



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{14}7^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{20}7^{37}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-12; 24)$ ,  $Q(3; 24)$  и  $R(15; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$ .

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1.

Так как  $ac : 2^{20} \cdot 7^{37}$ , то и число  $abc$  будет делить-  
ся на это произведение. То есть минималь-  
ное число  $abc \geq 2^{20} \cdot 7^{37}$  и  $ac \geq 2^{20} \cdot 7^{37}$ . Найдем  
минимальное  $b$ . Рассмотрим число на сме-  
рени 7. Тогда, пусть  $a = 2^m \cdot 7^{10}$ ;  $c = 2^n \cdot 7^{27}$ . Тогда  
первые два неравенства будут выполняться  
отнюдь семерки (то есть если рассмотрим  
выражение  $ab : 7^{10}$ ).

$ab : 2^{14} \cdot 7^{10}$  равносильно числу  $\begin{cases} ab : 2^{14} \\ ab : 7^{10} \end{cases}$

С-но, для минимизации числа  $b$  оно  
не делится на 7.

Тогда, пусть  $a = 2^m \cdot 7^{10}$ . Тогда  $c = 2^{(20-m)} \cdot 7^{10}$ .

С-но, если  $b = 2^x$ , то первые два выражения  
представим в виде.

$$\begin{cases} m+x \geq 14 \\ (20-m)+x \geq 14 \end{cases} \Rightarrow 20+2x \geq 31 \Rightarrow x \geq 5,5. \text{ Тогда, } m=8,5, \text{ но}$$

такого не можем быть, потому что тогда  
 $a$  - не натуральное. С-но, любая другая сте-  
пень  $x$  - не подходит. С-но,  $x=6 \Rightarrow m=8$ .

Тогда,  
 $a = 2^8 \cdot 7^{10}$ ;  $b = 2^6$ ;  $c = 2^{12} \cdot 7^{27}$   
Тогда,  $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

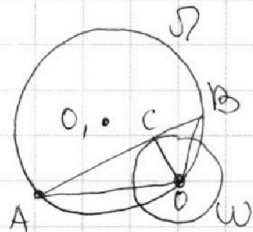
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(13)



Обозначим центр окр-ти  $\omega$  —  $O$ . Тогда,  
сечезои  $OC \perp AB$ . Но  $OC$  — вы кат-ой, но  
есть в  $\triangle AOB$ , выисан. в окр-ти  $\omega$ ,  $OC$  —  
выисане. Пусть  $|AB| = 8x \Rightarrow |AC| = 4x, |CB| = 4x$ .  
В туги тр-ке  $AO$   $AO = \sqrt{4x^2 + 1}$  по т. Пиф.  
Ам-но,  $OB = \sqrt{x^2 + 1}$ .

$$\begin{aligned} \text{Сн-но, } S_{AOB} &= \frac{1}{2} AB \cdot OC = \frac{1}{2} \cdot 8x = 4x. \\ S_{AOB} &= \frac{AO \cdot OB \cdot AB}{4 \cdot OB} = \frac{\sqrt{x^2 + 1} (\sqrt{4x^2 + 1}) \cdot 8x}{4 \cdot 5} \end{aligned}$$

$$\text{Т.о. } 4x = \frac{\sqrt{x^2 + 1} (\sqrt{4x^2 + 1}) \cdot 8x}{20}$$

$$49x^4 + 50x^2 + 1 = 100$$

$$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0.$$

$$\text{Пусть } t = x^2 \geq 0.$$

$$49t^2 + 50t - 99 = 0.$$

$$D = 625 + 4 \cdot 99 = 976 = 7^2 \cdot 16$$

$$t = \frac{-50 + 7 \cdot 4}{98} = 2$$

$$t = \frac{-50 - 7 \cdot 4}{98} < 0 \text{ — не могу.}$$

$$\text{Сн-но, } x^2 = 2 \text{ и т.к. } x > 0, \text{ то } x = \sqrt{2}.$$

$$\text{Сн-но, } |AB| = 8 \cdot x = 8\sqrt{2}$$

Ответ:  $8\sqrt{2}$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(14) Пусть  $k = 2x^2 - 5x + 3$   
 $m = 2x^2 + 2x + 1$ .

Тогда получаем уравнение  $\sqrt{k} - \sqrt{m} = k - m$

$$\sqrt{k} - \sqrt{m} = k - m$$

$$(\sqrt{k} - \sqrt{m}) = (\sqrt{k} - \sqrt{m})(\sqrt{k} + \sqrt{m})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{k} - \sqrt{m} = 0 \\ \sqrt{k} + \sqrt{m} = 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{k} = \sqrt{m} \\ \sqrt{k} + \sqrt{m} = 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k = m \\ k \geq 0 \\ m \geq 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k = m \\ k \geq 0 \\ m \geq 0 \\ \sqrt{k} + \sqrt{m} = 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 2x + 1 \\ x \in (-\infty; 1] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in (-\infty; 1] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{2}{7} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1 \end{array} \right.$$

Сложим второй ур-не с ур-нем из условия. Тогда

$$2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 3 - 7x$$

$$8x^2 - 20x + 12 = 9 - 42x + 49x^2$$

$$41x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$D = 22^2 + 3 \cdot 41 = 121 + 123 = 244 = 2\sqrt{61}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} \\ x = \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41} \end{array} \right.$$

оба корня подходят  
в ОДЗ.

Ответ:  $\frac{11 - 2\sqrt{61}}{41}; \frac{2}{7}; \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

И-но, у прямых  $y_1 = -2x_1 + (a-12)$  и  $y_2 = -2x_2 + a$

$a \in [0; 30]$  и  $(a-12) \in [0; 30]$ .

И-но, мы имеем  $(30-12)^2 = 144$  пар  
прямых. И-но, если мы можем считать из  
них 10 пар первой линии и 9 пар второ-  
рой линии. И-но, любой может заменить  
на прямой из пары, соответствующей  
12 или 13 точек (зависимости от линии ко-  
орд), заменяющих на второй прямой из  
пары. Т.о., всего у нас  $10 \cdot 13^2 + 9 \cdot 12^2$  пар  
линий.

$$10 \cdot 169 + 9 \cdot 144 = 1690 + 1296 = 2986.$$

Ответ: 2986 пар.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(№5.)

$$2x_2 + y_2 - 2x_1 - y_1 = 12.$$

Если  ~~$y_1 = -2x_1 + a$~~ , то  ~~$y_2 = -2x_2 + (12 - a)$~~

$y_2 + 2x_2 = a$ , то  $y_1 + 2x_1 = (a - 12)$ .

Эти два уравнения задают нам две параллельные прямые, расположенные на 12 единиц одна выше другой. Они имеют коэффициент наклона  $(-2)$ . Найдем уравнение боковой грани пар.-линии (ОП).

$$\begin{cases} 0 = 0 + b \\ 12 = -12k + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ k = -2 \end{cases}$$

т.е. прямые параллельными прямыми параллельными.

Прямые вида  $y = -2x + b$  можно разделить на два вида:

- 1) линия уже проходит через центральную точку на "верхней" грани пар.-линии
- 2) не проходит.

Первый вид прямых задается уравнением  $y = -2x + 20$   
второй вид прямых —  $y = -2x + (20 - 12)$

Т.е., прямые  $y_1 = -2x_1 + (a - 12)$  и  $y_2 = -2x_2 + a$  — одного типа, т.к.  $-12$  — четное. Прямые первого вида проходят через 13 центральных точек (все диагональные 12 и 1 касательная угловая), а второго типа — 12 ~~и~~  $1/2$  точек. Найдем количество прямых каждой типа: на верхней стороне пар.-линии 16  $1/2$  точек (т.к. ее длина  $15 - 0 = 15$ ), т.е. прямых 16, а прямые второго типа расположены между ними, то есть их 15. Вторую боковую сторону пар.-линии задает уравнением  $y = -2x + 30$ , т.к.

$$\begin{cases} 0 = 15k + b \\ 12 = 3k + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = -2 \\ 15k + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = -2 \\ b = 30 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

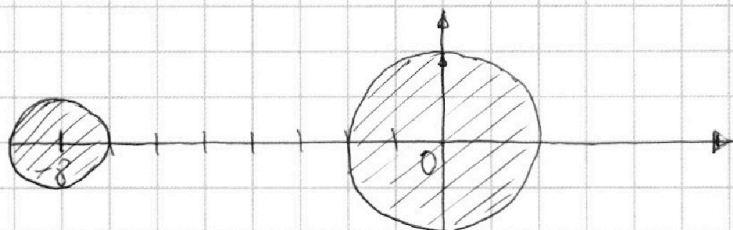
1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Второе уравнение задает нам две окружности с центрами  $(-3; 0)$  и  $(0; 0)$  и радиусами  $1$  и  $2$  соответственно.



Первое ур-ие задает нам прямую  $y = ax + 10b$ .  
 И-но, <sup>система</sup> ~~что~~ уравнение имеет две решения, ~~то~~ прямая должна иметь ровно две общие точки с окружностью или с одной из них. С одной окр-тью она может иметь либо ровно одну общую точку, либо не иметь, либо иметь бесконечно много. С двумя окр-тями она может иметь 2 общие точки если будет касательной к ним (внутренней или внешней).

$$\text{т.о. } \begin{cases} y = ax + 10b \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = ax + 10b \\ y = \sqrt{4 - x^2} \end{cases}$$

$$ax + 10b = \sqrt{4 - x^2}$$

$$a^2 x^2 + 20abx + 100b^2 = 4 - x^2$$

$$(a^2 + 1)x^2 + 20abx + 100b^2 - 4 = 0$$

И-но ур-ие имеет одну общую точку  $D = 0$ .

$$D_1 = 100a^2b^2 - 100a^2b^2 - 100b^2 + 4a^2 + 4 = 0$$

$$100b^2 = 4a^2 + 4$$

$$25b^2 = a^2 + 1$$

$$b = \pm \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{5}$$

$$\text{И-но } \begin{cases} y = ax + 10b \\ y = \sqrt{1 - (x+3)^2} \end{cases} \Rightarrow ax + 10b = \sqrt{1 - (x+3)^2} \Rightarrow a^2 x^2 + 20abx + 100b^2 = 1 - (x+3)^2$$

$$(1 + a^2)x^2 + (20ab + 16)x + 100b^2 + 63 = 0$$

$$D_2 = (10ab + 8)^2 - (100b^2 + 63)(a^2 + 1) = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$100a^2b^2 + 160ab + 64 - 100a^2b^2 - 100b^2 - 63a^2 - 63 = 0.$$

$$160ab + 1 - 100b^2 - 63a^2 = 0$$

$$100b^2 - 160ab + 63a^2 - 1 = 0.$$

$$D_b = 80^2a^2 - 6300a^2 + 100 = 100(a^2 + 1) = (10\sqrt{a^2 + 1})^2$$

~~$$b = \frac{80a + 10\sqrt{a^2 + 1}}{100} = \frac{8a + \sqrt{a^2 + 1}}{10}$$~~

~~$$b = \frac{80a - 10\sqrt{a^2 + 1}}{100} = \frac{8a - \sqrt{a^2 + 1}}{10}$$~~

Т.о., где первой окр-ми  $b = \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{5}$   
где второй окр-ми:  $b = \frac{8a - \sqrt{a^2 + 1}}{10}$

Сл-но, касаясь применяя формулу касательной  
одной из окр-ми, сл-но, b где перв.  
окр-ми равно b — где второй. Если ~~какая~~  
~~то 2 равносильных уравнения~~

$$\frac{\sqrt{a^2 + 1}}{5} = \frac{8a - \sqrt{a^2 + 1}}{10}$$

$$2\sqrt{a^2 + 1} = 8a$$

$$a^2 + 1 = 64a^2$$

$$a^2 = \frac{1}{63}$$

$$a = \pm \frac{1}{\sqrt{63}}$$

$$\frac{\sqrt{a^2 + 1}}{5} = \frac{8a + \sqrt{a^2 + 1}}{10}$$

$$a^2 + 1 = 64a^2$$

$$a^2 = \frac{1}{63}$$

$$a = \pm \frac{1}{\sqrt{63}}$$

$$\frac{\sqrt{a^2 + 1}}{5} = \frac{8a + \sqrt{a^2 + 1}}{10}$$

$$9a^2 + 1 = 64a^2$$

$$a^2 = \frac{9}{55}$$

$$a = \pm \frac{3}{\sqrt{55}}$$

$$\frac{\sqrt{a^2 + 1}}{5} = \frac{8a - \sqrt{a^2 + 1}}{10}$$

$$a^2 + 1 = 64a^2$$

$$a^2 = \frac{1}{63}$$

$$a = \pm \frac{1}{\sqrt{63}}$$

Таким образом, имеем 4 значения

а.

Ответ:  $-\frac{3}{\sqrt{55}}$ ;  $-\frac{1}{\sqrt{63}}$ ;  $\frac{1}{\sqrt{63}}$ ;  $\frac{3}{\sqrt{55}}$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

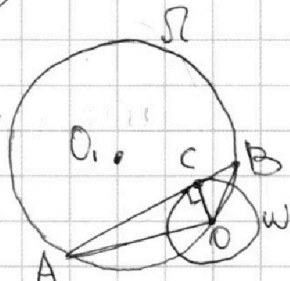
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2



Обозначим центр окр-ти  $\omega$  —  $O$ . Тогда, отрезки  $OC \perp AB$  по свойству касательной, то есть в прямоугольнике  $AOB$ , вписанном в окр-ть  $\Omega$ ,  $OC$  — высота. Обозначим длину стороны  $AB = 8x \Rightarrow AC = 7x$ ,  $CB = x$ .

$$\text{Т.о.}, S_{AOB} = OC \cdot AB \cdot \frac{1}{2} = 1 \cdot 8x \cdot \frac{1}{2} = 4x.$$

В  $\triangle AOB$  по теореме Пифагора  $AO = \sqrt{AC^2 + x^2} = \sqrt{49x^2 + 1}$  по т. Пифагора.  
Синус,  $\sin \alpha = \frac{OB}{AO} = \frac{x}{\sqrt{49x^2 + 1}}$ .

$$\text{Т.о.}, S_{AOB} = \frac{AO \cdot OB \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{\sqrt{49x^2 + 1} \cdot x \cdot \frac{x}{\sqrt{49x^2 + 1}}}{2} = \frac{49x^2 + 1}{4 \cdot 2} \cdot 8x = 4x.$$

$$\sqrt{(49x^2 + 1)(x^2 + 1)} = 10$$

$$49x^4 + 50x^2 + 1 = 100.$$

$$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$$

$$\text{Пусть } t = x^2 \geq 0.$$

$$49t^2 + 50t - 99 = 0.$$

$$D = 25 \cdot 25 + 99 \cdot 49 = 5476 = (74)^2$$

$$t = \frac{-25 + 74}{98} = 1$$

$$t = \frac{-25 - 74}{98} < 0 \rightarrow \text{не возм.}$$

$$\text{Синус, } x^2 = 1. \text{ Т.к. } x > 0, \text{ то } x = 1.$$

$$\text{Синус, } |AB| = 8x = 8$$

Ответ: 8.





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{w2.} \quad \frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{a+b}{(a-b)^2-4ab}$$

См-но, если можно можно сократить  
на  $m$ ,  $m$ ,  $m$

$$\begin{aligned} a+b &= km \\ (a-b)^2 &= n^2 m + b \\ 4ab &= fm + b \end{aligned}$$

~~8.~~

$\pm 8.$

$$\frac{11+16}{4} = \frac{27}{4} \approx 7.$$

$$\frac{11-16}{4} = -\frac{5}{4}$$



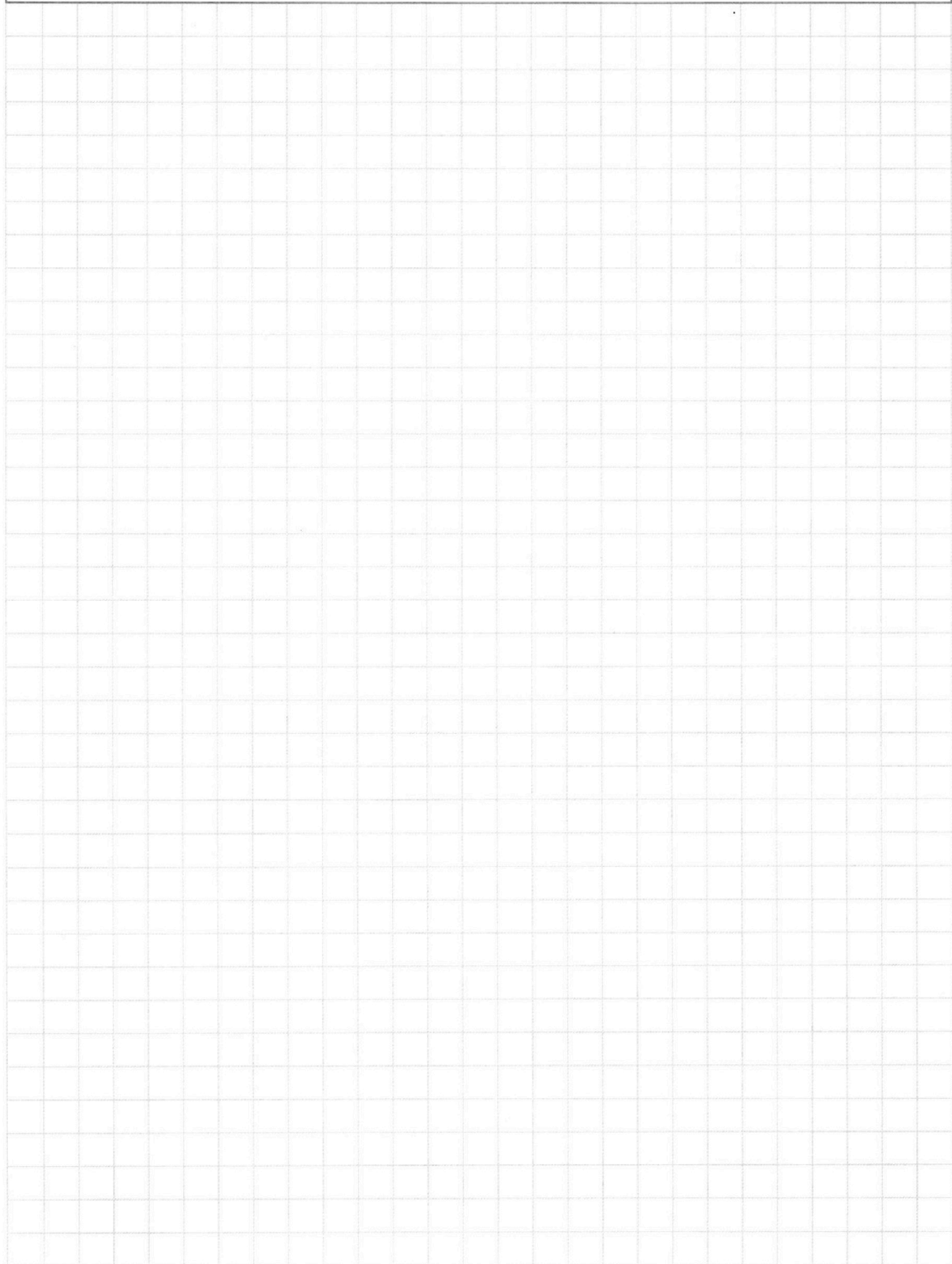
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{a+b}{(a-b)^2 - 4ab} = \frac{7}{1-48} = \frac{7}{-47}$$

$$\frac{4}{3} = \frac{a}{6}$$

$$\frac{4+3}{4^2+3^2-6 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{7}{25-22}$$

$$a = qm + l$$

$$b = cm + z$$

$$a+b = km$$

$$a-b = pm$$

$$4ab = fm$$

$$(qm+l)(cm+z) = u = fm$$

$$(qm+l)(cm+z)$$

$$(qcm^2 + (c+l)zm + lz) = fm$$

$$a^2 + b^2 = km + c$$

$$4ab = 2m + (m-c)$$

$$a+b = m$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = m^2$$

$$km + c + \frac{1}{3}m + \frac{m}{3} - \frac{c}{3} = m^2$$

$$m(k + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}) + \frac{2}{3}c = m^2$$

$$k + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = m$$

$$\frac{2}{3}c = m^2$$

~~$$2c = m^2$$~~

$$2c = m^2$$

$$2m - 20 = m$$

$$m \geq 20$$

$$20 = m$$

$$a+b = m$$

$$a^2 + b^2 = km + c$$

$$4ab = 2m + (m-c)$$

$$2ab = \frac{1}{3}m + \frac{c}{3} - \frac{m}{3}$$

$$a^2 + b^2 = m^2$$

$$c < m$$

$$km + c + \frac{1}{3}m - \frac{m}{3} + \frac{c}{3} = m^2 \quad 2c = m$$

$$(k + \frac{1}{3} - \frac{1}{3})m + c(1 + \frac{1}{3}) = m^2 \quad c = \frac{m}{2}$$

$$\frac{4}{3}c = m^2$$

$$c \leq m$$

$$2c \geq m$$

~~$$2c = m$$~~

~~$$c = 0$$~~

$$c = 0$$

$$c < m$$

$$2c = m^2$$

$$2c + m \geq m + c$$

$$c \geq 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2x^2 - 5x + 3 - 2x^2 - 2x - 1 = -7x + 2.$$

$$\sqrt{k} - \sqrt{m} = k - m. \quad k \geq 0$$

$$k + m - \sqrt{km} = k^2 - 2mk + m^2. \quad m \geq 0$$

$$k - \sqrt{k} = m - \sqrt{m}.$$

$$k^2 + k - 2k\sqrt{k} = m^2 + m - 2m\sqrt{m}.$$

$$k - m = k^2 - m^2.$$

$$(k - m) = (k - m)(k + m)$$

$$\sqrt{k} - \sqrt{m} = 0$$

$$\sqrt{k} = \sqrt{m} \Rightarrow k = m$$

$$\sqrt{k} + \sqrt{m} = 1.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 4a^2 - 100b^2 + 4 = 0 \\ 63a^2 - 160ab + 100b^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$67a^2 - 160ab + 3 = 0$$

$$b = \frac{67a^2 + 3}{160a}$$

$$y = ax + 10b$$

$$y^2 = 4 - x^2$$

$$a^2x^2 + 20abx + 100b^2 = 4 - x^2$$

$$(a^2 + 1)x^2 + (20ab)x + 100b^2 - 4 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 100a^2b^2 - 100a^2b^2 - 100b^2 + 4 + 4a^2 = 0$$

$$\begin{aligned} 4a^2 + 4 &= 100b^2 \\ b^2 &= \frac{4a^2 + 4}{100} \Rightarrow b = \frac{2\sqrt{a^2 + 1}}{10} \\ b &= -\frac{1}{5}\sqrt{a^2 + 1} \end{aligned}$$

$$\frac{67a^2 + 3}{160a} = \frac{2\sqrt{a^2 + 1}}{10}$$

$$\frac{67a^2 + 3}{32} = 2\sqrt{a^2 + 1}$$

$$4489a^4 + 402a^2 + 9 = 1024a^2 + 1024$$

$$4489a^4 - 622a^2 - 1015 = 0$$

$$311 \cdot 311 + 1015 \cdot 4489$$

$$\begin{array}{r} \times 2156 \\ 2156 \\ \hline 12786 \\ 10780 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 311 \\ 311 \\ \hline 311 \\ 933 \\ \hline 96724 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 4489 \\ 1015 \\ \hline 22445 \\ 4489 \\ \hline 0000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 24489 \\ \hline 4556335 \\ 96721 \end{array}$$

$$4653056$$

$$\begin{array}{r} \times 67 \\ 67 \\ \hline 469 \\ 402 \\ \hline 4489 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 32 \\ 32 \\ \hline 64 \\ 96 \\ \hline 1024 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 205 \\ 205 \\ \hline 1025 \\ 0000 \\ 410 \\ \hline 42025 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 215 \\ 215 \\ \hline 1075 \\ 215 \\ \hline 430 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 46225 \\ \times 216 \\ 216 \\ \hline 1296 \\ 216 \\ \hline 432 \\ \hline 46656 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

**МФТИ**

- 1  2  3  4  5  6  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$80^2 a^2 - 63a^2 + 100 = 0.$$

$$100a^2 + 100 = 0. \quad (100a^2 + 1)^2$$

$$b = \frac{80a + 10\sqrt{a^2 + 1}}{100} = \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{5}$$

$$100a^2 + 1 = 809.$$

$$\sqrt{a^2 + 1} = 89. \quad a > 0.$$

$$a^2 + 1 = 649.$$

$$a^2 - 649 + 1 = 0.$$

$$64^2 + 4 = 0.$$

$$\sqrt{\frac{64}{64}} = \frac{64}{64} = 1.$$

$$+ 62x^2 - x - 3 + (4x^2 - 4x - 50)(x^2 + 8x^3)$$

$$50 \cdot 4x^3 \rightarrow$$

$$4x^4 - 8x^3 - 2x^2 + x + 3 = 4x^2 + 62x^2 + 3 = 66x^2 + 3$$

$$4x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 10x^3 - 10x^3 - 2x^2 + 2x + 3 = 4x^4 - 18x^3 + 2x^2 + 2x + 3$$

$$50 \cdot 4x^3 \rightarrow$$

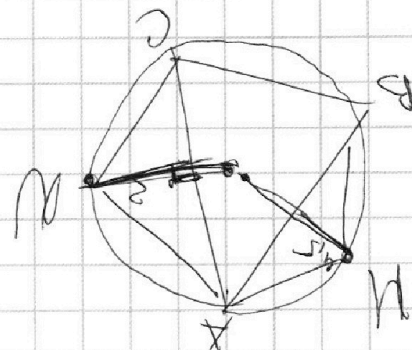
$$4x^4 - 18x^3 + 2x^2 + 2x + 3 = (2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 3)$$

$$4x^4 - 18x^3 + 2x^2 + 2x + 3 = 4x^4 - 10x^3 - 8x^3 + 2x^2 + 2x + 3 = 4x^4 - 18x^3 + 2x^2 + 2x + 3$$

$$= 2x^2 + 2x + 1 + 4$$

$$= 2x^2 - 5x + 3 + 4x^2 + 14x^2 + 49x^2 + 3 + 5x + 3 = 21x^2 + 12x + 9$$

$$= 21x^2 - 5x + 3 + 4x^2 + 14x^2 + 49x^2 + 3 + 5x + 3 = 64x^2 + 12x + 9$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(√4)

$$\sqrt{(x-1)(x-\frac{3}{2})} - \sqrt{\dots}$$

$$x \in (-\infty; 1) \cup (\frac{3}{2}; +\infty)$$

$$2x^2 - 5x + 3 + 2x^2 + 2x + 1 - \sqrt{\dots} = 4 - 3x + 4x^2$$

$$-45x^2 + 11x = \sqrt{\dots}$$

$$(x(45x-11))^2 = (2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1)$$

$$4x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 10x^3 - 10x^2 - 5x + 6x^2 + 6x + 3 =$$

$$= 4x^4 - 6x^3 - 2x^2 + x + 3 = 0$$

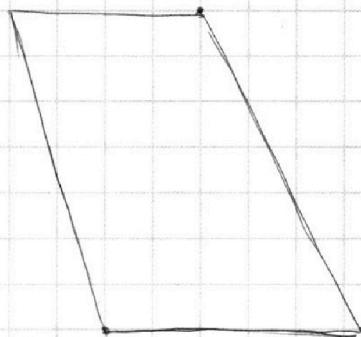
45x

$\times 45$   
 $\frac{45}{45}$   
225

$$45^2 x^4 -$$

$$2x_1 + y_1 = 12 + 2x_2 + y_2$$

$$x + y = 3$$



$$400a^2b^2 -$$

$$= 100a^2b^2$$

$$4a^2 - 100b^2 + 4 = 0$$

$$(a^2+1)(100b^2-4)$$

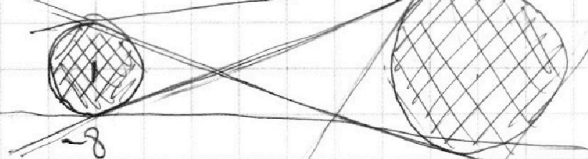
$$100a^2b^2 + 100b^2 - 4a^2 + 4$$

$$100a^2b^2$$

$$4a^2 + 4 = 100b^2$$

$$(a^2+1)x^2 + 2abx + 100b^2 - 4 = 0$$

$$\frac{\sqrt{a^2+1}}{10} = b$$



$$ax + 10b = x^2 + y^2 - 4$$

$$ax + 10b = \sqrt{-x^2+4}$$

$$(ax)^2 + 20abx + 100b^2 = 4 - x^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

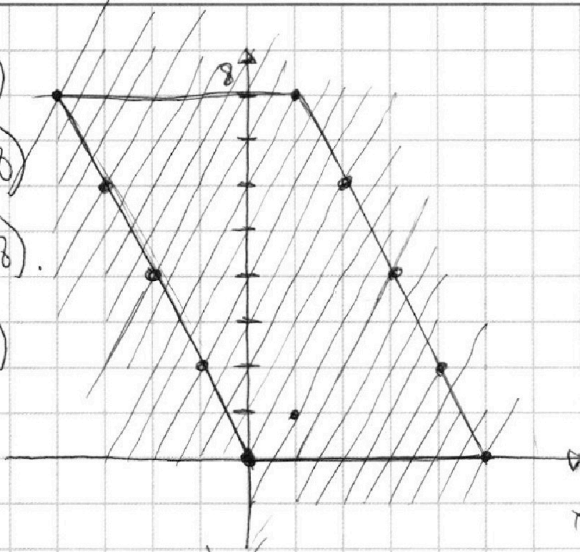
- 1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$O(0; 0)$   
 $P(-4; 8)$   
 $Q(2; 8)$   
 $R(5; 0)$



$$2x - y = 2$$

$$y = 2x - 2$$

$$2x - y =$$

$$2x + y = 1$$

$$2x - y = 11$$

$$0 = \frac{1690}{1296}$$

$$20 - 8$$

$$12 \cdot 4$$

$$\frac{144}{9} = 1296$$

$$12 \cdot 14$$

$$\frac{14}{12} = 28$$

$$\frac{14}{12} \times 168 = 196$$

$$\frac{7}{4}$$

$$30$$

$$\frac{12}{30}$$

$$\frac{360}{16} = 22.5$$

$$388$$

8 и 5.

7 и 4.

7 и 4.

$$ax + 10b = (x + 8)^2 + 2$$

$$a^2 x^2 + 20abx + 100b^2 = \Delta - x^2 - 16x - 64$$

10.

$$(a^2 + 1)x^2 + (20ab + 16)x + (100b^2 + 63)$$

$$(20ab + 16)^2$$

$$(100b^2 + 8)^2$$

$$100a^2b^2 + 160ab + 64 -$$

$$100a^2b^2 - 63a^2 - 100b^2 - 63$$

$$63a^2 - 160ab + 100b^2 - \Delta = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r}
 \times 1227 \\
 1227 \\
 \hline
 8589 \\
 2454 \\
 2454 \\
 1227 \\
 \hline
 1505529
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \times 1243 \\
 1243 \\
 \hline
 3729 \\
 4972 \\
 2486 \\
 1243 \\
 \hline
 1545049
 \end{array}$$

$$\times 1300$$

$$\begin{array}{r}
 \times 13 \\
 13 \\
 \hline
 39 \\
 13 \\
 \hline
 1690000
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \times 1297 \\
 1297 \\
 \hline
 9079
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \times 1293 \\
 1293 \\
 \hline
 3879
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \times 1287 \\
 1287 \\
 \hline
 09 \\
 6
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 11673 \\
 1594 \\
 \hline
 1297 \\
 1582209
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 11637 \\
 2586 \\
 \hline
 1293 \\
 1671849
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \times 6351 \\
 2401 \\
 \hline
 6351
 \end{array}$$

$$\frac{abc}{4R} = \frac{1}{2} ah_a$$

$$\begin{array}{r}
 0000 \\
 25404 \\
 12702 \\
 \hline
 15248752
 \end{array}$$

$$\frac{8x \cdot \sqrt{x^2+1} \cdot \sqrt{x^2-49+1}}{20} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 8x$$

$$\sqrt{(x^2+1)(49x^2+1)} = 10$$

$$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$$

$$625 + 441$$

$$\begin{array}{r}
 \times 25 \\
 25 \\
 \hline
 125 \\
 50 \\
 \hline
 625
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \times 49 \\
 49 \\
 \hline
 441
 \end{array}$$

$$1086$$

$$\begin{array}{r}
 \times 49 \\
 49 \\
 \hline
 441 \\
 441 \\
 \hline
 4851 \\
 625 \\
 \hline
 5476
 \end{array}$$

$$8x \cdot \sqrt{(x^2+1)(49x^2+1)} = 4x$$

$$\begin{array}{r}
 -25+74 \\
 \hline
 49
 \end{array}$$

$$\sqrt{\frac{99}{49}}$$

$$\frac{9}{7} \sqrt{11}$$

$$\begin{array}{r}
 \times 74 \\
 74 \\
 \hline
 296 \\
 518 \\
 \hline
 5476
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \times 36 \\
 36 \\
 \hline
 216 \\
 108 \\
 \hline
 1296
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 -25+74 \\
 \hline
 49
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \times 76 \\
 76 \\
 \hline
 353 \\
 532 \\
 \hline
 5673
 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab : 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc : 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$ac : 2^{20} \cdot 7^{37}$$

~~$$2^{14} \cdot 7^{10}$$~~

$$2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$a = 2^{10} \cdot 7^{20}$$

$$c =$$

$$b = 2^6$$

$$a = 2^8 \cdot 7^{10}$$

$$c = 2^{12} \cdot 7^{27}$$

$$m + x \geq 14$$

$$(20 - m) + x \geq 17$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}$$

$$1500625 + 153664 =$$

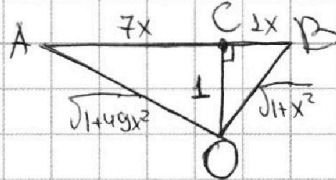
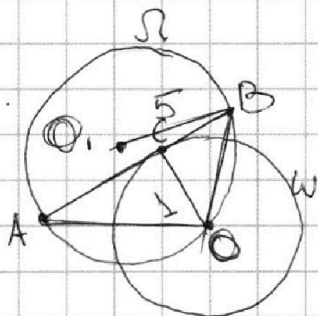
=

$$\frac{1}{4} = 9 - 1 = (2\sqrt{2})^2 \cdot \frac{1}{2} \quad \begin{cases} a = (3 + 2\sqrt{2})b \\ a = (3 - 2\sqrt{2})b \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} + 1500625 \\ + 153664 \\ \hline 1654289 \end{array}$$

$$a+b$$

$$(a - (3 + 2\sqrt{2})b)(a - (3 - 2\sqrt{2})b)$$



$$\begin{array}{r} \times 1303 \\ 1303 \\ \hline 09 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 227 \\ 227 \\ \hline 8589 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6400 \\ \hline 49 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 4927 \\ 4927 \\ \hline 999529 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 441 \\ 196 \\ \hline 2401 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 2450 \\ 2450 \\ \hline 0000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 1225 \\ 1225 \\ \hline 6125 \\ 2450 \\ \hline 1225 \\ \hline 1500625 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 2401 \\ 2401 \\ \hline 9604 \\ 14406 \\ \hline 153664 \end{array}$$

$$80x = 7x \sqrt{(1+x^2)(1+49x^2)}$$

$$\left(\frac{80}{7}\right)^2 = 49x^4 + 50x^2 + 1$$

$$2401x^4 + 2450x^2 - 6400 = 0$$

$$\begin{array}{r} 12250 \\ 9800 \\ \hline 4900 \\ 6002500 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} - 6400 \\ \hline 49 \\ 6351 \end{array}$$