



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{15}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{23}7^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 17 : 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-13; 26)$ ,  $Q(3; 26)$  и  $R(16; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$ .
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №1

Замечу, что для того, чтобы  $abc$  было минимальным,  
 $abc$  не должно делиться ни на какие простые числа,  
отличные от 2 и 7, иначе, т.к. в условии дано только  
условие на кратность делимости на числа вида  $2^k \cdot 7^l$ , то  
разделив  $abc$  на данное простое, изначальное  
условие ни как не нарушится, т.е. если без условия соизмеримости,

$a: p$ , где  $p$  - простое,  $p \neq 2, p \neq 7$ , то если  $abc: 2^{15} \cdot 7^{11}$ , то

$\frac{a}{p} \cdot b: 2^{15} \cdot 7^{11} \Rightarrow$  следует искать минимальное  $abc$  вида

$2^n \cdot 7^m$ . Т.е. какое из  $a, b, c$  имеет вид  $2^i \cdot 7^j$

Пусть  $a = 2^{d_1} \cdot 7^{\beta_1}$ ;  $b = 2^{d_2} \cdot 7^{\beta_2}$ ;  $c = 2^{d_3} \cdot 7^{\beta_3}$ , тогда,

$$abc = 2^{d_1+d_2+d_3} \cdot 7^{\beta_1+\beta_2+\beta_3}$$

Замечу, чтобы  $abc: 2^{15} \cdot 7^{11}$ , нужно, чтобы  $d_1+d_2 \geq 15$  и  $\beta_1+\beta_2 \geq 11$

Аналогично рассуждая для остальных двух условий

$$bc: 2^{17} \cdot 7^{18} \Rightarrow d_2+d_3 \geq 17 \text{ и } \beta_2+\beta_3 \geq 18$$

$$ac: 2^{23} \cdot 7^{39} \Rightarrow d_1+d_3 \geq 23 \text{ и } \beta_1+\beta_3 \geq 39$$

$$\rightarrow \begin{cases} d_1+d_2 \geq 15 \\ d_2+d_3 \geq 17 \\ d_1+d_3 \geq 23 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \beta_1+\beta_2 \geq 11 \\ \beta_2+\beta_3 \geq 18 \\ \beta_1+\beta_3 \geq 39 \end{cases}$$

Складывая пер-ва в той системе, получаем, что  $2(d_1+d_2+d_3) \geq 55 \Rightarrow$

$d_1+d_2+d_3 \geq 27.5$ . Но, т.к.  $d_1, d_2, d_3$  - цел. числа (степени простого числа), то  $d_1+d_2+d_3 \geq 28$ .

Продолжение на след. листе.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Продолжение задачи №1.

Аналогично делаем со второй системой нерав и после сложения получаем, что  $2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \geq 68 \Rightarrow \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 34$

т.к. ищем мин abc, где  $abc = 2^{d_1+d_2+d_3} \cdot 7^{\beta_1+\beta_2+\beta_3}$ , то

нужно найти мин  $d_1+d_2+d_3$  и  $\beta_1+\beta_2+\beta_3 \Rightarrow$  т.к.

$d_1+d_2+d_3 \geq 28$  и  $\beta_1+\beta_2+\beta_3 \geq 34$ , то ~~лучше~~ мин abc, то

~~$d_1+d_2+d_3=28, \beta_1+\beta_2+\beta_3=34 \Rightarrow$  мин abc  $= 2^{28} \cdot 7^{34}$~~

~~Ответ:  $2^{28} \cdot 7^{34}$~~

~~но лучше  $d_1+d_2+d_3=28 \Rightarrow$~~   
 ~~$d_1+d_2=15$~~   
 ~~$d_1+d_3=23$~~   
 ~~$d_2+d_3=17$~~   
 Если  $d_1$  четно  $\Rightarrow d_2$  нечет  
 $d_3=2$ , но  $d_1+d_3$  нечет  
 Если  $d_1$  нечет  $\Rightarrow d_2$  чет  
 $d_3=2$ , но  $d_1+d_3$  чет  
 Система существует

~~$d_1+d_2+d_3=28, \beta_1+\beta_2+\beta_3=34 \Rightarrow$  мин abc  $= 2^{28} \cdot 7^{34}$~~

Пример  $a=2^{11}$  Пусть  $\beta_1+\beta_2+\beta_3=34 \Rightarrow$

если  $\beta_1$   $\beta_1+\beta_2=11$   
 $\beta_2+\beta_3=12$   
 $\beta_1+\beta_3=34 \rightarrow \beta_1+\beta_3+2\beta_2=29$   
 $30 \rightarrow \beta_2 < 0$   $\rightarrow$  нужно прибавить мин  
 $12 \Rightarrow \beta_1+\beta_2+\beta_3 \geq 34+12 \geq 46 \rightarrow$   
 В итоге мин  $\beta_1+\beta_2+\beta_3=46 \Rightarrow$   
 $abc = 2^{28} \cdot 7^{46}$

Пример  $a = 2^9 \cdot 7^{16}$ ;  $b = 2^5 \cdot 7^9$   
 $c = 2^{12} \cdot 7^{23}$

Ответ:  $2^{28} \cdot 7^{46}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №2.

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$$

Я ищу такое  $m$ , что числитель и знаменатель были кратны  $m \Rightarrow$

$$a+b:m \quad \text{и} \quad (a+b)^2-9ab:m, \quad \text{рассмотрю } (a+b)^2-9ab:m$$

из условия, что  $a+b:m \Rightarrow (a+b)^2:m \Rightarrow$  этот разность была кратна  $m$

$9ab:m$ . Пусть  $m:p$ ,  $p$ -простое,  $p \neq 3$ , тогда  $9:p \Rightarrow$  либо  $a$ , либо  $b$

$b:p$ . Без орг. обидности, пусть  $a:p \Rightarrow b:p$ , т.к. иначе, если

$a:p$  и  $b:p$ , то  $\frac{a}{b}$  не будет не сокр (можно будет сократить на

$p$ ). Но, тогда  $a+b$  будет  $:p$ , т.к.  $a:p$  и  $b:p$ , но  $a+b:m$ , где  $m:p$

$a+b:p \rightarrow$  Противоречие, т.к. число не может одновременно делиться и

не делиться на  $p \Rightarrow \nexists p$ , что  $p \neq 3$  и  $m:p \Rightarrow$  Единственное

простое на которое может делиться  $m$  - это 3. Также, заметю, что

если степень вхождения 3 в  $m$  хотя бы 3, т.е.  $m \geq 27$ , то приходим

к аналогичному противоречию, т.к. степень вхождения 3 в  $9 \neq 2$  равна

$2 \Rightarrow ab:3 \Rightarrow$  либо  $a:3$ , либо  $b:3 \Rightarrow$  Если  $a:3$ , то  $b:3$ , иначе

$\frac{a}{b}$  - сократимая дробь (можно сократить на 3), но тогда  $a+b:3$ , т.к.  $a$

$a:3$  и  $b:3$ , но  $a+b:m$ , где  $m:3 \Rightarrow a+b:3$  - Противоречие  $\Rightarrow$  степень

вхождения 3 в  $m$  не больше 2. Приведу пример для  $m=9$ .

$$a=1, b=8 \quad (\text{важно, что дробь } \frac{a}{b} = \frac{1}{8} \text{ - несократима}) \quad \frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{1+8}{1-56+64} = \frac{9}{9}$$

а эта дробь сократима на 9  $\Rightarrow$  существует такие  $a, b$ , что  $m=9$ .

Максимальное  $m=9$ , вот пример. Ответ: 9.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

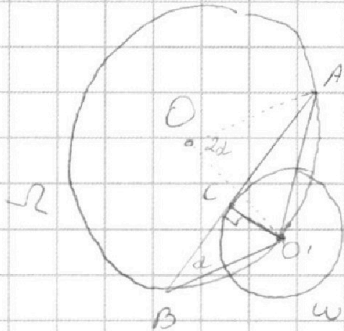
1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



### Задача №3



Дано,  $\Omega$  - окр  $\omega$  - окр,  $O'$  - центр  $\omega$ ,  
 $O$  - центр  $\Omega$

$O' \in \Omega$  радиусе  $\Omega = R$ ; радиусе  $\omega = r$ .

$AB$  - хорда  $\Omega$ ;  $AB$  кас  $\omega$  в  $C$ , так что

$$AC : CB = 17 : 7; \neq$$

Найти: длину  $AB$

### Решение

Пусть  $AC = 17x$ ,  $CB = 7x$  ( $AC : CB = 17 : 7$ ), т.к.  $AB$  - кас к  $\omega$ , то  $O'C \perp AB$

$\Rightarrow \triangle O'CB$  - прями, где  $O'C = r$  ( $O'C$  - радиус  $\omega$ );  $CB = 7x \Rightarrow$  по т. Пиф  $O'B = \sqrt{CO'^2 + CB^2} = \sqrt{49 + 49x^2}$ , а  $CO'^2 = 49 + 49x^2$ . Пусть  $\angle CBO' = \alpha$ , тогда  $\cos \alpha = \frac{CB}{O'B}$ .

Замечу, что  $\angle AOO' = 2\angle ABO'$ , т.к.  $\angle AOO'$  - центральный и опирается на  $AO'$ , как и  $\angle ABO'$ . Тогда  $\angle AOO' = 2\alpha$ . Замечу, что  $\cos(2\alpha) = 2\cos^2 \alpha - 1$ .

$$\cos \alpha = \frac{CB}{O'B} \rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{CB^2}{O'B^2} = \frac{49x^2}{49 + 49x^2} = \frac{x^2}{x^2 + 1}, \cos(2\alpha) = 2\cos^2 \alpha - 1 = 2 \cdot \frac{x^2}{x^2 + 1} - 1 = \frac{2x^2 - x^2 - 1}{x^2 + 1} = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

$$AO'^2 = AC^2 + CO'^2 = 289x^2 + 49. \text{ Из т. кос в } \triangle AOO' \rightarrow$$

$$AO'^2 = AO^2 + OO'^2 - 2\cos(\angle AOO') \cdot AO \cdot OO', \text{ т.к. } AO = OO' = \text{радиус } \Omega = R, \text{ то получим}$$

$$289x^2 + 49 = 13^2 + 13^2 - 2 \cdot 13^2 \cdot \cos(2\alpha)$$

$$289x^2 + 49 = 2 \cdot 13^2 - 2 \cdot 13^2 \cdot \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}. \text{ Сделаю замену } t = x^2 \text{ (} t \geq 0 \text{)} \rightarrow$$

$$289t + 49 = 2 \cdot 13^2 - 2 \cdot 13^2 \cdot \frac{t - 1}{t + 1} \quad (t \neq -1, \text{ т.к. } t \geq 0)$$

$$289t + 49 = 2 \cdot 13^2 \left(1 - \frac{t - 1}{t + 1}\right)$$

$$289t + 49 = 2 \cdot 13^2 \cdot \frac{t + 1 - t + 1}{t + 1} \rightarrow 289t + 49 = \frac{2 \cdot 13^2 \cdot 2}{t + 1} \rightarrow 289t + 49 = \frac{4 \cdot 13^2}{t + 1}$$

$$(289t + 49)(t + 1) = 676$$

$$289t^2 + 338t + 49 = 676$$

$$289t^2 + 338t + 49 - 676 = 0 \quad 3-2y, \text{ т.к. } 17^2 t^2 + (17^2 + 7^2)t + 7^2 = 2 \cdot 13^2$$

Продолжение на следующей странице.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение задачи №3

~~$17^2 \cdot 27 \cdot 17 \cdot 17 \cdot 17$~~

$$289t^2 + 338t + 49 = 676, \text{ заметь, что } t=1 \text{ подходит}$$

~~$289t^2 + 338t + 49 = 676$~~

$$289t^2 + 338t - 627 = 0$$

$$t^2 + \frac{338}{289}t - \frac{627}{289} = 0 \rightarrow \text{т.к свободный член отрицательный, а}$$

один корень положительный (равен 1), то ~~по~~ <sup>из</sup> т.к. ~~высота~~ <sup>высота</sup> ~~следует~~ <sup>следует</sup>, то второй корень отрицателен  $\Rightarrow$  он нам не подходит, т.к.  $t \geq 0 \Rightarrow$  единственный корень это  $t=1$ . Вернемся к изм. ~~перем~~ <sup>перемен</sup>  $x$ :

$$x^2 = 6; x^2 = 1, \text{ т.к. } 17x - \text{длина стороны } AC \Rightarrow x > 0 \Rightarrow \text{из } x^2 = 1 \rightarrow x = 1$$

$$\text{т.к. } AB = AC + CB = 17x + 7x = 24x, \text{ и } x = 1 \Rightarrow AB = 24$$

Ответ: 24.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №4

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

З-значит, что  $x = \frac{1}{9}$  - корень, т.к. правая часть равна 0, то

рассмотрим левую часть, т.к. там же тоже должно быть 0, что

$$3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1$$

$$9x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{9}, \text{ т.е. левая часть тоже равна 0.}$$

Один из корней =  $\frac{1}{9}$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача № 5

Значит зафиксируем точку с коор  $x_2, y_2$ . Заметим, что она задает прямую, такую что все точки с коор  $x_2, y_2$  удовлетворяют условию принадлежат ей, и все точки принадлежат ей удовлетворяют условию (условие на  $x_2$  и  $y_2$  — линейно). Это это за прямая!

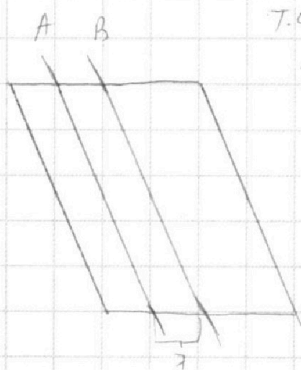
$$\text{т.к. } 2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14 \rightarrow$$

$$2x_2 + y_2 = 14 + 2x_1 + y_1 \rightarrow$$

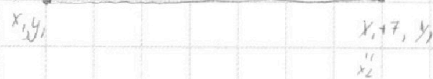
$$y_2 = -2x_2 + 14 + 2x_1 + y_1 \rightarrow$$

$$y_2 = -2(x_2 - 7 - x_1) + y_1 \rightarrow \text{прямая. Также } z = 2y_2 \text{ это}$$

и боковые стороны паралл. с вершинами  $(-13, 26), (0, 0)$  и  $(3, 26), (16, 0)$  лежат на прямой  $y = -2x$  и  $y = -2x + 32$  соотв  $\Rightarrow$  все такие прямые, которые задаются  $x_1, y_1$  паралл. сторонам параллелограмма, также заметим, что также работает и в другую сторону



т.е. есть две прямые А и В, что которые паралл. сторонам, тогда каждую из  $T \in A$  могу взять как точку  $(x_1, y_1)$  и где нее  $\exists k$  условие будет подходить все  $T \in B$ , причем, между ними ровно 7 км, т.е.



$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 2x_1 + 14 - 2x_1 + y_1 - y_1 = 14$$

$\rightarrow$  такая точка подходить

Продолжение @ на след. листе





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab: 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$bc: 2^{17} \cdot 7^{18}$$

$$ac: 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$abc \rightarrow abc = 2^{d_1+d_2+d_3} \cdot 7^{\beta_1+\beta_2+\beta_3}$$

$$d_1, \beta_1, d_2, \beta_2, d_3, \beta_3$$

$$d_1, d_2, d_3 - \text{кр. } 6 \times 2$$

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3 - \text{кр. } 7 \times 7$$

$$d_1 + d_2 \geq 15$$

$$d_1 + d_2 \geq 15$$

$$\beta_1 + \beta_2 \geq 11$$

$$d_2 + d_3 \geq 17$$

$$d_2 + d_3 \geq 17$$

$$d_1 + d_3 \geq 23$$

$$d_1 + d_2 + d_3 \geq 28$$

$$\beta_2 +$$

$$\min d_1 + d_2 + d_3 = 28$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3$$

$$\beta_1 + \beta_2 \geq 11$$

$$\beta_2 + \beta_3 \geq 18$$

$$\rightarrow \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq \frac{11 + 18 + 39}{2} = \frac{68}{2} = 34$$

$$\beta_1 + \beta_3 \geq 39$$

$$abc = 2^{28} \cdot 7^{34}$$

$$\frac{a}{b} = (a, b) = 1$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}$$

$$\text{make } m \rightarrow a+b \cdot m; a^2 - 7ab + b^2 \cdot m$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} = \frac{a+b}{(a-b)^2 - 5ab}$$

$$\textcircled{3} \quad a = 1 \quad b = 2$$

$$(a-b)^2 = 1$$

$$(a+b)^2 - 9ab =$$

$$= (a+b - 3\sqrt{ab})(a+b + 3\sqrt{ab}) = (a+b) \cdot (a+b + 3\sqrt{ab})^2$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{1+2}{1+2}$$

$$= ((\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 - \sqrt{ab})((\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 + \sqrt{ab})$$

$$m:p \Rightarrow q:p$$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab}$$

$$a+b : m \Rightarrow \frac{(a+b)^2 - 9ab}{m} \Rightarrow 9ab : m$$

$$a:p \rightarrow b:p$$

$$\frac{1+2}{9^2 - 9 \cdot 1 \cdot 2} / 9$$

$$m \leq a+b$$

$$m \leq 9ab$$

$$a+b:p, \text{ то } a+b \cdot m$$

$$m=q$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

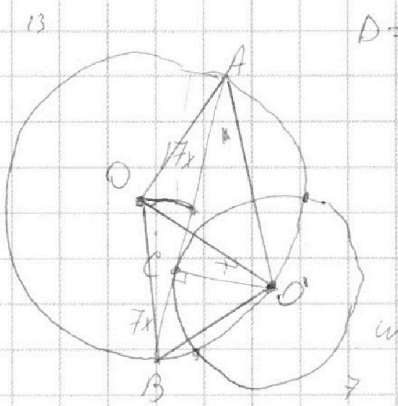
1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода непустима!



$$\begin{array}{r} 676 \\ - 49 \\ \hline 627 \end{array}$$



$$17^2 6^2 + (17^2 + 7^2) t - (26^2 - 7^2)$$

$$D = (17^2 + 7^2)^2 + 4 \cdot 17^2 (26^2 - 7^2)$$

AO → x  
OB → x

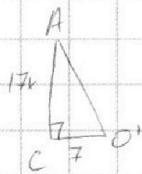
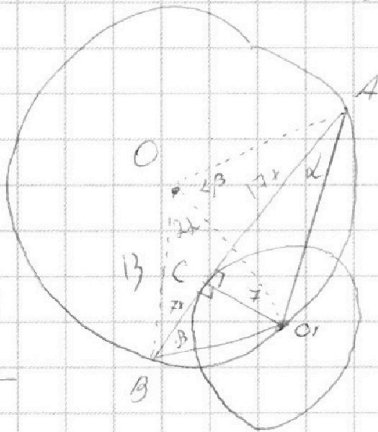
$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 17 \\ \hline 68 \\ 119 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 13 \\ \hline 39 \\ 13 \\ \hline 169 \\ \times 2 \\ \hline 338 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 13 \\ \hline 78 \\ 268 \\ \hline 338 \end{array}$$

$$\cos 2 = \frac{289x^2}{289x^2 + 49}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 26 \\ \hline 156 \\ 52 \\ \hline 676 \end{array}$$



$$AO' = \sqrt{17^2 x^2 + 49}$$

$$= \sqrt{289x^2 + 49}$$

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \sin \alpha =$$

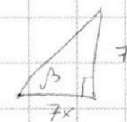
$$= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - 1 + \cos^2 \alpha =$$

$$= 2\cos^2 \alpha - 1$$

$$\begin{array}{r} 289 \\ + 338 \\ 49 \\ \hline 676 \end{array}$$

$$BO'^2 = OB^2 + OO'^2 - 2\cos(2\alpha) OB \cdot OO' =$$

$$= 13^2 + 13^2 - 2 \cdot 13^2 \cdot (2\cos^2 \alpha - 1)$$



$$AO'^2 = \sqrt{289x^2 + 49} \quad \cos^2 \alpha = \left( \frac{17x}{\sqrt{289x^2 + 49}} \right)^2 = \frac{289x^2}{289x^2 + 49}$$

$$BO'^2 = \sqrt{49 + 49x^2} \quad \cos^2 \beta = \frac{49x^2}{49 + 49x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}$$

$$\text{CA} \sqrt{289x^2 + 49} = 13^2 + 13^2 - 2\cos 2\beta \cdot 13^2 =$$

$$= 2 \cdot 13^2 - 2 \cdot 13^2 \cdot \left( \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)$$

$$\cos(2\beta) = 2\cos^2 \beta - 1 =$$

$$= \frac{2x^2}{1+x^2} - \frac{1+x^2}{1+x^2} = \frac{2x^2 - 1 - x^2}{1+x^2} =$$

$$= \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

$$289x + 49 = 2 \cdot 13^2 - 2 \cdot 13^2 \cdot \frac{x-1}{x+1}$$

$$289x + 49 = 338 - 338 \cdot \frac{x-1}{x+1}$$

$$289x + 49 = 338 \left( 1 - \frac{x-1}{x+1} \right)$$

$$289x + 49 = 338 \cdot \frac{x+1-x+1}{x+1} = 2$$

$$289x + 49 = 338 \cdot \frac{2}{x+1}$$

$$(289x + 49)(x+1) = 289x^2 + 338x + 49 = 676$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$3x^2 - 6x + 2 \geq 0; \quad 3x^2 + 3x + 1 \geq 0$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 0$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 0 \quad 3x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$D_1 = 9 - 6 = 3$$

$$D = 9 - 3 = 6$$

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{3}}{3} \quad x_2 = \frac{3 - \sqrt{3}}{3}$$

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{6}}{3} \quad x_2 = \frac{-3 + \sqrt{6}}{3}$$

$$D = 36 - 4 \cdot 2 \cdot 3$$

$$3x^2 + 3x + 1 = \left(x + \frac{3 + \sqrt{3}}{3}\right) \left(x - \frac{3 - \sqrt{3}}{3}\right)$$

$$\sqrt{D} = 2 \cdot \sqrt{36 - 24} = 2\sqrt{6}$$

$$9x^2 - 6x + 2 = \left(x - \frac{3 + \sqrt{6}}{3}\right) \left(x - \frac{3 - \sqrt{6}}{3}\right)$$

$$x_1 = \frac{6 - 2\sqrt{6}}{2 \cdot 3} = \frac{3 - \sqrt{6}}{3}$$

$$\left(x + \frac{3 + \sqrt{3}}{3}\right) \left(x - \frac{3 - \sqrt{3}}{3}\right) = x^2 + \frac{3 + \sqrt{3}}{3}x - \frac{3 - \sqrt{3}}{3}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \left(x - \frac{3 + \sqrt{6}}{3}\right) \left(x - \frac{3 - \sqrt{6}}{3}\right)$$

$$x_1 \vee D = 9 - 12 < 0 \rightarrow \text{нет корней}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$(-75x^2 + 15x + 2)(-75x^2 + 15x + 2) =$$

$$= 75^2 x^4 - 75 \cdot 15x^3 - 150x^2 - 150x^3$$

$$3x^2 \quad \cancel{3x^2}$$

$$x^2 - 2x + 1 + x^2 - 2x + 1 + x^2 - 2x + 1 - 1 = 3(x-1)^2 - 1$$

$$x^2 + 2x + 1 + x^2 + 2x + 1 + x^2 + 2x + 1 - 3x - 2 = 3(x+1)^2 - 3x - 2$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x \quad | \wedge^2$$

$$\left(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1}\right)^2 = 3x^2 - 6x + 2 - (3x^2 + 3x + 1) = -9x - 1$$

$$\left(\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}\right)^2 = 1 + 81x^2 - 18x$$

$$6x^2 - 3x + 3 - 2\sqrt{9x^4 + 64x^3 + 3x^2 - 18x^3 - 18x^2 - 6x + 6x^2 + 6x + 2} = 1 + 81x^2 - 18x$$

$$-75x^2 + 15x + 2 = 2\sqrt{9x^4 - 9x^3 - 15x^2 + 6x^2}$$

$$\left(-75x^2 + 15x + 2\right)^2 = 4 \cdot (9x^4 - 9x^3 - 9x^2 + 2)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x \quad | -9x = 0 \Rightarrow 1 = 9x \Rightarrow x = \frac{1}{9}$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1 \quad x = \frac{1}{9} \text{ - корень}$$

$$-9x = -1$$

$$x = \frac{1}{9}$$

$$3x^2$$

$$\begin{array}{r} -3x^2 - 6x + 2 \\ 3x^2 - \frac{1}{3}x \\ \hline -\frac{17}{3}x + 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} x - \frac{1}{9} \\ 3x - \frac{17}{3} \end{array} \quad 3x^2 - 6x + 2$$

$$\begin{array}{r} 27x^2 - 6x + 2 \\ 27x^2 - 3x \\ \hline -3x + 2 \\ -3x + \frac{1}{3} \\ \hline 1\frac{2}{3} \end{array} \quad \begin{array}{r} 9x - 1 \\ 3x - \frac{1}{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -4\frac{5}{6} \quad 9 \\ 6 \quad 5\frac{2}{3} \quad 17 \\ 3 \end{array}$$

$$3x^2 - 6x + 2 = (9x - 1)\left(3x - \frac{1}{3}\right) + 1\frac{2}{3}$$

$$\begin{array}{r} 27x^2 - 54x + 18 \\ 27x^2 - 3x \\ \hline -51x + 18 \\ 51x + \frac{17}{3} \end{array} \quad \begin{array}{r} 9x - 1 \\ 3x - \frac{17}{3} \end{array}$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 9\left(x - \frac{1}{9}\right)$$

$$\sqrt{a} = 1 - 9x$$

$$a =$$

$$3x^2 - 6x + 2 = \left(x - \frac{1}{9}\right)\left(3x - \frac{17}{3}\right) + \frac{37}{27}$$

$$3x^2 + 3x + 1 = \left(3x + \frac{10}{3}\right)\left(x - \frac{1}{9}\right) + \frac{37}{27}$$

$$\begin{array}{r} 3x^2 + 3x + 1 \\ 3x^2 - \frac{1}{3}x \\ \hline \frac{10}{3}x + 1 \\ \frac{10}{3}x - \frac{10}{27} \end{array} \quad \begin{array}{r} x - \frac{1}{9} \\ 3x + \frac{10}{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} d_1 + d_2 = 16 \\ d_1 + d_2 = 23 \\ d_2 + d_3 = 17 \\ d_1 + d_2 + d_3 = 16 - d_1 \\ d_2 = 23 - d_1 \end{array}$$

$$d_2 + d_3 = 40 - 2d_1 = 17$$

$$2d_1 = 22 \Rightarrow d_1 = 11$$



$$\begin{array}{l} A = 2 \\ B = 7 \\ C = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \beta_1 + \beta_2 = 17 \\ \beta_1 + \beta_3 = 39 \\ \beta_2 + \beta_3 = 24 \\ \beta_2 = 7 - \beta_1 \\ \beta_3 = 39 - \beta_1 \\ 56 - 2\beta_1 = 24 \\ 2\beta_1 = 32 \\ \beta_1 = 16 \Rightarrow \beta_2 = 1 \Rightarrow \beta_3 = 23 \\ 2\beta_2 + 3\beta_3 = 29 \Rightarrow \beta_2 < 0 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение задачи №5.

Тогда, в на не забываем условие, что все точки имеют

целые коорд и внутри из паралл, то в качестве прямой  
на которой будем отмечать точку с коорд  $x_1, y_1$  можно выбрать

$-13, 26$   $-4, 26$   $0, 26$   $3, 26$

любую прямую, проходящую

через точку с коорд  $\{-13, 26\}, \{-4, 26\}$  и паралл боковым сторонам паралл

если выберем прямую через точку  $x, 26$ , где

$x > -4$ , то ей паралл через  $7$  клеток будет прямая через  $(x+7 > 3, 26)$ ,  
это уже не в паралл.

Таких точек ровно 10. Заметим, что на каждой

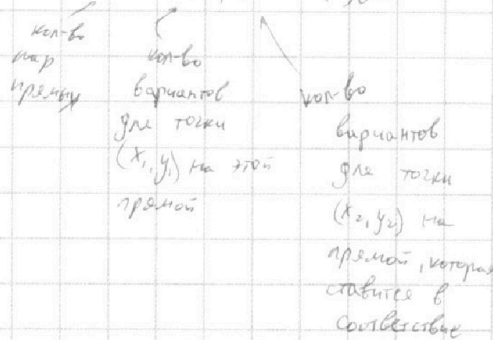
такой прямой ровно 14 целых точек с целыми координатами

тогда для каждой из этих 10 прямых на ней нет

на которых я выбираю точку  $x_1, y_1$  ставится ровно одна

прямая на которой я выбираю точку с коорд  $x_2, y_2$  тогда всего

вариантов выбора пары  $\rightarrow 10 \cdot 14 \cdot 14 = 1960$



Ответ: 1960.

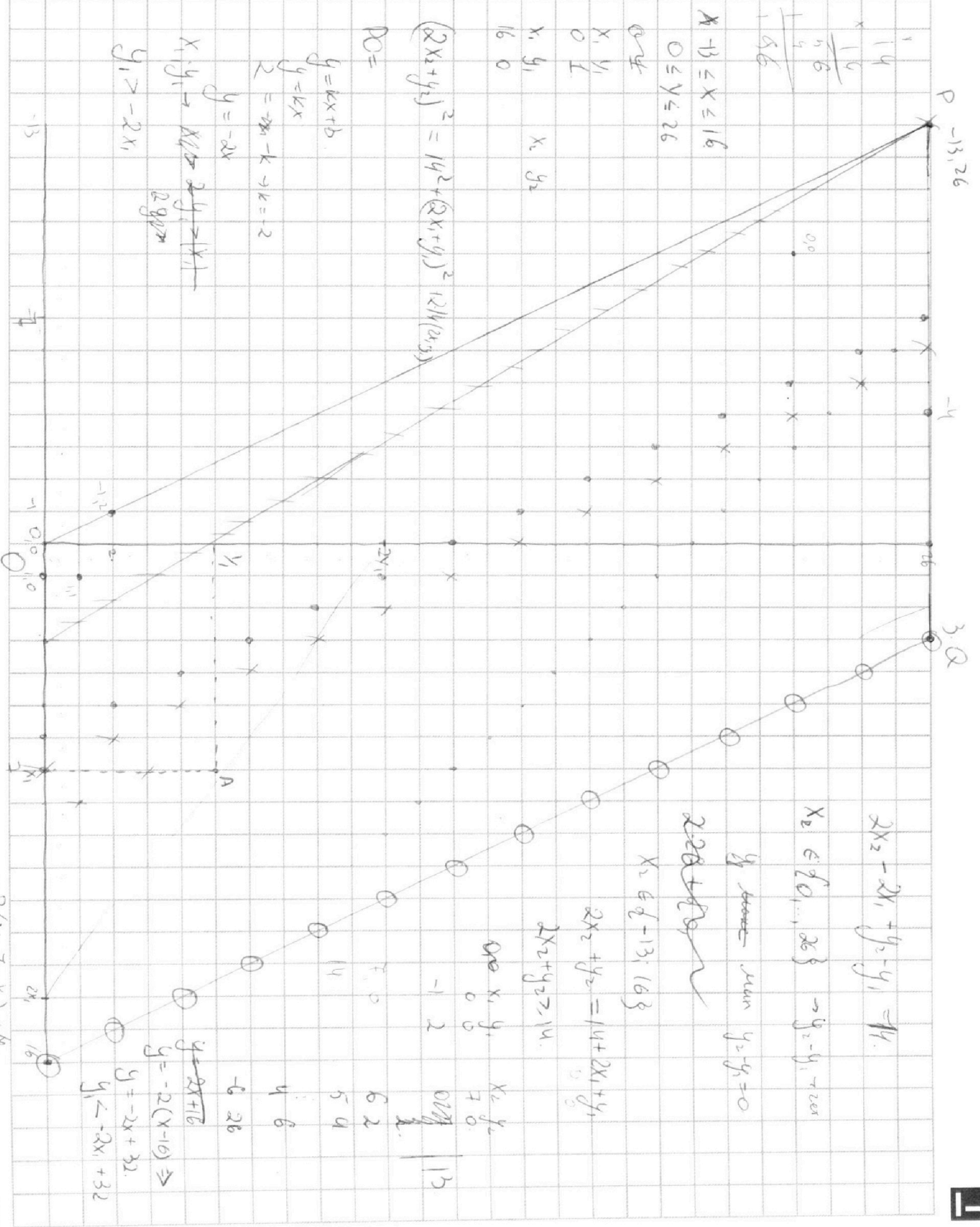
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$(-75x^2 + 15x + 2)^2 = 4(9x^4 - 9x^3 - 9x^2 + 2)$$

$$(-75x^2 + 15x + 2)(-75x^2 + 15x + 2) = 5^2 \cdot 15^2 x^4 - 5 \cdot 15^2 x^3 - 15 \cdot 2 x^2 - 5 \cdot 15^2 x^3 + 2 \cdot 5 \cdot 15 x^2$$

$$+ 15^2 x^2 + 15 \cdot 2x - 2 \cdot 15 \cdot 5 x^2 + 2 \cdot 15x + 4$$

$$= 5^2 \cdot 15^2 x^4 - 2 \cdot 5 \cdot 15^2 x^3 - 4 \cdot 5 \cdot 15 x^2 + 15^2 x^2 + 4 \cdot 15x + 4 = 4 \cdot 9x^4 - 4 \cdot 9x^3 - 4 \cdot 9x^2 + 8$$

$$(1 - 9x)^2 = 1 + 81x^2 - 18x \quad (5^2 \cdot 15^2 - 4 \cdot 9)x^4$$

$$\left| \begin{array}{l} x - \frac{1}{3} \\ \hline x^3 \cdot (5^2 + 15^2 - 4 \cdot 9) \end{array} \right.$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$x^2 - 2x + 1 = t$$

$$3t = 3x^2 - 6x + 3 = 3x^2 + 3x + 1 + 2 \neq -9x$$

$$\sqrt{3t-1} - \sqrt{3t-1}$$

$$3x^2 + 3x + 1 = 3t + 9x - 2$$

$$\sqrt{3t-1} - \sqrt{3t-1}$$

$$1 - 9x = (1 - 3\sqrt{x})(1 + 3\sqrt{x})$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + 9x = \sqrt{3x^2 + 3x + 1} + 1$$

$$\sqrt{3x(x-2)+2} - \sqrt{3x(x+1)+1}$$

$$\sqrt{3x\left((x-2) + \frac{2}{3x}\right)} - \sqrt{3x\left((x+1) + \frac{1}{3x}\right)} = 1 - 9x$$

$$9x^2 \sqrt{1 - 9x}$$