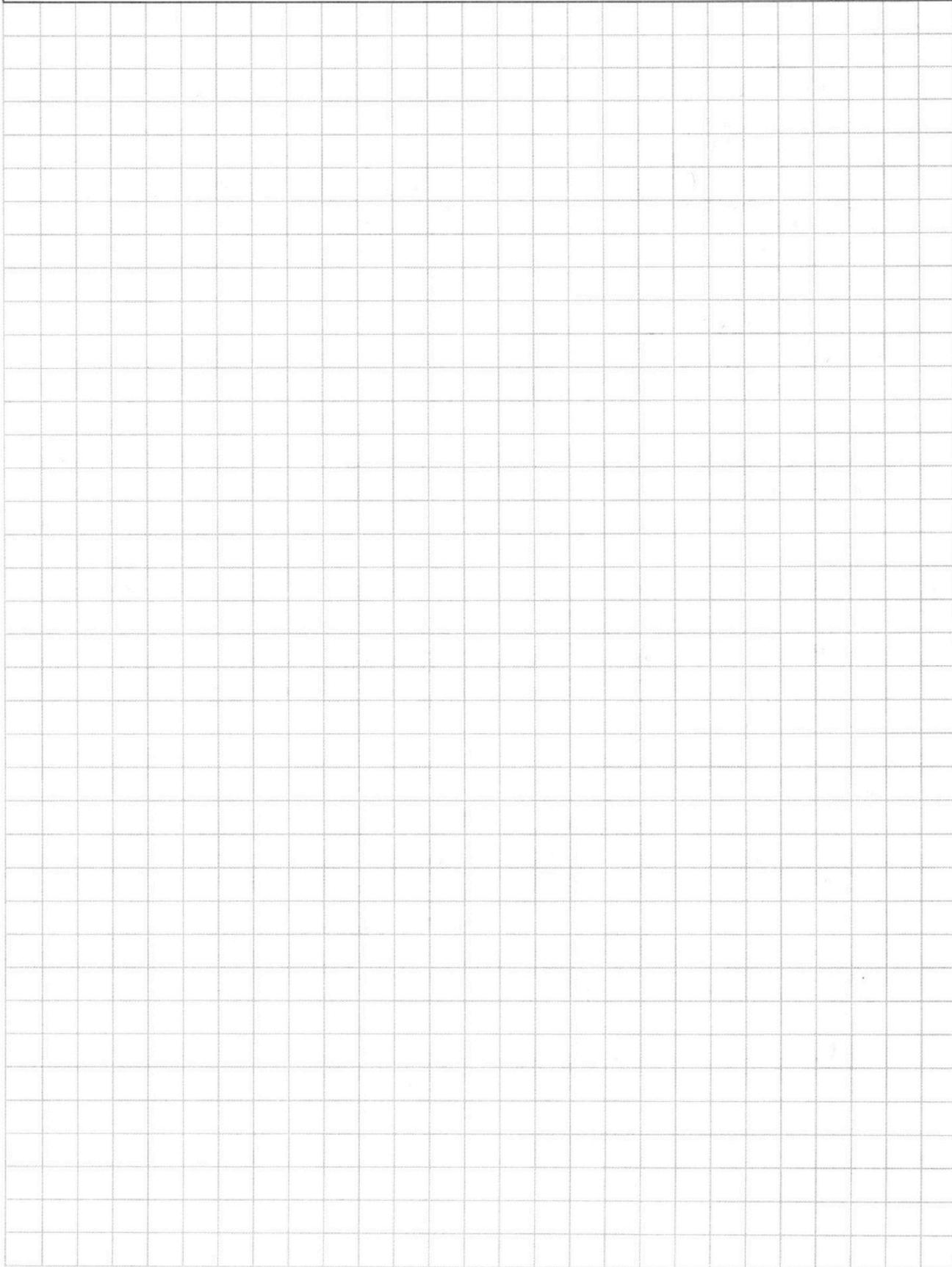
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

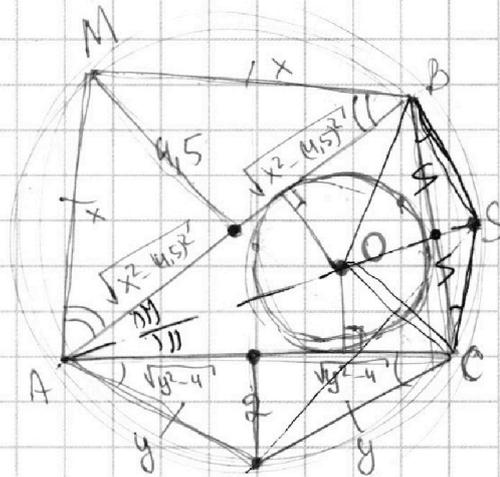
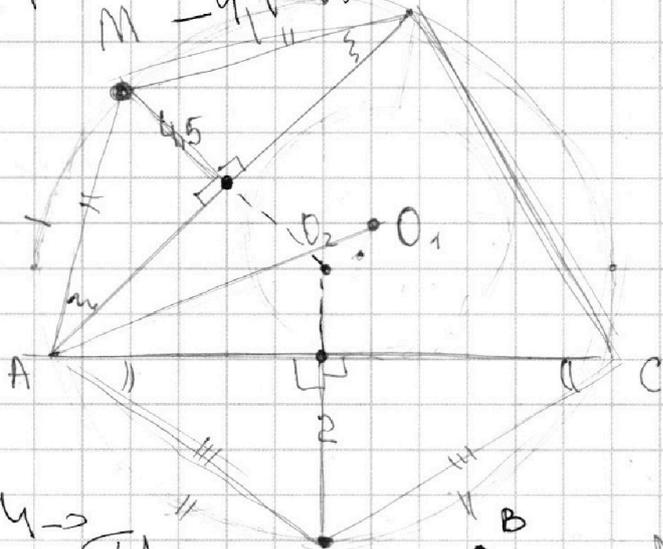
- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

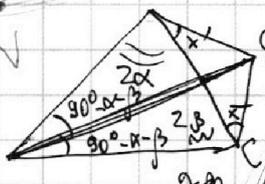
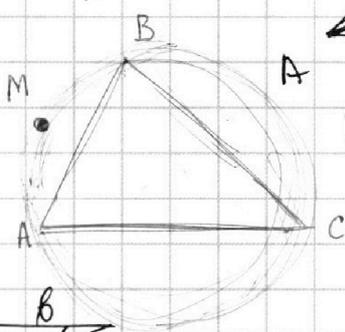
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



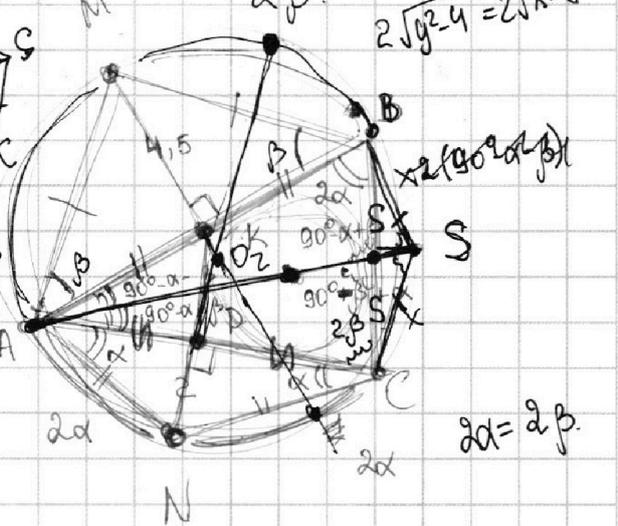
-4. 1+3 1-3  
M -4. 1-2-3-3.



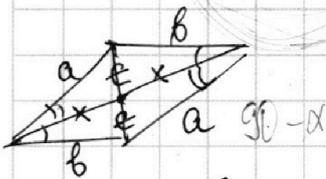
4 →  
11 - 2√61  
41.



$180^\circ - 2\alpha - x - 90^\circ + \alpha + \beta$   
 $90^\circ - \alpha + \beta - x$

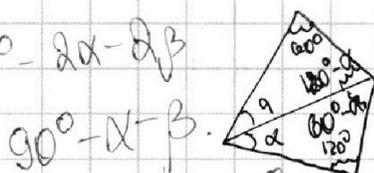


$2\sqrt{y^2-4} = 2\sqrt{x^2-4s^2}$



$180^\circ - 2\beta =$

$MA = \sqrt{180^\circ - 2\alpha - 2\beta}$



$360^\circ - 4\alpha - 4\beta$

$CA = 4\alpha + 4(90^\circ - \alpha - \beta) = 90^\circ$

$180^\circ - 2\alpha - 2\beta =$

$90^\circ - \alpha - \beta$

$180^\circ - 2\alpha - 90^\circ + \alpha + \beta =$

$90^\circ - \alpha + \beta$

$180^\circ - 90^\circ + \alpha + \beta - 2\beta = 90^\circ + \beta + \alpha$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 & (1) \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 & (2) \end{cases}$$

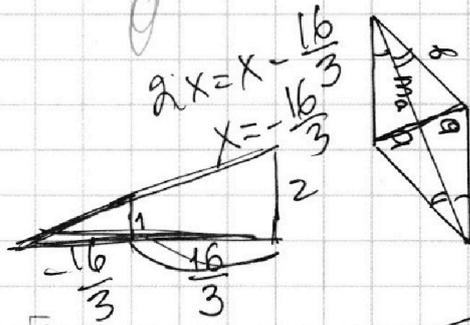
ровно 2 решения - ?

(1) ~~y = ax + 10b~~ y = ax + 10b  
 (2) ~~((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0~~

~~(x+8)^2 + y^2 - 1~~  
~~x^2 + y^2 - 4~~

$\sqrt{6}$

$\frac{1}{2} = \frac{x}{x^2 + \frac{16}{3}}$

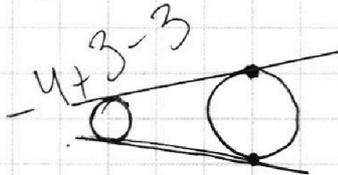
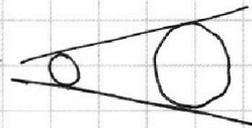


$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

(1) y = ax + 10b

(2)  $\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 - 1 \leq 0 \\ x^2 + y^2 - 4 \geq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + y^2 \geq 4 \end{cases}$



$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 - 1 \geq 0 \\ x^2 + y^2 - 4 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases}$

$-8A + C > 0$

$|Ax + By + C| = \sqrt{A^2 + B^2} \cdot |Ax + By + C| = C$   
 $-16A = -C$

$| -8A + C | = C$

$\rho((-8, 0)) = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

$2 = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

$\sqrt{A^2 + B^2} = \frac{|C|}{2}$

$| -8A + C | = 1$

$-8A + 2C = 1$

$-8A = -C$

$8A = C$

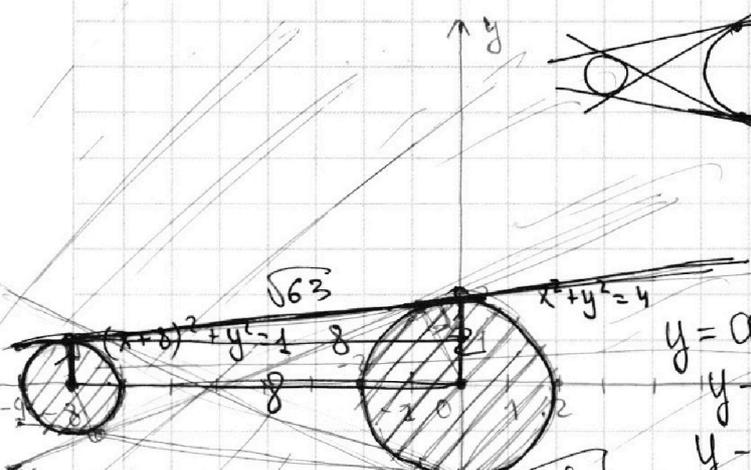
$1 = \frac{24a}{a}$

$\sqrt{A^2 + B^2} = | -8A + C |$

$\rho(0; k) = 1$   $2 = \frac{|C|}{| -8A + C |}$

$\rho(C)$

$2 = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$



y = ax + b

y - ax - b = 0

y - ax - 16a = 0

$0 = -16k + b$   
 $y = kx + b$   
 $b = 16ka$

$1 = \frac{| -8 \cdot (-a) - 16a |}{\sqrt{A^2}}$

$2 = \frac{| -8A + 0 + C |}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

$\frac{2 \cdot 8}{3} = \frac{16}{3}$

$\frac{24}{3} = 8$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned}
 ab &: 2^{14} \cdot 7^{10} \\
 bc &: 2^{12} \cdot 7^{17} \\
 ac &: 2^{20} \cdot 7^{37}
 \end{aligned}$$

(abc)наим-?

abc    ~~abc: 2^{14} \cdot 7^{10}~~

~~ab: 2^{14} \cdot 7^{10}~~    ~~abc:~~

abc: 2^{20} \cdot 7^{37}

$$\begin{aligned}
 ab &= 2^{14} \cdot 7^{10} \\
 ac &= 2^{20} \cdot 7^{37} \\
 \frac{b}{c} &= \frac{1}{2^6 \cdot 7^{27}}
 \end{aligned}$$

$$b = 2^6 \cdot 7^{27} \cdot c$$

$$\begin{aligned}
 &A \vee B \Leftrightarrow \\
 &A \wedge B \Leftrightarrow A \cdot B = 0
 \end{aligned}$$

$$ac = 2^6 \cdot 7^{27} \cdot c$$

$$0 \leq 3x + 3 \leq 0$$

$$0 \leq 3 - x \leq 0$$

$$2x^2 - 4x^2 + 3x - 3$$

$$4x^2 - 3x + 4 + 2x^2 - 4x^2 = 2x^2 - 3x + 4$$

$$2x^2 - 5x + 3 + 2x^2 + 2x + 1 + 2x^2 = 6x^2 - 3x + 4$$

$$2x^2 - 5x + 3 + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 4$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$0 = (\dots) \cdot (x-2)$$

$$0 = \dots \cdot (x-2) - x^2 - 2$$

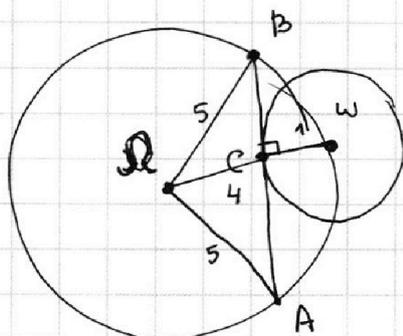
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

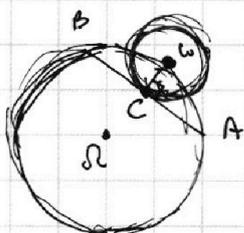


$$AC:CB=4$$

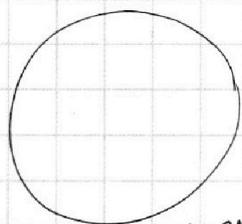
$$\frac{AC}{CB} = 4 \Rightarrow AC = 4CB.$$

$$R_W = 1; R_O = 5.$$

$$49x^2 + 49x^2 + 99x + 99 = 0.$$



19404



21904.

$$\begin{array}{r} 1 \cdot \\ \times 42 \\ \times 42 \\ \hline 168 \\ \times 4 \\ \hline 672 \\ \hline 1680 \end{array}$$

$$BW = \sqrt{1+x^2}$$

$$AW = \sqrt{49x^2+1}$$

$$BO = OA = 5$$

По т. косинусов:

$$AB^2 = BO^2 + OA^2 - 2 \cdot BO \cdot OA \cdot \cos \angle BOA.$$

$$64x^2 = 1+x^2 + 49x^2 + 1 - 2 \cdot \sqrt{(1+x^2)(49x^2+1)} \cdot \cos \angle BOA$$

$$14x^2 = 2 - 2\sqrt{(1+x^2)(49x^2+1)} \cdot \cos \angle BOA$$

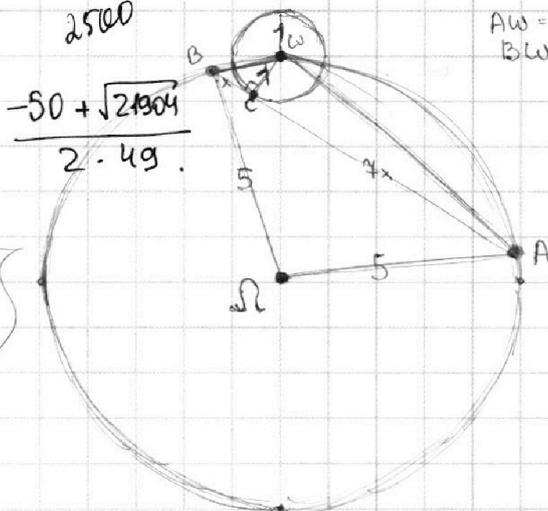
$$\cos \angle BOA = \frac{2 - 14x^2}{\sqrt{2(1+x^2)(49x^2+1)}}$$

$$\frac{2500}{-50 + \sqrt{21904}}$$

$$2 \cdot 49.$$

$$AW = \sqrt{49x^2+1}$$

$$BW = \sqrt{x^2+1}$$



$$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0.$$

$$x = 1$$

$$\begin{array}{r} 49x^4 + 50x^2 - 99 \quad | \quad x-1 \\ -49x^4 - 49x^3 \\ \hline 49x^3 + 50x^2 - 99 \\ -49x^3 - 49x^2 \\ \hline 99x^2 - 99 \\ -99x^2 - 99x \\ \hline 99x - 99 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\sqrt{49x^4 + 49x^2 + x^2 + 1} = 10.$$

$$49x^4 + 49x^2 + x^2 + 1 = 100$$

$$49x^2(x^2+1) + (x^2+1) = 100$$

$$(49x^2+1)(x^2+1) = 100.$$

$$O = 2500 + 4 \cdot 99 \cdot 49 =$$

$$= 2500 + 396 \cdot 49 =$$

$$\begin{array}{r} 85 \\ \times 396 \\ \times 49 \\ \hline 73564 \\ + 1584 \\ \hline 19404 \\ + 19404 \\ \hline 38808 \\ \hline 21904 \end{array}$$

$$\frac{\sqrt{49x^2+1}}{(\sqrt{49x^2+1})(\sqrt{x^2+1})} = 10$$

$$\sin \angle WBC = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\sin \angle WAB = \frac{CW}{WA} = \frac{1}{\sqrt{49x^2+1}}$$

$$\frac{AW}{\sin \angle WBC} = \frac{BW}{\sin \angle WAB} = 2R$$

$$\sin \angle BWC = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\sin \angle WBC = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~AN = CN - X~~  
AN = CN - X  
~~AD = ...~~

$$ma = \sqrt{\frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}}$$

$$a = \sqrt{\frac{2x^2 + 2x^2 - 4 - x^2}{4}}$$

$49x + 196 = 196$

$$49x = 0 \Rightarrow x = 0$$

1  $2$   
3  $296$   
 $1 \cdot 49$   
 $\times 99 + 3564$   
 $1584$   
 $3963619404$   
 $19104$   $259$

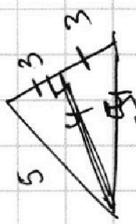
$$49t^2 + 50t - 99 = 0$$

$$D = 2500 + 4 \cdot 49 \cdot 99 =$$

$k_{мин} = (a+b+4ab)$

$k \geq a+b+4ab$   
 $a+b+4ab - k \leq 0$

$a+b \leq 0 \rightarrow$  не можем.  
 $(a+b)(a+b+4ab - k) \leq 0$   
 $(a+b)^2 + 4ab - k(a+b) \leq 0$   
 $k(a+b) \geq (a+b)^2 + 4ab$   
 $k(a+b) \geq a^2 + b^2 + 2ab$   
 $k(a+b) \geq a^2 - 2ab + b^2$



Корни

3)  $b$  требуется

$m(a+b) = mk$

не m + не m

$$\frac{(a+b)^2 + 4ab}{a+b}$$

$a+b : m$   
 $a^2 + 2ab + b^2 : m$   
 $a^2 + 2ab + b^2 + 4ab$   
 $(a+b)^2 + 4ab$

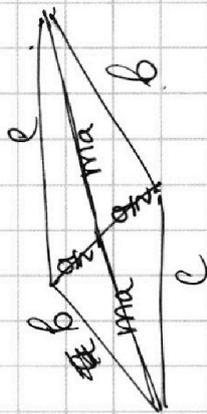
$\left. \begin{matrix} \text{не m и не m} \\ \text{m + не m и не m} \\ \text{не m и не m} \end{matrix} \right\}$

$[2, 1]$ ;  $[2, 5]$

а и b соответственно  
в каком направлении

$\frac{a}{b}$  некорректно

$$\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a+b}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\triangle CO_2B$ ;  $B(-\frac{16}{3}; 0)$ .

~~$BO_2 = \frac{16}{3}$~~

$BO_2 = \frac{16}{3}; CO_2 = 2$ .

$BC = \sqrt{\frac{256}{9} + \frac{256}{9}} = \sqrt{\frac{512}{9}} = \frac{\sqrt{512}}{3} = \frac{16\sqrt{2}}{3}$

$BC =$

$y = kx + b$

$a = 23.720$

$a = 23.720$

$0 = -\frac{16}{3}k + b$

$\frac{16}{3}k = b$

$ax - y + b = 0$   
 $ax - y + b = 0$

$2A = |c|$

$c = \frac{16}{3}A = \frac{2 \cdot 16 |c|}{3 \cdot 8}$

$k = \frac{2}{3} |c|$

$A = |-8A| + |c|$

$A = |-8A| + 2A$

$-A = |-8A|$

$2A = |c|$

$A = |-8A + c|$

$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac = (a+b+c)^2$

$\frac{ab}{bc}$

$\frac{c}{a}$

$\frac{c}{a}$

$c = a \cdot 2^{13} \cdot 7^4$

$1 = \frac{1}{A}$

~~$A = 8A$~~

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\rho(O_1; l) = \frac{|-8a - 10b|}{a} = 1$$

$$\rho(O_2; l) = \frac{|-10b|}{a} = 2$$

$$|-8a - 10b| = a$$

$$10b = 2a$$

$$b = \frac{1}{5}a$$

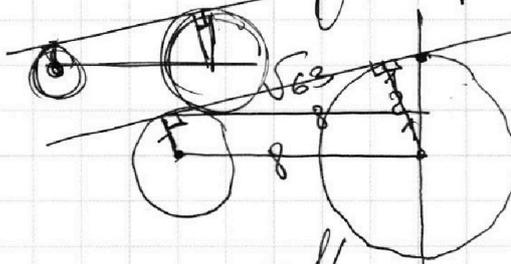
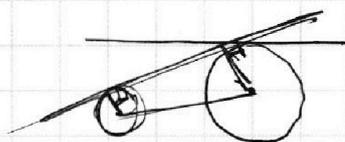
$$y = -\frac{16}{3}x + b$$

~~#~~

$$2 = b$$

$$2 = -\frac{16}{3}x + 2$$

$$0 = -\frac{16}{3}x + 2 \Rightarrow a = \frac{2}{-16} = -\frac{1}{8}$$



$$\left| -8 \cdot \frac{15b}{8} + 10b \right| = a$$

$$5b = a$$

$$a = \frac{15b}{8} = \frac{3a}{8}$$

$$B\left(-\frac{16}{3}; 0\right)$$

$$y = ax + 10b$$

$$\frac{16}{3}a = 10b$$

$$a = \frac{30}{16}b = \frac{15}{8}b$$

$$\frac{16}{3}a = 10b$$

$$a = \frac{30b}{16} = \frac{15b}{8}$$

$$\rho(O_1; l) = \frac{|-8 \cdot A + D + C|}{\sqrt{A^2}} = \frac{|-8A + C|}{A}$$

$$1 = \frac{|-8A + C|}{A}$$

$$y = ax + b$$

$$\frac{|-8A + 10b|}{a}$$

$$ax - y + 10b = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

$$\begin{cases} 2 - 7x \geq 0 \\ 2x^2 - 5x + 3 - 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} + 2x^2 + 2x + 1 = 2 - 7x. \end{cases}$$

$$4x^2 - 3x + 4 - 2\sqrt{4x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 10x^3}$$

$$4x^2 - 3x + 4 - 2 + 7x = 2\sqrt{4x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 10x^3 - 10x^2 - 5x + 6x^2 + 6x + 3}$$

$$4x^2 + 4x + 2 = 2\sqrt{4x^4 - 6x^3 - 2x^2 + x + 3}.$$

$$\begin{array}{r} 2x^2 \\ \times 2x^2 \\ \hline 4x^4 \\ + 4x^3 \\ + 2x^2 \\ \hline 4x^4 + 4x^3 + 2x^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4x^3 - 2x^2 + 4x - 3 \\ - (4x^4 - 6x^3 - 2x^2 + x + 3) \\ \hline -4x^4 + 10x^3 - 4x^2 + 3x - 6 \\ - (-4x^4 + 4x^3) \\ \hline -2x^3 - 2x^2 + x + 3 \\ - (-2x^3 + 2x^2) \\ \hline -4x^2 + x + 3 \\ - (-4x^2 + 4x) \\ \hline -3x + 3 \\ - (-3x + 3) \\ \hline 0 \end{array}$$

$$(x-1)(4x^3 - 2x^2 - 4x - 3) = 0$$

$a, b, c \in \mathbb{N}$ .

$$ab : 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc : 2^{12} \cdot 7^{14}$$

$$ac : 2^{20} \cdot 7^{34}$$

Наим. возм.  $abc = ?$  (произведение).

$$F = \frac{h}{h} = \frac{h}{F-3} = 2 \Rightarrow F = \frac{h}{F-3} = 2 \Rightarrow F = 2(F-3) \Rightarrow F = 2F - 6 \Rightarrow F = 6$$

$$\frac{z}{z} = \frac{h}{F-3} = 2 \Rightarrow z = 2(F-3) = 6$$

$$F = 6 \Rightarrow 2 \cdot 6 - 3 = 9$$

$$2 \cdot 9 - 5 \cdot 3 = 3$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$x = 2$$

$$x = 0$$

$$(2-7x) \left( \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \right) = 0$$

$$(2-7x) \left( \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \right) = 0$$

$$(2-7x) \left( \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \right) = 0$$