МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10

$\sqrt{169-144x^2}$ $=119x^2-49$

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

$3(x+1)^2-3x$

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x.$$

$1-3\cdot 3x$

$3(x-1)^2-1$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=14$.

x^2-4x+1 $2x^2-4x+1$

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система

$(x-1)^2$ $(2x-1)(x-1)$

$$\begin{cases} ax+y-8b=0, \\ (x^2+y^2-1)\left(x^2+(y-12)^2-16\right) \leqslant 0 \end{cases}$$

x^2-3x+1

$(x-2)(x-1)$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 5 и 2,5.

x^2-3x+2

$(x-2)(x-1)+3x+2x^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 7

$ab \vdots 2^{15} 7^{11}$ $bc \vdots 2^{17} 7^{18}$ $ac \vdots 2^{23} 7^{39}$

$a = 2^{x_1} 7^{x_2} \cdot k_1$ $k_i \not\vdots 2; 7$

$b = 2^{y_1} \cdot 7^{y_2} \cdot k_2$

$c = 2^{z_1} \cdot 7^{z_2} \cdot k_3$

$ab = 2^{x_1 + y_1} \cdot 7^{x_2 + y_2} \cdot k_1 \cdot k_2 \vdots 2^{15} 7^{11}$

$x_1 + y_1 \geq 15$

$x_2 + y_2 \geq 11$

аналогично: $y_1 + z_1 \geq 17$ $y_2 + z_2 \geq 18$ $x_1 + z_1 \geq 23$

$x_2 + z_2 \geq 39$

$\begin{cases} x_1 + y_1 \geq 15 \\ \cancel{y_1 + z_1 \geq 17} \\ \cancel{x_1 + z_1 \geq 23} \end{cases}$

~~прогум. все выражения для аналогии~~ $\cancel{2x_2 + 2y_2 + 2z_2 \geq 18 + 39 + 11}$ но он не меньше 39.

$\cancel{x_2 + y_2 + z_2 \geq 34 < 39 \Rightarrow x_2 + y_2 + z_2 \geq 39}$

$\cancel{abc = 2^{x_1 + y_1 + z_1} \cdot 7^{x_2 + y_2 + z_2} \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot k_3}$

$\geq 2^{23} \cdot 7^{34}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1 продолж.

$$\begin{cases} x_1+y_1\geq 15 \\ y_1+z_1\geq 17 \\ x_1+z_1\geq 23 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2+y_2\geq 11 \\ y_2+z_2\geq 18 \\ x_2+z_2\geq 35 \end{cases}$$

$$2x_1+2y_1+2z_1\geq 55 \qquad 2x_2+2y_2+2z_2\geq 78$$

$$x_1+y_1+z_1\geq \underbrace{27{,}5}_{x_1,y_1,z_1 - \text{целые}} \qquad x_2+y_2+z_2\geq 39$$

$$x_1+y_1+z_1\geq 28$$

$$\Rightarrow abc = 2^{x_1+y_1+z_1}\cdot 7^{x_2+y_2+z_2}\cdot k_1\cdot k_2\cdot k_3 \geq$$

$$\geq 2^{28}\cdot 7^{39}.$$

Это выражение достигается при

$x_1=10$ $\qquad x_2=11$

$y_1=5$ $\qquad y_2=0$

$z_1=13$ $\qquad z_2=18$

$a=2^{10}\cdot 7^{11}$ $\quad b=2^5$ $\quad c=2^{13}\cdot 7^{18}$

$$\underbrace{abc = 2^{28}\cdot 7^{39}}_{\text{Ответ:}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$a+b \vdots m$ $a^2-7ab+b^2 = a^2+2ab-9ab+b^2$

$= (a+b)^2 - 9ab \ \vdots m$

$\vdots m \Rightarrow 9ab \vdots m$ ~~если что~~, а

или либо $a \vdots$, либо $b \vdots m$, то раз

$a+b \vdots m$, то и a, и $b \vdots m \Rightarrow$

a и $b \vdots m \Rightarrow 9 \vdots m$ $m \leq 9$

для $m=9$ $a=4$ $b=5$

$a+b=9$ $a^2-7ab+b^2=-99$

$-\frac{9}{99}$ сокр. до $-\frac{1}{11}$

Ответ: $m=9$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

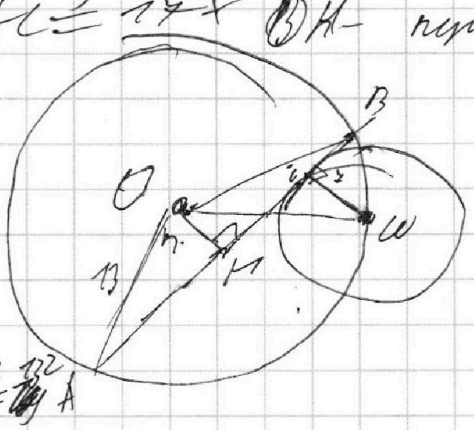
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$BC = 7x$ $AC = 17x$ 13 BH – перп AB к из цен O

$BH = H$



$AH = BH = 12x$

$CH = 5x$

$\omega C \parallel OH$

$\Rightarrow h^2 + (12x)^2 = 13^2$

$(h+7)^2 + (5x)^2 = 169$ / мы можем параллельно сдвинуть CH так, что C перейдет в точку ω и получим прямоугольник со сторон

$h+7$; $5x$ и 13

$h^2 + 144x^2 = 169$ $\quad h = \sqrt{169 - 144x^2}$

$h^2 + 14h + 49 + 25x^2 = 169$

$119x^2 - 49 = 14h$

$119x^2 - 49 = 14\sqrt{169 - 144x^2}$

$17x^2 - 7 = 2\sqrt{169 - 144x^2}$

$289x^4 - 238x^2 + 49 = 676 - 576x^2$

$289x^4 + 338x^2 - 627 = 0$

$x^2 = \frac{-338 + \sqrt{338^2 + 627 \cdot 289 \cdot 4}}{2 \cdot 289} = \frac{169}{289}$

$x = \frac{13}{17}$ $\quad AB = \frac{13}{17} \cdot 24 = \frac{312}{17}$

Ответ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\cancel{\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=7-9x}$$

$$\cancel{3x^2-6x+2+3x^2+3x+1-2\sqrt{27x^4-27x^3\ldots+2}}$$

$$\cancel{= \ldots \quad 81x^2-18x+1}$$

1) $(3x^2-6x+2)-(3x^2+3x+1)=7-9x$

$\Rightarrow 7-9x=\left(\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}\right)=$

$=\left(\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}\right)\cdot\left(\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2-3x+1}\right)$

$\Downarrow$

$$\cancel{\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}=7}$$

$$\cancel{\Rightarrow 2\sqrt{3x^2-6x+2}=7+(7-9x)}$$

$$\cancel{12x^2-24x+8=81x^2-36x+4}$$

$$\cancel{69x^2-12x-4=0}$$

2) $\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}=7$

Вычтем из ур. 2 ур. 1

$2\sqrt{3x^2+3x+1}=9x$

$12x^2+12x+4=81x^2$

$69x^2-12x-4=0$

$x=\dfrac{12\pm\sqrt{1248}}{2\cdot 78}=\dfrac{12\pm 4\sqrt{78}}{276}$

Ответ: $x=\dfrac{12\pm 4\sqrt{78}}{276}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№5

Возьмем все графики вида $2x+y=k$. Заметим, что ~~т~~ такая прямая параллельна стороны OP и QR паралл. => для всех k от 0 (прямая OP) до ~~QR(32)~~ до 32 (прямая QR) если мы берем две точки $x_1 y_1$ и $x_2 y_2$ так, что $(2x_2+y_2)-(2x_1+y_1)=14$, то есть $2x_2+y_2=k_2$ и $2x_1+y_1=k_1$, то мы можем взять любые ~~ки~~ точки вместо ~~A~~ и B, которые лежат на $2x+y=k_1$ и $2x+y=k_2$

для каждой прямой в параллелограмме лежит 26 целых точек (это видно из того, что каждые параллельные прямые покрывают одинаковое кол-во точек) если k - четно и 25 если ~~t~~ k - нечетно~~е~~, очевидно что здесь k_1 и k_2 - равной четности

пар между четными чтобы из ~~разн~~ пар 14 - 10 - способов выбрать 2 точки - 26^2, нечетных 9 из 2-х линий ст. выбрать - 25^2. Ответ: всего пар. $\boxed{10\cdot 26^2+9\cdot 25^2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№6 стр. 1

$y = 3b - ax$

$f(x) = (x^2 + (3b-ax)^2 - 1)(x^2 + (3b-ax-12)^2 - 10) \le 0$

эта $f(x)$ непрерывна. заметим, что если она в какой-то $x<0$, то это значит, что можно найти интервал на котором она <0

(пусть в x_0 $f(x)<0$ тогда (мы можем это сделать, т.к. она непр.) по опред. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ для любого $\varepsilon>0$ сущ. $\delta>0$ так, что для любого x из $(x-\delta; x+\delta)$ $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow$ возьмем $\varepsilon < -f(x_0)$ тогда сущ δ, что на отрезке $(x-\delta; x+\delta)$ $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow f(x)<0$). $\Rightarrow$

Если у $f(x)$ два точечных решения то это только если это случай с $f(x)=0$ $\underbrace{(x^2+(3b-ax)^2-1)}_{g(x)}\underbrace{(x^2+(3b-ax-12)^2-10)}_{Q(x)}=0$ имеют 2 корня и не имеет $f(x)<0$

~~Это~~ ~~Числа~~ $g(x)$ и $Q(x)$ – параб с одинак. знаком при x^2 $(1+a^2)$ – они сонаправлены

~~[illegible]~~ или у $g(x)$ корни – x_1 и x_2

№6 стр. 3

$\Rightarrow 24ax - 192b + 129 = 0$ всегда (т.к. это лин функц и если у неё 2 корня, то все числа — её корни)

$\Rightarrow a = 0 \quad 128 - 192b = 0 \quad b = \frac{128}{192}$

Д: дискр $D(x)$ при $a=0$ равен $256b - 64b^2 + 4 > 0$

$\Rightarrow$ у $g(x)$ 2 корня и у $f(x)$ поэтому если у $g(x)$ и $Q(x)$ по одному корню, то это их вершины

пусть $3b = k$

$D(g(x)) = (2ka)^2 - 4(1+a^2)(k^2-1) =$

$4k^2a^2 - 4k^2a^2 - 4k^2 + 4 + 4a^2$

$4a^2 - 4k^2 + 4 = 0 \quad a^2 - k^2 + 1 = 0$

$D(Q(x)) = (24a - 2ak)^2 - 4(1+a^2) \cdot$

$\cdot (k^2 + 128 - 12k) = 576a^2 - 96a^2k + 4a^2k^2$

$- 4a^2k^2 - 512a^2 + 48a^2k - 4k^2 - 512 + 48k$

$64a^2 - 48a^2k - 512 - 4k^2 + 48k = 0$

$16a^2 - 12a^2k - 128 - k^2 + 48k = 0$

$16a^2 - 12a^2k - 129 + 48k = 0$

№6 стр. 4

$$\begin{cases} a^2 - k^2 + a = 0 \\ 16a^2 - 12a^2k - 12b - k^2 + 4bk = 0 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 - 1 = x^2 + (y-12)^2 - 16 = 0$$

$$y^2 - 1 = (y-12)^2 - 16$$

$$y^2 - 1 = y^2 - 24y + 128$$

$$24y = 129$$

$$y = \frac{129}{24}$$ => у них может быть только одну => не более одного решения => $a = 0$

Ответ: $a = 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

~~б (продолжение)~~ №6 стр. 2

то на интервале $(x_1; x_2)$ $g(x)$ [redacted] $-a$ $\cup$ $x_1 < x_2$ имеет один знак

на $(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ $g(x)$ [redacted] имеет противоп. знак $\Rightarrow$

$Q(x)$ также <0 и >0 на тех же интервалах $\Rightarrow$ или у $g(x)$ корни x_1 и x_2, то у $Q(x)$ также корни (x_1 и x_2) иначе будут такой (x) где $g(x)$ и $Q(x)$ на разные знаки и $f(x) < 0$.

или $g(x)$ не имеет корней, то тогда у $Q(x)$ не может быть 2 корня т.к. если у $Q(x)$ 2 корня то есть x_1 при котор $Q(x_1) < 0$ и x_2 $Q(x_2) > 0$ и тогда либо $f(x_1) < 0$ либо $f(x_2) < 0$ $\Rightarrow$ либо у $Q(x)$ и $f(x)$ общие корни, либо у каждого по 1 корн
если у них одинак корни. x_1 и x_2, то $g(x_1) - Q(x_1) = g(x_2) - Q(x_2) = 0$

$g(x) = x^2 + a^2x^2 - 16bax + 64b^2 - 1$

$Q(x) = x^2 + a^2x^2 + 64b^2 + 144 - 16abx - 192b + 24ax$

$Q(x) - g(x) = 129 - 192b + 24ax$ [redacted] $\neq 0$

$129 - 192b + 24ax = 0$ при x_1 и x_2