



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

Пусть:

$$a = \sqrt{3x^2 - 6x + 2}$$

$$b = \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

Тогда заметим, что $a^2 - b^2 = 3x^2 - 6x + 2 - 3x^2 - 3x - 1 = -9x + 1$.
Оставим уравнение:

$$a - b = a^2 - b^2$$

$$a^2 - b^2 - (a - b) = 0$$

$$(a - b)(a + b - 1) = 0$$

$$a - b = a^2 - b^2 = 0$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 0$$

$$1) \sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1 \\ x \in (-\infty; 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}] \cup [\frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9x = 1 \\ x \in (-\infty; 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}] \cup [\frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty) \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{9}$$

$$2) \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$$

$$\begin{cases} \sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \\ x \in [-1; 0] \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 = 1 - 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} + 3x^2 + 3x + 1 \\ -15x \leq 0 \\ 3x^2 + 3x + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \\ -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 1 + 3x^2 + 3x + 1 - 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$\begin{cases} 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 9x, \text{ но т.к. } 3x^2 + 3x + 1 > 0, \text{ при } \forall x \Rightarrow \\ -1 \leq x \leq 0 \Rightarrow \sqrt{3x^2 + 3x + 1} > 0, \text{ при } \forall x \Rightarrow \\ 9x \geq 0 \end{cases}$$

решений нет

Ответ: $\frac{1}{9}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N5

Построим для
 $T.A = (0; 0)$ все возможные
 $T.B$, удовл. условию:
 $2(x_b - x_a) + y_b - y_a = 14$

Они образуют график
 функции $y = -2x + 14$
 в ~~у~~ ~~б~~ ~~о~~ ~~л~~ ~~е~~ ~~н~~ ~~а~~ ~~х~~ ~~и~~ ~~с~~ ~~л~~ ~~а~~ ~~х~~

При смещении $T.A$ по оси Ox на x , коэффициент образующейся прямой равен $k = 14 - 2ax$

Для ~~каждой~~ $T.A$ в

~~параллелограмме~~ паралл-ме $PQMO$

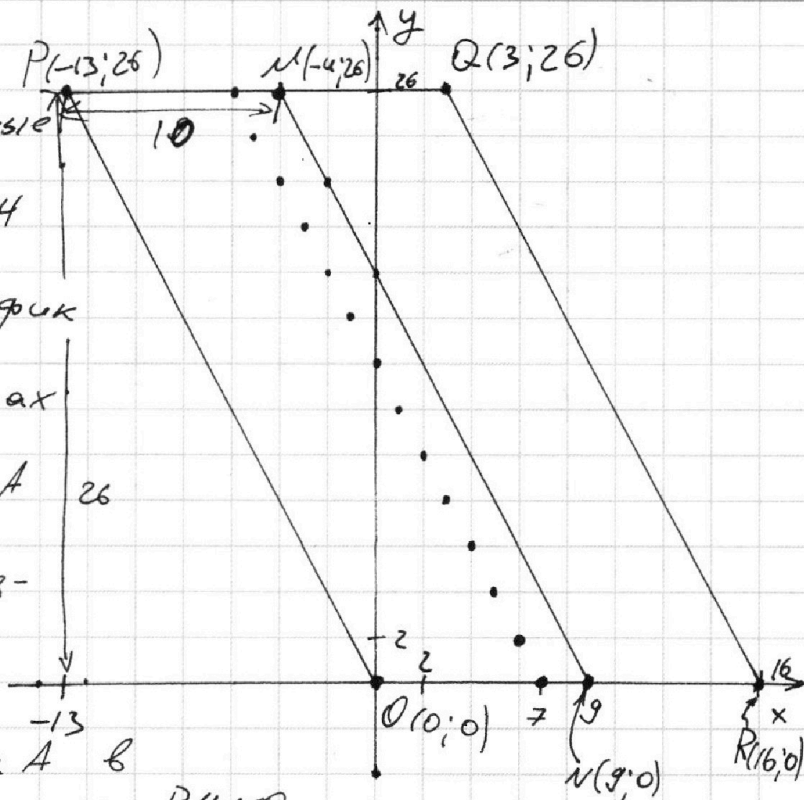
соответствует 14 точек \Rightarrow Всего таких пар

Всего точек внутри $PQMO$ будет ~~$26 \cdot 9,5 + 10$~~ $(26 \cdot 9,5 + 10) \cdot 14$

Примечание:

$T.A$ не может лежать внутри ~~и~~ паралл-мо $PQRM$ (на всех ~~и~~ границах кроме MN), так как для любой такой точки A , все $T.B$ будут лежать вне $OPQR$

Ответ: 34720



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

МФТИ

1 2 3 4 5 6 7

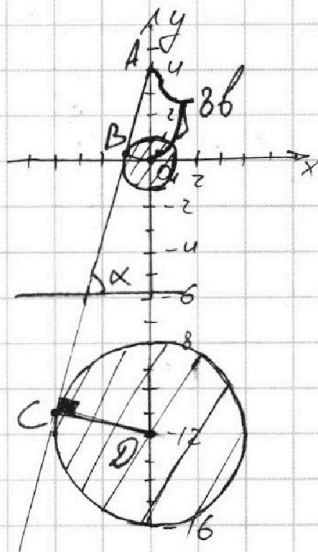
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

Графиком второго уравнения является
два круга.

Ровно 2 решения системы
достигается только в случаях
касания



1 случай

Т.А - точка пересеч. графиков

$ax + y - 8b = 0$ с осью Oy

Т.В - точка касания $ax + y - 8b = 0$ и $x^2 + y^2 - 1 = 0$

Т.С - точка касания $ax + y - 8b = 0$ и $x^2 + (y - 12)^2 - 16 = 0$

Т.О - центр малого круга.

Т.Д - центр большого круга.

Тогда $AO = 8b$.

$$\triangle AOB \sim \triangle ADC \Rightarrow \frac{AO}{OB} = \frac{AD}{DC}$$

$$\frac{8b}{1} = \frac{8b + 12}{4}$$

$$32b = 8b + 12$$

$$b = 0.5$$

$$8b = 4$$

α - угол наклона графика $y = 8b - ax$

~~α~~ $-\alpha = \text{tg } \alpha$

$\angle \alpha = \angle ADC$ (стороны углов попарно перпендикулярны)

$$\text{tg } \angle ADC = -\alpha$$

$$\text{tg } \angle ADC = \frac{AC}{DC} = \frac{\sqrt{16^2 - 4^2}}{4} = \sqrt{15} = -\alpha \Rightarrow \alpha = -\sqrt{15}$$

Т.к. графики симметричны относительно Oy , то
и подходит решение $a = \sqrt{15}$

Ответ: $\pm\sqrt{15}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2 случай:

$$y = 8b - ax$$

Т. О (0; 0)

Т. D (0; -12)

Т. А - точка касания малого круга и прямой

Т. В - точка касания большого круга и прямой

Т. С - точка пересечения прямой и оси Oy

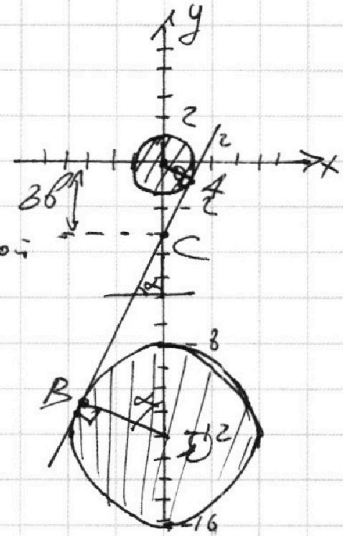
$$\triangle BCD \sim \triangle ACO \Rightarrow \frac{AO}{OC} = \frac{BD}{CD}$$

$$\frac{1}{8b} = \frac{4}{12 - 8b}$$

$$12 - 8b = 32b$$

$$b = \frac{12}{40} = 0,3$$

$$8b = 2,4$$



α - угол наклона прямой

$$\operatorname{tg} \alpha = -a / \cos \alpha$$

$\angle \alpha = \angle \dots$ (стороны углов попарно перпендикулярны)

$$\operatorname{tg} \angle COA = \frac{\sqrt{2,4^2 - 1}}{1} = \frac{\sqrt{119}}{5} = -a \Rightarrow a = -\frac{\sqrt{119}}{5}$$

Поскольку графики симметричны относительно Oy,
то и подходит и решение $a = \frac{\sqrt{119}}{5}$

$$\text{Ответ: } \pm \sqrt{15} \text{ и } \pm \frac{\sqrt{119}}{5}$$

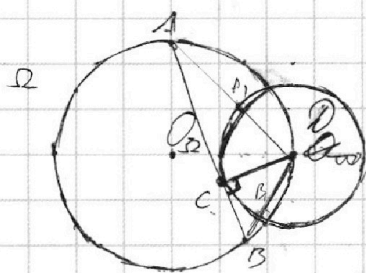
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AC}{BC} = \frac{17}{7}$$

$$R_{O_1} = 13$$

$$R_{O_2} = 7$$

$$AA_1 \cdot AD = AC^2$$

$$AA_1 (AA_1 + 7) = AC^2$$

$$AA_1 (AA_1 + 7) = 289x^2$$

$$AD(AD - 7) = 17x^2$$

$$AD^2 - 7AD = 17x^2$$

$$289x^2 + 49 - 7AD = 17x^2$$

$$272x^2 + 49 = 7AD$$

$$AD = \frac{272x^2 + 49}{7}$$

$$AD \cdot BC = CD^2$$

$$(AD - 7) \cdot CD = BC^2$$

$$AD(AD - 7) = AC^2 = 289x^2$$

$$AD^2 - 7AD = 289x^2$$

$$289x^2 + 49 - 7AD = 289x^2$$

$$AD = 7$$

$$AD^2 = AC^2 + CD^2 = 289x^2 + 49$$

$$AD(AD - 7) = 289x^2$$

$$AD^2 - 7AD = 289x^2$$

$$289x^2 + 49 - 7AD = 289x^2$$

$$AD = 7$$

$$x^2 + (y - 12)^2 = 16$$

$$2x$$

$$(y - 12)^2 = 16$$

$$y - 12 = 4$$

$$y = 16$$

$$y = 8$$

$$x^2 + y - 88 = 0$$

$$x^2 + y - 88 = 0$$

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0$$

$$-1 \cdot 16 \leq 0$$

$$(0 + 16 - 1)(0 + 0 - 16) \leq 0$$

$$\sqrt{(24^2 - 10^2) - 10} = 10$$

$$\sqrt{(24^2 - 10^2) - 10} = 10$$

$$10 \cdot 4 \sqrt{15}$$

$$\begin{array}{r} \times 17 \\ 16 \\ \hline 48 \\ 6 \\ \hline 17 \\ \hline 272 \end{array}$$

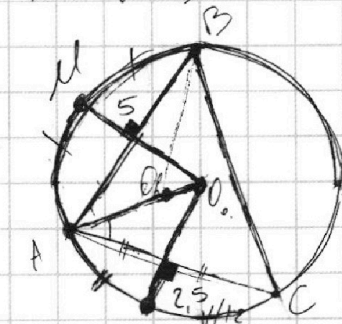
$$AD = \sqrt{AC^2 + DC^2} = \sqrt{(17x)^2 + 49} = \sqrt{289x^2 + 49}$$

$$272x^2 + 49 = 7$$

$$\sqrt{289x^2 + 49} = \frac{272x^2 + 49}{7}$$

$$\frac{272x^2 + 49}{7}$$

$$AD = \sqrt{(17x)^2 + 49}$$



$$\sqrt{\left(\frac{24}{10}\right)^2 - 1} = 10$$

$$\sqrt{24^2 - 10^2} = 10$$

$$= 10$$

$$= 10$$

$$= 10$$

$$= 10$$

$$= 10$$

$$= 10$$

$$= 10$$

$$= 10$$

$$= 10$$

$$= 10$$

$$= 10$$

$$= 10$$

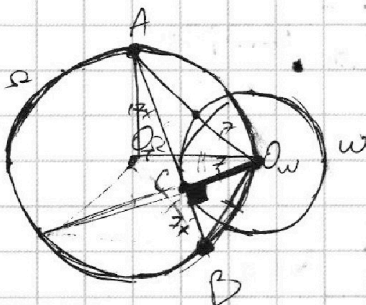
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$AC + BC$

$$\begin{aligned}
 & 6 + 10 + 4 \\
 & 12 + 15 + 2 \\
 & 19 + 15
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 AO_{\omega}(AO_{\omega} - r) &= AC^2 \\
 AO_{\omega}^2 &= AC^2 + 2r \cdot AO_{\omega}
 \end{aligned}$$

$$AO_{\omega}^2 - 2r \cdot AO_{\omega} = AC^2$$

$$AO_{\omega}^2 - 2r \cdot AO_{\omega} - AC^2 = 0$$



$$\sqrt{3x^2 - 2x + 2} - \sqrt{3x^2 + 5x + 1} = 1 - 2x$$

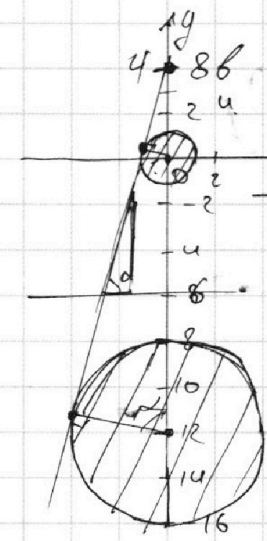
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r} 86 \\ \times 9 \\ \hline 774 \\ \times 14 \\ \hline 1204 \\ \hline 126 \end{array}$$

$$\frac{86}{1} = \frac{86+12}{u}$$

$$126 = 86 + 12 \quad 226 = 86 + 12$$

$$46 = 12 \quad 246 = 12$$

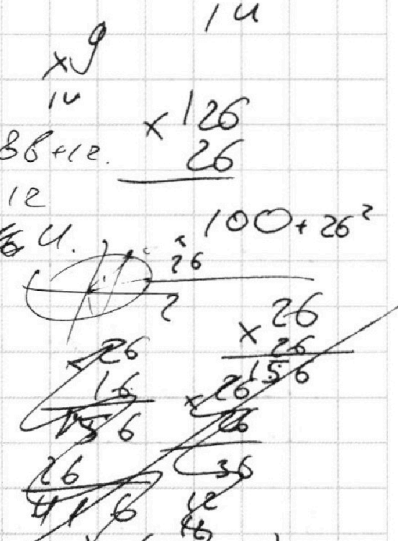
$$86 = 46u$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{4}$$

$$\alpha = \arccos \frac{1}{4}$$

$$\sqrt{4^2 - 1} = \sqrt{15}$$

$$a = \pm \sqrt{15}, \quad b = \frac{1}{2}$$

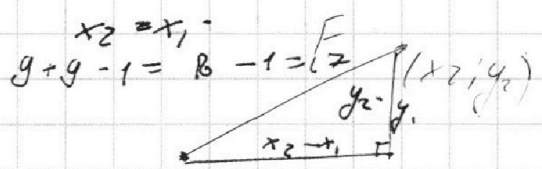


$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 14$$

отрезки

$$\vec{F} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$$

$$2x + y = 14$$

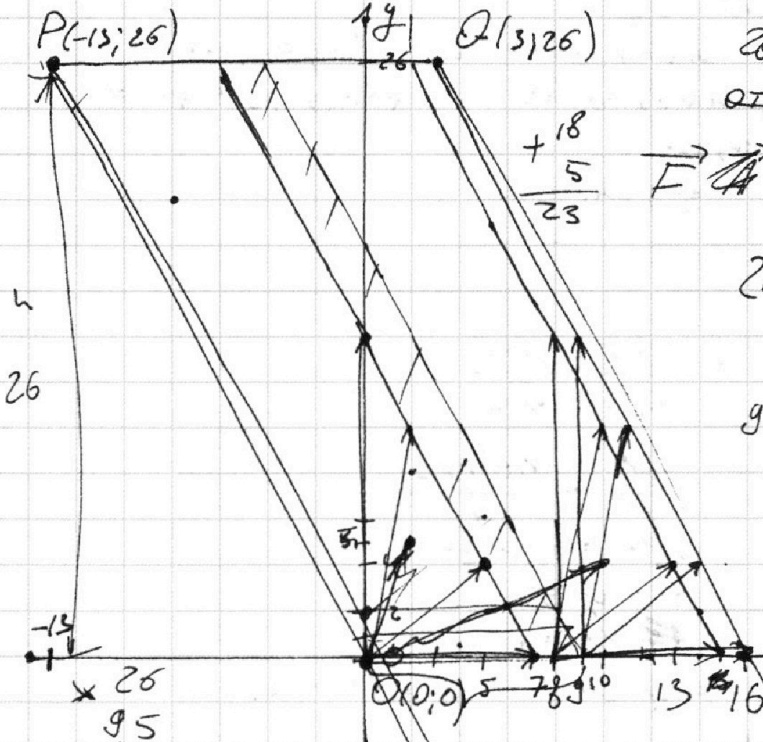


$$x_2 = x_1$$

$$y_2 - y_1 = \sqrt{2} - 1 = \sqrt{2}$$

$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 14$$

$$140 - 14 = 126$$



$$\begin{array}{r} \times 26 \\ 95 \\ \hline 130 \\ 234 \\ \hline 2470 \end{array}$$

$$10 + 4 = 14$$

$$a + b = m \cdot g$$

$$(0;0) - (9;0) = -9$$

$$-9 \cdot 7 \cdot 2 = 126$$

$$9/17 \cdot 26$$

$$\begin{array}{r} \times 2480 \\ \times 26 \\ \hline 14 \\ \hline 992 \\ 248 \\ \hline 34720 \end{array}$$



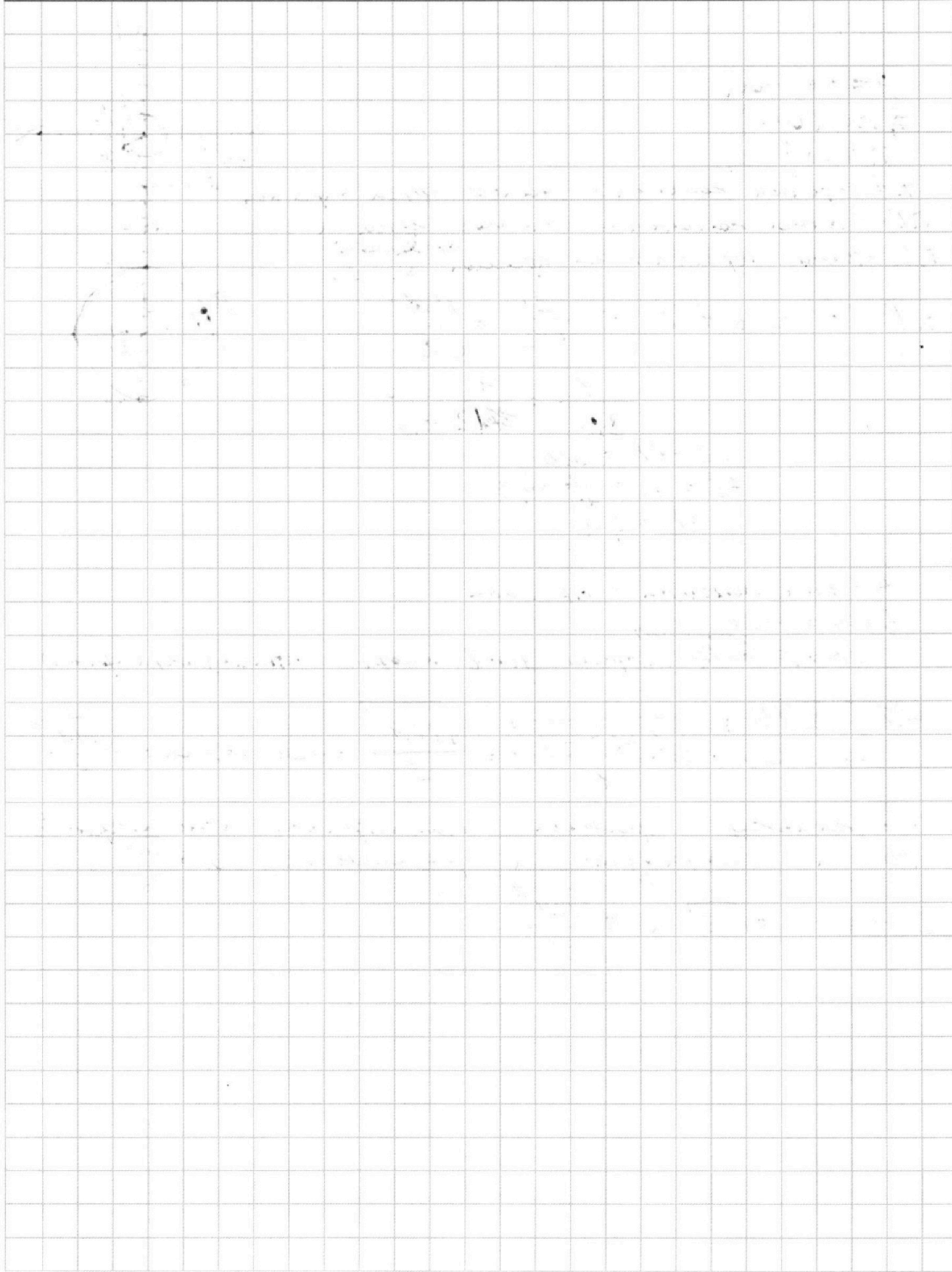
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} - 1 = 0$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$ab: 2^{15} \cdot 7^{11} \Rightarrow ab \geq 2^{15} \cdot 7^{11}$$

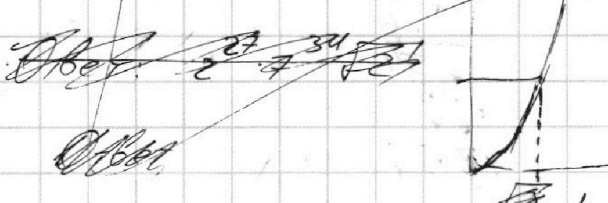
$$bc: 2^{17} \cdot 7^{18} \Rightarrow bc \geq 2^{17} \cdot 7^{18}$$

$$ca: 2^{23} \cdot 7^{39} \Rightarrow ca \geq 2^{23} \cdot 7^{39}$$

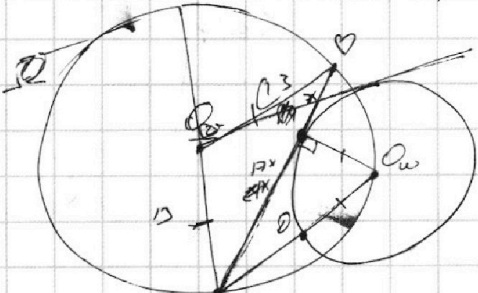
$$\Rightarrow abc \geq 2^{55} \cdot 7^{68} \quad (a, b, c \in \mathbb{N})$$

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{3x^2 - 6x + 2} & a^2 - b^2 &= 1 - 9x \\ b &= \sqrt{3x^2 + 3x + 1} & & \end{aligned}$$

$$\Rightarrow abc \geq \sqrt{2^{55} \cdot 7^{68}} = 2^{27} \cdot 7^{34} \sqrt{2}$$



$$\begin{aligned} 3x^2 - 6x + 2 &= 1 - 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} \\ a - b &= a^2 - b^2 \\ (a - b)(a + b) &= (a - b)AC \\ \frac{a + b}{AC} &= \frac{1}{2} \\ R_w &= 1 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 14 \cdot (a - b) &= \\ W &= -9x + 2 = 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} \\ 24x &> 26 \\ x &> \frac{26}{24} \\ 1 + 2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{2}{3}} + 2^1 + \dots + 2^{n-1} &= 2^{n+1} - 1 \end{aligned}$$

$$abc \geq 2^{27} \cdot 7^{34} \sqrt{2} \quad (17x)^2 = AD \cdot AO_w$$

$$D = 36 - 4 \cdot 3 \cdot 2 \quad AD = \frac{17^2 x^2}{29} \quad AD = \frac{17^2 x^2}{29} \quad 9 - 3\sqrt{3}\sqrt{1}$$

$$3x^2 - 6x + 2 = AD \cdot AO_w = AC^2 \quad \frac{17}{49} \quad \frac{17}{289}$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6} \quad AC^2 + CO_w^2 = AO_w^2 \quad \frac{15}{20} \quad \frac{17}{289}$$

$$= 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \quad AO_w = \sqrt{17^2 x^2 + 7^2} = \sqrt{289x^2 + 49}$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 - 3x - 3x + 3 - 1 = 3(x-1)^2 - 1$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

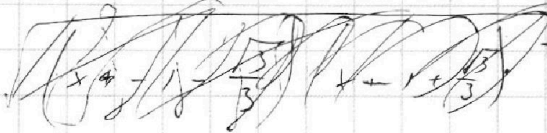
$$1 - 9x = 0 \\ x = \frac{1}{9}$$

$$3) D = 36 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 42 \quad 36 - 24 = 12$$

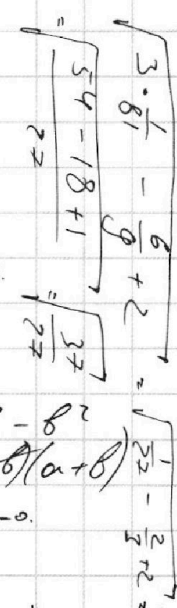
$$3x) D = 9 - 4 \cdot 3 = -3$$

$$3x^2 + 3x + 1 > 0$$

$$x = \frac{+6 \pm \sqrt{36}}{6} = 1 \pm \frac{\sqrt{36}}{6} = 1 \pm \frac{6}{6} = 1 \pm 1$$



$$3x^2 + 3x + 1 = 0 \\ x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 12}}{6} = \frac{-3 \pm \sqrt{-3}}{6}$$



$$НОД(10, 6) = 2$$

$$12x^2 + 12x + 4 = (80x^2 + 12x + 1) \cdot \frac{69}{12} - \frac{54x^2}{4}$$

$$НОД(a, b) = a^2 - 7ab + 6b^2 = m$$

$$69x^2 - 12x + 4 = 0$$

$$ab: 2^{15} \Rightarrow ab \leq 2^{15} \Rightarrow ab \geq 2^{15}$$

$$bc: 2^{14} \Rightarrow bc \leq 2^{14} \Rightarrow bc \geq 2^{14}$$

$$acd: 2^{23} \Rightarrow acd \geq 2^{23}$$

$$3^{-3+1} \Rightarrow ab \cdot bc \cdot ac \geq 2^{(15+14+23)} \cdot 7^{(11+13+39)}$$

$$1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 0 \quad \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \leq 1 \quad a^2 b^2 c^2 \geq 2^{55} \cdot 7^{68} \Rightarrow (a-b)(a+b) - (a-b) = (a-b)(a+b-1) = 0$$

$$3x^2 + 3x + 1 \leq 1 \quad abc \in \mathbb{N}$$

$$3x^2 + 3x \leq 0 \Rightarrow \sqrt{a^2 b^2 c^2} \geq \sqrt{2^{55} \cdot 7^{68}} = 2^{27} \cdot 7^{34}$$

$$x(3x+1) \leq 0 \quad 3x^2 + 4 \cdot 3x + 4 = 8x^2 - 29x^2 + 12x + 4 = 0$$

$$\sqrt{(3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1)} = 5\sqrt{2}$$

$$2 - x = \frac{0}{1} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{a+2+1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{1} \leq \sqrt{2} \leq \sqrt{4}$$

$$1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 0 \quad 1 < \sqrt{2} \leq 2$$

$$1 \geq 3x^2 + 3x + 1 \quad 5 \leq 5\sqrt{2} \leq 10$$

$$1 \geq 3x^2 + 3x + 1 \quad q - p = q - p^2$$

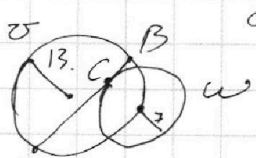
$$3x^2 + 3x \leq 0 \quad AC = 17$$

$$3x(3x+1) \leq 9x + 3 \quad CB = 7$$

$$(3x^2 - 6x + 2) - (3x^2 + 3x + 1) = 0$$

$$= -9x + 1 = 1 - 9x$$

$$2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 9x$$



$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 0$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$-9x + 1 = 0$$