МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A\,(x_1;y_1)$ и $B\,(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система

$$\begin{cases} ax-y+10b=0, \\ \left((x+8)^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2-4\right) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Пусть $ab = 2^{14}\cdot 7^{10} m$; $bc = 2^{17}\cdot 7^{17} n$; $ac = 2^{20}\cdot 7^{37} k$; $m, n, k \in N$. Замечу, что если в числах m, n и k есть простые делители, отличные от 2 и 7, то можно на них поделить, уменьшив числа, и все необходимые условия продолжат выполняться. Таким образом, в числах m, n и k используются из простых множителей только 2 и 7 $\Rightarrow \min abc = 7^x \cdot 2^y$.

Рассмотрим оба простых делителя по отдельности.

I. Рассмотрим 2. Перемножим все равенства в начале:

$a^2 b^2 c^2 = 2^{51}\cdot 7^{64} mnk \Rightarrow abc = \sqrt{2^{51}\cdot 7^{64} mnk} \Rightarrow$ т.к. $abc \in N$, то $abc \,\vdots\, 2^{26}$, т.к. $\sqrt{2^{51}} = 2^{25}\sqrt{2}$, но $m, n, k \geq 1 \Rightarrow \min y = 26$. Приведу пример:

$a \to 2^9$; $b \to 2^5$; $c \to 2^{12}$ (здесь сопоставлены числа с их max степенями 2). Можно заметить, что $abc \,\vdots\, 2^{26}$, но $abc \not\vdots\, 2^{27}$ и все 3 условия выполнены $\Rightarrow y = 26$.

II. Рассмотрим 7. Т.к. $a, b, c \in N \Rightarrow abc \,\vdots\, ac$, но $ac \,\vdots\, 7^{37} \Rightarrow abc \,\vdots\, 7^{37} \Rightarrow \min x = 37$.

Приведу пример:

$a \to 7^{10}$; $b \to 7^0$; $c \to 7^{27}$. Аналогично, все условия выполнены $\Rightarrow \min x = 37 \Rightarrow$

$\Rightarrow \min abc = 2^{26}\cdot 7^{37}$

Ответ: $2^{26}\cdot 7^{37}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

По условию $\frac{a}{b}$ - несократимая дробь $\Rightarrow$ НОД $(a; b) = 1 \Rightarrow$ НОД $(a; a+b) = 1$ и НОД $(b; a+b) = 1 \Rightarrow$ НОД $(ab; a+b) = 1$. Теперь преобразуем начальное выражение:

$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab}$. Замечу, что НОД$(a+b; (a+b)^2-8ab) =$ НОД$(a+b; 8ab)$. Но НОД$(a+b; ab) = 1 \Rightarrow$ НОД $(a+b; 8ab) > 1$ если НОД $(a+b; 8) > 1$. Но max НОД$(a+b; 8) = 8$.

Таким образом, max $m \in N = 8$. Этот случай достигается, если $(a+b) \vdots 8$. Приведу пример, в котором это выполняется:

$a = 1; b = 7 \Rightarrow \frac{1+7}{1-6\cdot7\cdot1+7^2} = \frac{8}{8} \Rightarrow m = 8$.

Т.е. было доказано, что $m \leq 8$ и приведён пример на $m = 8$.

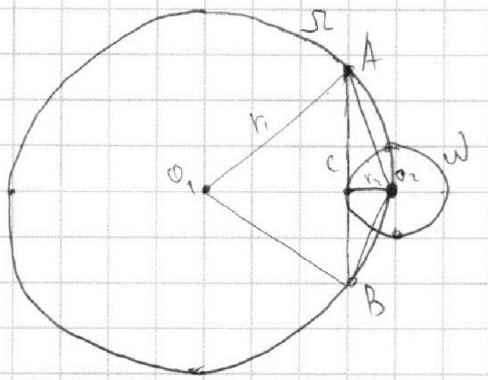
Ответ: 8

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



Дано:
$r_1 = 5$
$r_2 = 1$
AB – касат. к ω
$AC:CB = 7$
$AB - ?$

Решение:

1) Введём обозначения: O_1 – центр Ω; O_2 – центр ω; r_1 и r_2 – их радиусы соответственно.

2) AB – касательная к ω $\Rightarrow O_2C \perp AB$.

3) Пусть $BC = x \Rightarrow AC = 7x$. По теореме Пифагора для $\triangle ACO_2$: $AO_2^2 = AC^2 + CO_2^2$; для $\triangle BCO_2$:

$BO_2^2 = BC^2 + CO_2^2 \Rightarrow AO_2^2 = 49x^2 + r_2^2$; $BO_2^2 = x^2 + r_2^2 \Rightarrow AO_2 = \sqrt{49x^2 + r^2}$; $BO_2 = \sqrt{x^2 + r_2^2}$

4) По теореме cos для $\triangle AO_2B$:

$AO_2^2 + BO_2^2 - 2 \cdot AO_2 \cdot BO_2 \cos\angle AO_2B = AB^2$. Пусть $\angle AO_2B = \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow 49x^2 + r_2^2 + x^2 + r_2^2 - 2\sqrt{(49x^2 + r_2^2)(x^2 + r_2^2)} \cos\alpha = 64x^2$

$2r_2^2 - 2\sqrt{49x^4 + 50x^2r_2^2 + r_2^4} \cos\alpha = 14x^2. \quad | : 2$

Т.к. $r_2 = 1$

$1 - \sqrt{49x^4 + 50x^2 + 1} \cos\alpha = \cancel{32}\,7x^2$

$\cos\alpha = \dfrac{1 - 7x^2}{\sqrt{49x^4 + 50x^2 + 1}}$.

Продолжение см. на обороте

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5) $\angle AO_2B = \frac{\breve{AB}}{2}$; $\angle AO_1B = \breve{AO_2B}$, но $\breve{AB} + \breve{AO_2B} = 360^\circ \Rightarrow \angle AO_1B = 360^\circ - 2\angle AO_2B =$
$= 360^\circ - 2\alpha$.

6) $\cos\angle AO_1B = \cos(360^\circ - 2\alpha) = \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{2\cdot(1+7x^2)^2}{49x^4+50x^2+1} - 1 = \frac{2+98x^4+28x^2}{49x^4+50x^2+1} - 1 =$
$= \frac{49x^4 - 78x^2 + 1}{49x^4+50x^2+1}$

7) По теореме cos для $\triangle AO_1B$:

$AO_1^2 + BO_1^2 - 2\cdot AO_1\cdot BO_1\cos\angle AO_1B = AB^2$. Т.к. $AO_1 = BO_1 = r_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2r_1^2 - 2r_1^2\cos 2\alpha = 64x^2$

$r_1^2 - r_1^2\cos 2\alpha = 64x^2$. По условию $r_1 = 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow 25 - \frac{25(49x^4 - 78x^2 + 1)}{49x^4+50x^2+1} = 64x^2$

$\Downarrow$

$64\cdot 49x^6 + 64\cdot 50x^4 + 64x^2 + 25\cdot 49x^4 - 25\cdot 78x^2 + 25 - 25\cdot 49x^4 - 25\cdot 50x^2 - 25 = 0$

$\Downarrow$

$32\cdot 49x^6 + 32\cdot 50x^4 + (32 - 25\cdot 78 - 25\cdot 50)x^2 = 0$

$\Downarrow$

$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$

Пусть $y = x^2 \Rightarrow y \geq 0$.

$\Downarrow$

$49y^2 + 50y - 99 = 0$

$D = 21904$

$\sqrt{D} = 148$

$y_1 = \frac{-148-50}{98} < 0$ – невозможно

$y_2 = \frac{148-50}{98} = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x^2 = 1$, но $x > 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow AB = 8x = 8$.

Ответ: 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$

$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{(2x^2-5x+3)-(2-7x)} = 2-7x$

Пусть $y = 2x^2-5x+3$; $z = 2-7x \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{y} - \sqrt{y-z} = z$

$y+y-z-2\sqrt{y(y-z)} = z^2$

$2y-z^2-z = 2\sqrt{y(y-z)}$

$4y^2+z^4+z^2-4yz^2-4yz+2z^3 = 4y^2-4yz$

$z^4+2z^3+(1-4y)z^2=0$

$z^2(z^2+2z+1-4y)=0$

$(2-7x)^2(4+49x^2-28x+4-14x+1-8x^2+20x-12)=0$

$(2-7x)^2(41x^2-22x-3)=0$

$\Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{l} 2-7x=0 \\ 41x^2-22x-3=0 \end{array}\right. \Rightarrow x_1 = \frac{2}{7}$ ~~если z=0~~

$D = 484+492=976$

$\sqrt{D} = 4\sqrt{61}$

$\Downarrow$

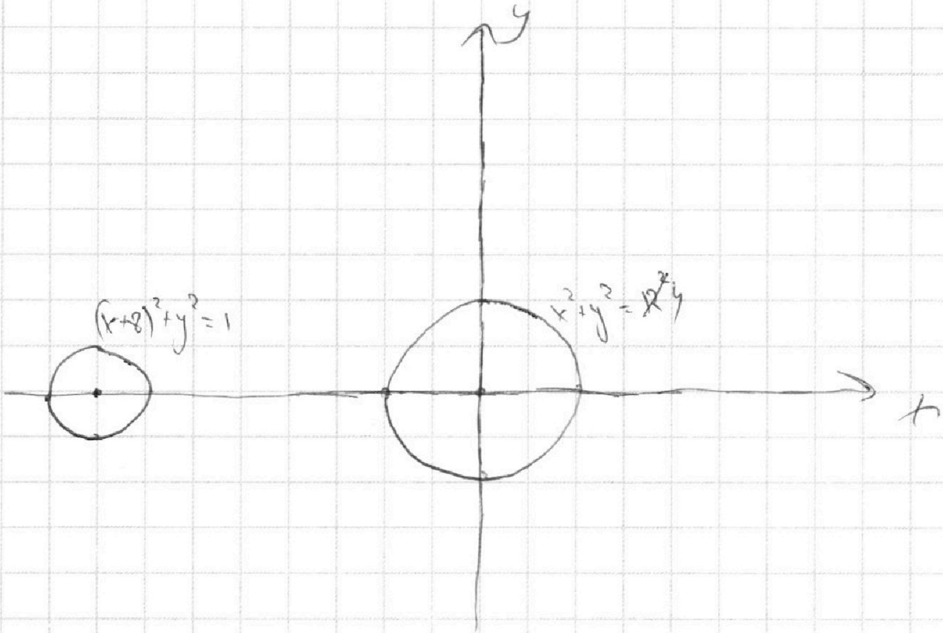
$x_2 = \frac{22-4\sqrt{61}}{2\cdot 41} = \frac{11-2\sqrt{61}}{41}$

$x_3 = \frac{11+2\sqrt{61}}{41}$

Замечу, что $2x^2-5x+3 \geq 0 \Rightarrow x\in(-\infty; 1]\cup[\frac{3}{2}; +\infty)$. $2x^2+2x+1>0$ всегда.
Но при этом $1 < \frac{2}{7} < \frac{3}{2}$. Оставшиеся корни подходят.

Ответ: $\{\frac{11-2\sqrt{61}}{41}; \frac{11+2\sqrt{61}}{41}\}$.

Построим графики функций $(x+8)^2+y^2=1$; $x^2+y^2=4$. Это окружности:



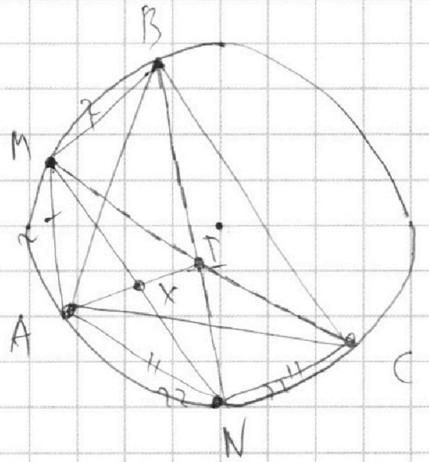
Заметим, что неравенство верно, когда точка лежит внутри одной окружности и вне другой. Т.к. окружности не касаются, то это верно при всех x и y. Т.е. у неравенства $((x+8)^2+y^2-1)(x^2+y^2-4)\le 0$ бесконечно много решений, и оно всегда верно $\Rightarrow$ на количество решений оно не влияет. У функции $y=ax+10b$ бесконечно много решений, т.к. $y=ax+10b$ - прямая. Таким образом, при любых a и b данная система имеет бесконечно много решений, т.е. 2 решения не будет ни при каких a.

Ответ: $\varnothing$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Дано:

$\breve{AM} = \breve{MB}$, $\breve{AN} = \breve{NC}$

$h_1 = 7{,}5$; $h_2 = 2$

AI - ?

Решение:

1) Пусть h_1 – расстояние от M до AB – она же высота из M $\triangle AMB$; h_2 – аналогично высота из N в $\triangle ANC$.

2) Пусть т. I – пересечение CM и BN. $\angle ABN = \frac{\breve{AN}}{2}$, $\angle CBN = \frac{\breve{CN}}{2}$, но $\breve{AN} = \breve{CN}$ $\Rightarrow$ $\angle ABN = \angle CBN$ $\Rightarrow$ BN – биссектриса угла $\angle ABC$. Аналогично CM – биссектриса $\angle ACB$.

Центр вписанной окр. – точка пересеч. бисс. $\Rightarrow$ I – центр впис. окр. $\triangle ABC$ $\Rightarrow$ нам необходимо найти AI.

3) Т.к. $\breve{AM} = \breve{MB}$ $\Rightarrow$ $AM = MB = a$; Аналогично $AN = CN = b$. Пусть $\angle BCM = \angle ACM = \alpha$; $\angle ABN = \angle CBN = \beta$.

4) $AMBC$ – впис. $\Rightarrow$ по св-ву впис. четыр. $\angle MAB = \angle MCB = \alpha$. Но $\angle MBA = \angle MAB = \alpha$ ($\triangle MAB$ – р/б.). Аналогично $\angle NAC = \angle NCA = \beta$.

5) Выпишем пары равных вписанных углов, опир. на одну дугу:
$\angle AMN = \angle ABN = \beta$; $\angle CMN = \angle CBN = \beta$; $\angle ANM = \angle ACM = \alpha$; $\angle MNB = \angle MCB = \alpha$.

6) По ~~теореме sin~~ формуле площади для $\triangle ABM$:

$$S = \frac{a^2 \sin(180^\circ - 2\alpha)}{2} = \frac{a^2 \sin 2\alpha}{2}.$$ С другой стороны: $S = \frac{AB \cdot h_1}{2}$

$\Downarrow$

См. продолжение

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\Downarrow$

$a^2\sin 2\alpha = AB\cdot h_1$.

По теореме sin для $\triangle AMB$:

$\dfrac{AM}{\sin\alpha} = \dfrac{AB}{\sin(180^\circ-2\alpha)} \Rightarrow AB = \dfrac{a\sin 2\alpha}{\sin\alpha}$

$\Downarrow$

$a^2\sin 2\alpha = \dfrac{a\sin 2\alpha\, h_1}{\sin\alpha} \Rightarrow \underline{a\sin\alpha = h_1}$.

Аналогично из $\triangle ANC$:

$\underline{b\sin\beta = h_2}$.

7) $\triangle MAN = \triangle MIN$ по II пр. ($\angle AMN = \angle IMN = \beta$; $\angle ANM = \angle INM = \alpha$; MN - общ.) $\Rightarrow AM = IM$;

$AN = IN \Rightarrow AMIN$ - дельтоид $\Rightarrow AI \perp MN$. и $AX = IX$.

8) По теореме sin для $\triangle MAX$:

$\dfrac{AX}{\sin\beta} = \dfrac{AM}{\sin 90^\circ} \Rightarrow AX = a\sin\beta$.

Аналогично из $\triangle NAX$:

$\dfrac{AX}{\sin\alpha} = \dfrac{AN}{\sin 90^\circ} \Rightarrow AX = b\sin\alpha$

Из двух полученных равенств следует: $AI = 2a\sin\beta = 2b\sin\alpha \Rightarrow AI^2 = 4ab\sin\alpha\sin\beta$,

но $a\sin\alpha = h_1$; $b\sin\beta = h_2 \Rightarrow AI^2 = 4h_1h_2 = 36 \Rightarrow AI = 6$.

Ответ: 6.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

черновик

$$\begin{cases} ax-y+10b=0 \\ ((x+b)^2+y^2-1)(x^2+y^2-4)\le 0 \end{cases}$$

$y=ax+10b$

$((x+b)^2+a^2x^2+20abx+100b^2-1)(x^2+a^2x^2+20abx+100b^2-4)\le 0$

$((a^2+1)x^2+(20ab+16)x+(100b^2+63))((a^2+1)x^2+20abx+(100b^2-4))\le 0$

≤ 0 >0

$y=\cancel{(a^2+1)x^2+20abx}+(100b^2-4)$

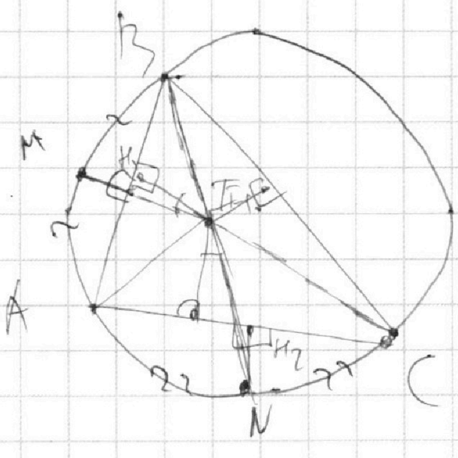
$\cancel{y(y+16x+67)}\le 0$

$D=(20ab+16)^2-4(a^2+1)(100b^2+63)=400a^2b^2+640ab+256-4a^2b^2-252a^2-400b^2-$

$-252=640ab-252a^2-400b^2+4$

$MH_1=4{,}5$

$NH_2=2$



$AI-?$

CM и BN — ~~медиан~~ бисс.

I — их точка перес.

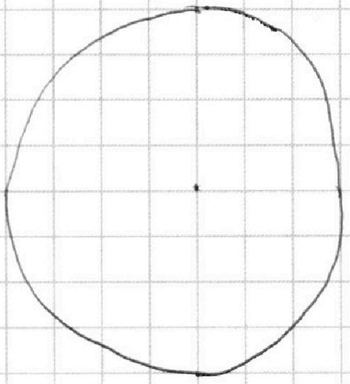
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

черновик



$\min abc$ - ?

$ab = 2^{14} \cdot 7^{10} m$

$2^{20} \cdot 7^{37}$ - ?

$bc = 2^{17} \cdot 7^{17} n$

$ac = 2^{20} \cdot 7^{37} k$

$a \to 7^{10}$

$c \to 7^{27}$

$b \to 7^{0}$

$b \to 2^{0}$

$a^2b^2c^2 = 2^{51} \cdot 7^{64} mnk.$

хотя бы 26 степени

$a+c \geq 20$

$b = 1$

$a = 2^{14} \cdot 7^{16} m$

$x; y; z$ - степени 2

$a; b; c$

$c = 2^{17} \cdot 7^{17} n$

$x+y \geq 14$

$y+z \geq 17$

$ac = 2^{20} \cdot 7^{37} k$

у $a \to 2^{9}$

у $b \to 2^{5}$

у $c \to 2^{12}$

$a = 2^{9} \cdot 7^{10}$

$b = 2^{5}$

$c = 2^{12} \cdot 7^{27}$

$abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

черновик

$\sqrt{z} - \sqrt{y-z} = y$

$z + y - z - 2\sqrt{z(y-z)} = y^2$

$2\sqrt{z(y-z)} = 0$

$\begin{cases} z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2-5x+3=0 \\ 2-7x-2x^2+5x-3=0 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} 2x^2-5x+3=0 \\ 2x^2+2x+1=0 \end{cases}$

$\sqrt{2x^2+5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$

$\sqrt{y-z} - \sqrt{y} = z$

$y - y^2 = 2\sqrt{z(y-z)}$

$y^4 - 2y^3 + y^2 = 4yz - 4z^2$

$y^4 - 2y^3 + (2z-y)^2 = 0$

$y^3(y-2) + (2z-y)^2 = 0$

$y = 2x^2+2x+1$
$z = 2-7x$

$(2x^2+2x+1)(2x^2+2x+1) = 4x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 4x^3 + 4x^2 + 2x + 2x^2 + 2x + 1 = 4x^4 + 8x^3 + 8x^2 + 4x + 1$

$(4x^4+8x^3+8x^2+4x+1)(2x^2+2x+1) =$

$= 8x^6 + 8x^5 + 4x^4 + 16x^5 + 16x^5 + 16x^4 + 8x^3 + 16x^4 + 16x^3 + 8x^2 + 8x^3 + 8x^2 + 4x + 2x^2 + 2x + 1$

$= 8x^6 + 24x^5 + 36x^4 + 32x^3 + 18x^2 + 6x + 1$

$(8x^6 + 24x^5 + 36x^4 + 32x^3 + 18x^2 + 6x + 1)(2x^2+2x+1) + (4 - 14x - 2x^2 - 2x - 1)^2 = 0$

$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$

$y = 2x^2-5x+3$ $\quad z = 2-7x$

$2x^2+2x+1 = y - z$

$\sqrt{y} - \sqrt{y-z} = z$

$y + y - z - 2\sqrt{y(y-z)} = z^2$

$2y - z^2 - z = 2\sqrt{y(y-z)}$

$4y^2 + z^4 + z^2 - 4yz^2 - 4yz + 2z^3 = 4y^2 - 4yz$

$z^4 + 2z^3 + z^2 - 4yz^2 = 0$

$z^2 + 2z + (1-4y) = 0$

$4 + 49x^2 - 28x + 2 - 7x + 1 - 8x^2 + 20x - 12 = 0$

$41x^2 - 15x - 5 = 0$

$D = 225 + 820 = 1045$

$1045 \,|\, 9$
115

$41 \cdot 20 = 820$

$820 + 225 = 1045$

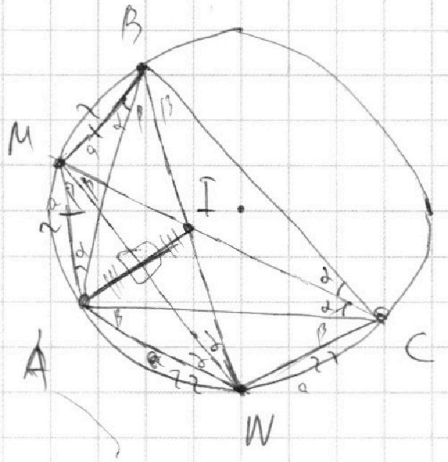
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

черновик

$AI - ?$



$S = \frac{a^2 \sin 2\alpha}{2} = \frac{ah}{2}$

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin 2\alpha}$

$c = \frac{a \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2a\cos\alpha$

$\Downarrow$

$\frac{a^2 \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha}{\cancel{2}} = \frac{2\cos\alpha \cdot a \cdot h_1}{\cancel{2}}$

$a\sin\alpha = h_1$

$b\sin\beta = h_2$

$\frac{\frac{AI}{2}}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin 90^\circ}$

$AI = 2a\sin\beta$

$AI = 2b\sin\alpha$

$AI^2 = 4h_1h_2 = 8 \cdot 4{,}5 = 36 \Rightarrow AI = 6$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

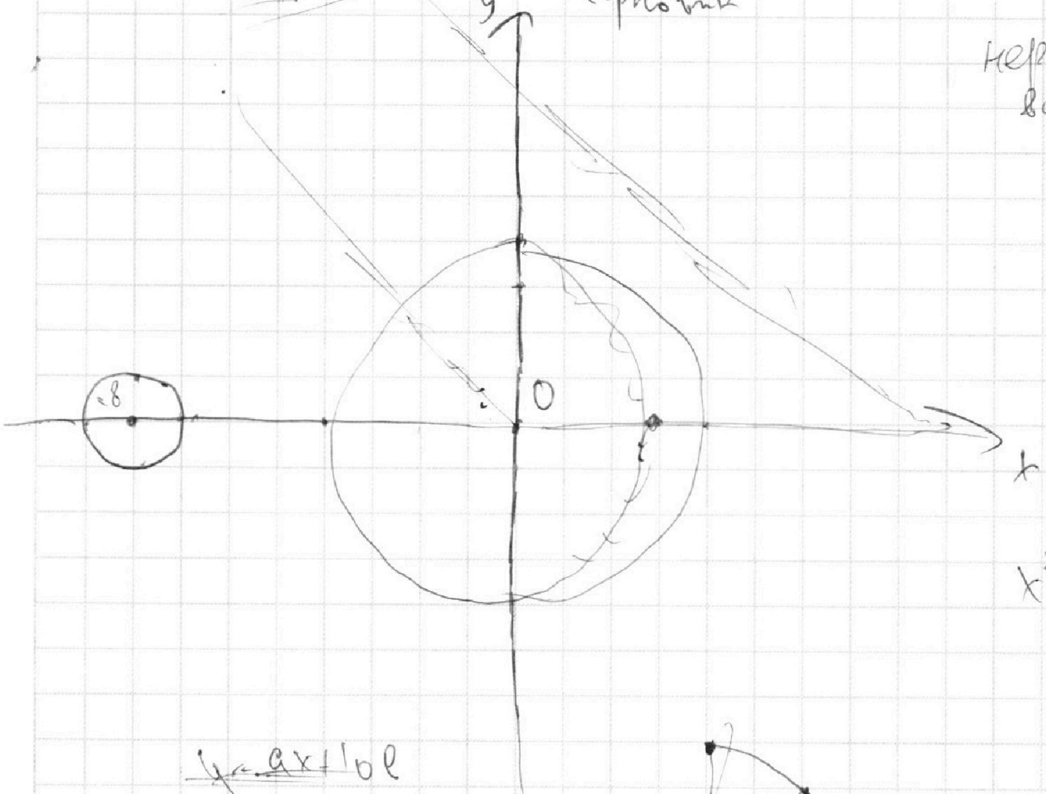
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

черновик

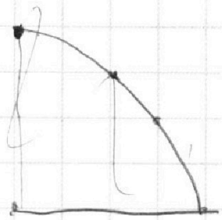
Неравенство
верно всегда



$x^2+y^4=4$

~~y = ax+|ol~~

$y=ax+|ol$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

черновик

$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$

$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{(2x^2-5x+3)+(2-7x)} = 2-7x$ $\quad y = 2-7x$

$\sqrt{z} - \sqrt{y+z} = y$ $\quad z = 2x^2-5x+3$

$z+y+z-2\sqrt{z(y+z)} = y^2$

$y-y^2+2z = 2\sqrt{z(y+z)}$

$y^2+y^4+\cancel{4z^2}-2y^3+4yz-4y^2z = 4yz+\cancel{4z^2}$

$4y^2z = y^4-2y^3+y^2$

$z = \frac{y^2-2y+1}{4}$

$4z = (y-1)^2$

$4(2x^2-5x+3) = (2-7x-1)^2$

$8x^2-20x+12 = 1+49x^2-14x$

$41x^2+6x-11=0$

$D = 36+1804 = 1840$

$x_1 = \frac{-6-\sqrt{1840}}{82} = \frac{-4\sqrt{115}-6}{82} = \frac{-2\sqrt{115}-3}{41}$

$x_2 = \frac{\sqrt{1840}-6}{82} = \frac{2\sqrt{115}-3}{41}$

$\frac{2\sqrt{61}+11}{41} ? \frac{3}{2}$ $\quad \frac{4\sqrt{61}+22-3\cdot 41}{82} ? 0$

$2x^2-5x+3=0$

$D = 25-24 = 1$

$x_1 = \frac{5-1}{4} = 1$

$x_2 = \frac{3}{2}$

<1 или $> \frac{3}{2}$

$(1-7x)^2$

$\times \begin{array}{r}121\\4\\\hline 484\end{array}$

$\times \begin{array}{r}41\\12\\\hline 82\\+41\\\hline 492\end{array}$

$\times \begin{array}{r}44\\41\\\hline 44\\+176\\\hline 1804\end{array}$

$+\begin{array}{r}492\\484\\\hline 976\end{array}$

$\begin{array}{r|l}976 & 4\\244 & 4\\61 &\end{array}$

$\begin{array}{r|l}1840 & 4\\460 & 4\\115 & 5\\23 &\end{array}$

$4\sqrt{61}-101$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

черновик

$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$

$\sqrt{(2x-3)(x-1)} -$

$2x^2-5x+3+2x^2+2x+1-2\sqrt{(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1)} = 4+49x^2-28x$

$45x^2-25x+2\sqrt{4x^4-6x^3-2x^2+x+3} = 0$

$2025x^4+625x^2-2250x^3 = 16x^4-24x^3-8x^2+4x+12$

$2009x^4-2226x^3+633x^2-4x-12=0$

$2x^2-5x+3=0$

$D=25-24=1$

$x_1=\frac{5-1}{4}=1$

$x_2=\frac{5+1}{4}=\frac{3}{2}$

$2x^2-5x+3=(2x-3)(x-1)$

$2x^2+2x+1$

$D=4-8$

$(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1)=$

$=4x^4+4x^3+2x^2-10x^3-10x^2-5x+$

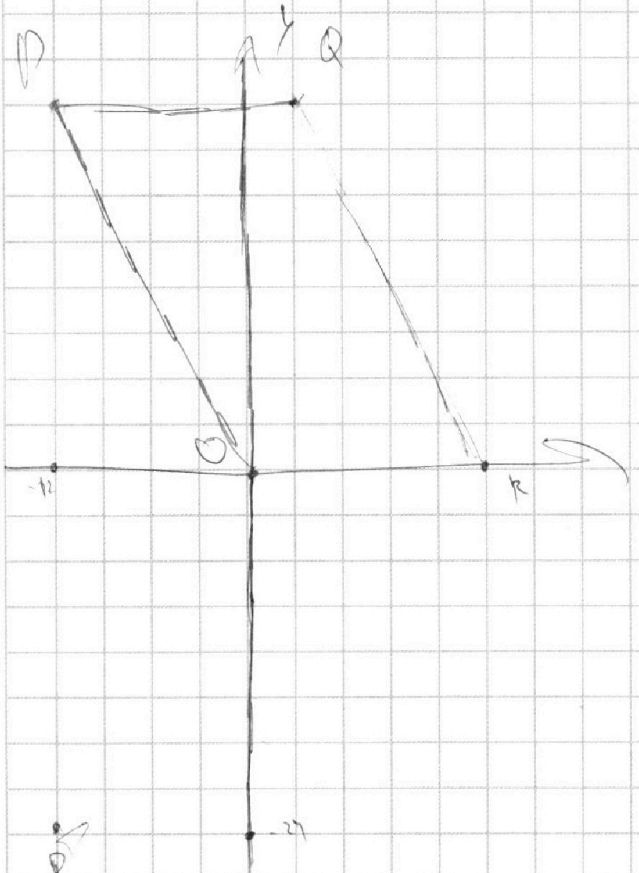
$+6x^2+6x+3=$

$=4x^4-6x^3-2x^2+x+3$

$2250 - 24 = 2226$

$45 \cdot 5 = 225$

$45 \cdot 45 = 2025$



$2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$

$(0;0)$

$2x_2+y_2=12$

$(x_1;y_1) - \text{const}$

$y_2=-2x_2+(2x_1+y_1+12)$

(0;12)

(1;10)

(2;8) точек

(3;6)

(4;4)

(5;2)

(6;0)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

черновик

$$\cos\alpha = \frac{1-7x^2}{\sqrt{49x^4+50x^2+1}}$$

$$\angle AO_2B = 360^0 - 2\alpha$$

$$\cos\angle AO_2B = \cos(360^0-2\alpha) = \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{2(1-7x^2)^2}{49x^4+50x^2+1} - 1 =$$

$$= \frac{2+98x^4-28x^2-49x^4-50x^2-1}{49x^4+50x^2+1} = \frac{49x^4-78x^2+1}{49x^4+50x^2+1}$$

$$r_2^2 + r_2^2 - 2r_2\cdot r_2\cos 2\alpha = 64x^2$$

$$50 - 50\cos 2\alpha = 64x^2$$

$$25 - 25\cos 2\alpha = 32x^2$$

$$25 - \frac{25(49x^4-78x^2+1)}{49x^4+50x^2+1} = 32x^2$$

$$32\cdot 49x^6 + 32\cdot 50x^4 + 32x^2 + \cancel{25\cdot 49x^4} - 25\cdot 78x^2 + \cancel{25} - \cancel{25\cdot 49x^4} - 25\cdot 50x^2 - \cancel{25} = 0$$

$$32\cdot 49x^6 + \cancel{32\cdot 50 + 25\cdot 49}\ 32\cdot 50x^4 + (32 - 25\cdot 78 - 25\cdot 50)x^2 = 0$$

$$32\cdot 49x^4 + 32\cdot 50x^2 + (32 - 25\cdot 128)\cancel{x^2} = 0 \qquad :32$$

$$49x^4 + 50x^2 + (1 - 25\cdot 4)\cancel{x^2} = 0$$

$$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$$

$$y = x^2$$

$$49y^2 + 50y - 99 = 0$$

$$D = 2500 + 19404 = 21904$$

$$\sqrt{D} = 37\cdot 4 = 148$$

$$y = \frac{148-50}{98} = 1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow AB = 8$$

$$99 \times 4 = 396$$

$$396 \times 49 = 19404$$

$$21904 : 4 = 5476,\quad 5476 : 4 = 1369 = 37^2$$

$$19404 + 2500 = 21904$$

$$37 \times 37 = 1369$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

черновик

1) $a, b, c \in N$ $\min abc - ?$

$ab \vdots 2^{14} 7^{10} n$ $a^2b^2c^2 \vdots 2^{14} \cdot 2^{17} \cdot 2^{20} \cdot 7^{10} \cdot 7^{17} \cdot 7^{37} nmk = 2^{51} \cdot 7^{64} mnk$

$bc \vdots 2^{17} 7^{17} m$ $abc = \sqrt{2^{51} \cdot 7^{64} mnk}$

$ac \vdots 2^{20} 7^{37} k$

$c = 2^{20}$ $m = 2; n = 1, k = 1$

$a = 2^{14}$

$b = 2^{0}$ $abc = \sqrt{2^{52} \cdot 7^{64}} = 2^{26} \cdot 7^{32}$

2) $НОД(a, b) = 1$ $; a, b \in N$

$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}$ $\max m \in N: \frac{a+b}{m} \in N; \frac{a^2 - 6ab + b^2}{m} \in N$

$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 8ab}$ $НОД(8ab; (a+b))$

$НОД(a; a+b) = 1$

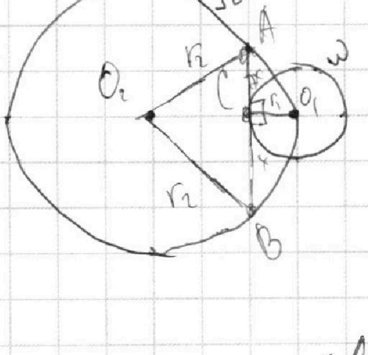
$НОД(b; a+b) = 1$

$НОД(a; a+b) = 1; 2; 4$ или 8

$m = 8$

если $(a+b) \vdots 8$

3)



$AC : CB = 7$

$AB - ?$

$r_\omega = 1; r_\Omega = 5$

r_1 r_2

$AO_1 = \sqrt{49x^2 + r_1^2}$

$BO_1 = \sqrt{x^2 + r_1^2}$

$\angle AO_1B = \beta - ?$

$AO_1^2 + BO_1^2 - 2 \cdot AO_1 \cdot BO_1 \cos\alpha = AB^2$

$49x^2 + r_1^2 + x^2 + r_1^2 - 2\sqrt{(49x^2 + r_1^2)(x^2 + r_1^2)}\cos\alpha = 64x^2$

$2r_1^2 - 2\cos\alpha\sqrt{(49x^2 + r_1^2)(x^2 + r_1^2)} = 14x^2$

$1 - \cos\alpha\sqrt{(49x^2 + 1)(x^2 + 1)} = 7x^2$

$1 - \cos\alpha\sqrt{49x^4 + 50x^2 + 1} = 7x^2$