МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система

$$\begin{cases} ax+y-8b=0, \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16)\leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 1

$ac \vdots 7^{39}$; $\Rightarrow abc \vdots 7^{39}$

Пусть степень двойки в разложении на простые множители числа a равна x, числа b – y, числа c – z. Тогда, раз $ab \vdots 2^{15}$; $\Rightarrow x+y \geq 15$; раз $bc \vdots 2^{17}$; $\Rightarrow y+z \geq 17$, раз $ac \vdots 2^{23}$; $\Rightarrow x+z \geq 23$; $\Rightarrow 2(x+y+z) = (x+y)+(y+z)+(x+z) \geq 15+17+23 = 55$; $\Rightarrow x+y+z \geq 27{,}5$.

a, b, c – натуральные; x, y, z – степени двойки в их разложении на простые множители; $\Rightarrow x, y, z \in \mathbb{N}$; $\Rightarrow x+y+z \geq 28$; $\Rightarrow abc \vdots 2^{28}$.

$abc \vdots 2^{28}$, $abc \vdots 7^{39}$; ~~$\Rightarrow abc \vdots 2^{28}$~~ $a, b, c \in \mathbb{N}$, $\Rightarrow abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39}$.

Это была оценка. Пример: $a = 2^{11} \cdot 7^{11}$; $b = 2^{5}$; $c = 2^{12} \cdot 7^{28}$, тогда $ab = 2^{16} \cdot 7^{11} \vdots (2^{15} \cdot 7^{11})$; $bc = 2^{17} \cdot 7^{28} \vdots (2^{17} \cdot 7^{18})$; $ac = 2^{23} \cdot 7^{39} \vdots (2^{23} \cdot 7^{39})$, при этом $abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$ – минимально.

<u>Ответ</u>: $2^{28} \cdot 7^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2

Рассмотрим это максимальное m. Пусть $a+b=k_1\cdot m$. Тогда $a^2-7ab+b^2=a^2+2ab+b^2-9ab=(a+b)^2-9ab=k_1^2\cdot m^2-9ab \vdots m$; $\Rightarrow$
$\Rightarrow 9ab \vdots m$. Пусть $9ab=k_2\cdot m$. ~~Тогда $9ab-9(ab)=9(ab-a\cdot 2b)$ $=(k_2-9k_1)m \vdots m$. Без потери общности (т.к. выражение симметрично) предположим, что $a>b$. Тогда $a+b<2a$,~~ $\Rightarrow$
$(a,m)=1$ (иначе бы b тоже делилось на их НОД, но $(a,b)=1$).
$(b,m)=1$ по той же причине.

т.к. $b=a-k_1m \vdots$ НОД (a,m)

Но $9ab \vdots m$; $\Rightarrow$ ~~$m\le 9$~~, $9 \vdots m$; $\Rightarrow m\le 9$

Пример: $a=8$; $b=1$; $\Rightarrow \dfrac{a+b}{a^2-7ab+b^2}=\dfrac{8+1}{64-56+1}=\dfrac{9}{9}$. ~~Эту дробь можно~~ В дроби $\frac{9}{9}$ можно сократить и числитель, и знаменатель на 9, и получить $\frac{1}{1}$, $\Rightarrow m=9$. Мы получили оценку, что $m\le 9$; ~~Ответ: при $m=9$.~~

$\Rightarrow$ Ответ: при $m=9$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

№3

Обозначим за D центр ω. $DC \perp AB$; $DC = 7$ (т.к. $C \in \omega$).

Пусть $AC = 17x$, тогда $BC = 7x$. Теорема синусов для $\triangle ABD$, окружность Ω:

$\frac{BD}{\sin\angle BAD} = 2\cdot 13$; $\triangle DCA$ и $\triangle DCB$ - прямоуг.; $\Rightarrow DC = \sin\angle BAD \cdot AD$;

$AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{17^2x^2 + 7^2}$; $BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = \sqrt{7^2x^2+7^2} = 7\sqrt{x^2+1}$;

$\sin\angle BAD = \frac{DC}{AD} = \frac{7}{\sqrt{17^2x^2+7^2}}$; снова раз т. синусов:

$\frac{7\sqrt{x^2+1}}{\frac{7}{\sqrt{17^2x^2+7^2}}} = 26$; $\Rightarrow \sqrt{(x^2+1)(17^2x^2+7^2)} = 26$; в квадрат:

$289x^4 + (289+49)x^2 + 49 = 676$;

$289x^4 + 338x^2 - 627 = 0$ – биквадратное ур-ие.

$D = 338^2 + 4\cdot 289\cdot 627 = (169\cdot 2)^2 + 4\cdot 17^2\cdot 3\cdot 209 = 4(169^2 + 289\cdot 3\cdot 209) =$

$= 4\cdot 209764$; $x^2 = \frac{-338 \pm 2\sqrt{209764}}{2\cdot 289}$;

$x^2 > 0$; $\Rightarrow x^2 = \frac{-338 + 2\sqrt{209764}}{2\cdot 289}$; $x = \sqrt{\frac{-169+\sqrt{209764}}{289}}$

$x = \frac{\sqrt{-169+\sqrt{209764}}}{17}$. Заметим, что: $458 \cdot 458 = 209764$; $\Rightarrow \sqrt{209764} = 458$.

$x = \frac{\sqrt{-169+458}}{17} = \frac{\sqrt{289}}{17} = 1$.

Итак, $x = 1$. $AB = AC + CB = 17x + 7x = 24x = 24$.

Ответ: 24.

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 26 \\ \hline 156 \\ +52 \\ \hline 676 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 676 \\ -49 \\ \hline 627 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 289 \\ +49 \\ \hline 338 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 181203 \\ +28561 \\ \hline 209764 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 289 \\ \times 627 \\ \hline 2023 \\ 578 \\ +1734 \\ \hline 181203 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 169 \\ \times 169 \\ \hline 1521 \\ +1014 \\ 169 \\ \hline 28561 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 458 \\ \times 458 \\ \hline 3664 \\ +2290 \\ 1832 \\ \hline 209764 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 458 \\ -169 \\ \hline 289 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№4

$$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x$$

$D=36-24=12$

$x=\frac{6\pm2\sqrt{3}}{6}=1\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

$D=9-12<0$

коэф. при x больше 0

$\Rightarrow$ всегда положительно

ОДЗ: $x\notin\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3};1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$\Rightarrow \underset{\geq 0}{\sqrt{3x^2-6x+2}}+\underset{\geq 0}{\sqrt{3x^2+3x+1}}>0$ вне зависимости от x.

Домножим на эту сумму.

$(\cancel{3x^2}-6x+2)-(\cancel{3x^2}+3x+1)=(1-9x)\left(\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}\right)$

$-9x+1=(1-9x)\left(\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}\right)$

$(1-9x)\left(\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}-1\right)=0$

1 случай $-$ $1-9x=0$; $\Rightarrow$ $\boxed{x=\frac{1}{9}}$

2 случай $-$ $\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}-1=0$ | в квадрат

$3x^2-6x+2+3x^2+3x+\cancel{1}+2\sqrt{(3x^2-6x+2)(3x^2+3x+1)}=\cancel{1}$

$\underbrace{6x^2-3x+2}+\underbrace{2\sqrt{9x^4-9x^3-9x^2+2}}_{\geq 0\text{ (т.к. это корень)}}=0$

$D=9-48<0$

коэф. при x^2 больше 0

$\Rightarrow$ оно всегда >0

$\underset{\vee 0}{(6x^2-3x+2)}+\underset{\vee 0}{2\sqrt{9x^4-9x^3-9x^2+2}}>0$, $\Rightarrow$ этот случай не даёт новых корней.

Проверка по ОДЗ: $\frac{1}{9}=1-\frac{8}{9}<1-\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\left(\text{т.к. } \frac{\sqrt{3}}{3}<\frac{8}{9}, \text{ т.к. } \frac{3}{9}<\frac{1}{2}<\frac{64}{81}\right)$

квадраты этого

$\Rightarrow \frac{1}{9}\notin\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3};1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; $\Rightarrow$ этот корень подходит.

Других корней, как мы выяснили, нет. $\boxed{\text{Ответ: } x=\frac{1}{9}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5

$y_2 + 2x_2 = y_1 + 2x_1 + 14$

Заметим, что $y + 2x = const$ на прямой $y = -2x + const$

Заметим, что две стороны параллелограмма лежат на прямых типа $y = -2x + const$, а другие две – на прямых типа $y = const$.

Нам нужны пары прямых вида $y_1 = -2x + C$ и $y_2 = -2x + C + 14$, где C – какая-то константа. Такие прямые, проходящие по целым точкам, идут, очевидно, с шагом 1 по оси y, и, следовательно, с шагом 0,5 по оси x. На прямых, где при $y=0$ x – целый, есть 14 целых точек: $y=0$; $y=2$; $y=4$; …; $y=24$; $y=26$. На прямых, где при $y=0$ x – нецелый, есть 13 целых точек: $y=1$; $y=3$; …; $y=25$. (имеется ввиду кол-во целых точек внутри параллелограмма; оно посчитано именно так, потому что множество прямых $y = -2x + C$ параллельно сторонам параллелограмма, и поэтому у двух прямых, у которых $C_2 - C_1$ – чётное, кол-во целых точек не будет отличаться, ведь это такая же прямая, просто сдвинутая на $\frac{C_2 - C_1}{2}$ клеток вправо). Заметим также, что 14 чётно, поэтому у пары подходящих прямых кол-во подходящих точек одинаково, и, при $y_1 = y_2 = 0$; $x_2 - x_1 = 7$.

Итак, пары подходящих нам прямых: $y_1 = -2x + C$; $y_2 = -2x + C + 14$.

При $y_1 = y_2 = 0$; $(x_1, x_2) = \{(0;7); (\frac{1}{2}; 7\frac{1}{2}); (1;8); \dots; (8\frac{1}{2}; 15\frac{1}{2}); (9;16)\}$.

(это – все пары, т.к. "нижняя" сторона параллельна оси x, и на ней $x=0$; $0 \le y \le 16$). Есть 10 пар с целыми x и 9 – с нецелыми. На двух "целых" прямых можно взять за A любую из 14 целых точек, за B – тоже любую из 14 целых точек второй прямой, $\Rightarrow$ каждая пара "целых" прямых даёт $14^2 = 196$ пар $(A;B)$, и, аналогично, каждая пара "нецелых" прямых даёт $13^2 = 169$ пар $(A;B)$. Значит, всего пар $(A;B)$: $196 \cdot 10 + 169 \cdot 9 = 10 \cdot (196 + 169) - 169 = 3650 - 169 = 3481$.

$\boxed{\text{Ответ: } 3481}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

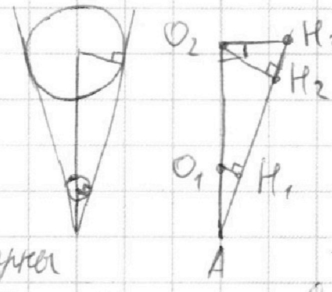
№6

~~$x^2+y^2-1\le 0$ – ур-ие круга~~

$x^2+y^2-1\le 0 \Leftrightarrow x^2+y^2\le 1$ – ур-ие круга с центром в $(0;0)$ и радиусом 1

$x^2+(y-12)^2-16\le 0 \Leftrightarrow x^2+(y-12)^2=16$ – ур-ие круга с центром в $(0;12)$ и радиусом $\sqrt{16}$, то есть с радиусом 4. ~~Круги находятся друг над другом, сумма~~ Сумма радиусов равна 5, а расстояние между центрами – 12, => круги не пересекаются. $(x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16)\le 0$; => корни – точки, лежащие в одном из кругов.

$ax+y-8b=0 \Leftrightarrow y=-ax+8b$ – прямая. У системы ровно 2 решения, => эта прямая – общая касательная к 2 кругам (т.к. если прямая зайдёт в один из кругов, корней будет ~~бесконечно~~ бесконечное количество – все точки хорды (окружности, ограничивающей круг), по которой прямая пересечёт ~~круг~~, а если прямая не ~~коснётся~~ касается одного из кругов, корней будет не более 1, т.к. ~~не~~ одна прямая не может ~~коснуться~~ касаться ~~одного~~ одного круга дважды).



1 случай – внешняя касательная. Их 2, и, поскольку центры кругов находятся друг над другом ($x_1=x_2=0$), эти касательные симметричны относительно оси Y.

$O_1(0;0)$; $O_2(0;12)$ – центры окружностей; O_1H_1 и O_2H_2 – радиусы, проведённые к точке касания, они перпендикулярны касательной. $O_1H_1=1$; $O_2H_2=4$; $O_1O_2=12$. $\angle O_1AH_1$ – общий острый угол в прямоугольных треугольниках AO_1H_1 и AO_2H_2; => $\triangle AO_1H_1 \sim \triangle AO_2H_2$; =>

=> $\frac{AO_1}{AO_2}=\frac{O_1H_1}{O_2H_2}$; $\frac{AO_1}{AO_1+O_1O_2}=\frac{1}{4}$; (A – точка пересечения внешних касательных с осью Y)

$4AO_1=AO_1+12$; $3AO_1=12$; $AO_1=4$; A лежит на оси Y; => A(0;-4)

~~Координаты H_1: $x(H_1)=x(O_1)+$~~ Пусть H_3 – пересечение касательной с ~~перпендикуляром~~ перпендикуляром к оси Y через O_2. ~~Тогда координаты H_3: $y(H_3)=y(O_2)=12$;~~

$x(H_3)=x(O_2)+O_2H_3=O_2H_3=\frac{OH_2}{\cos\angle H_3O_2H_2}=\frac{4}{\cos(90^\circ-\angle AO_2H_2)}=\frac{4}{\cos O_2AH_2}=$

$=\frac{4}{\frac{O_2H_2}{AO_2}}=\frac{4}{\frac{4}{4+12}}=16$; => $H_3(16;12)$. Касательная проходит через точки $A(0;-4)$, $H_3(16;12)$; прямая: $y=-ax+8b$; ~~$\frac{0}{12}=\frac{Ha}{8b}$~~

значит: $\begin{cases}-4=0+8b\\ 12=-16a+8b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=-\frac{1}{2}\\ 16=-16a\end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases}a=-1\\ b=-\frac{1}{2}\end{cases}}$

исправлено в середине разбора 2 случая

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

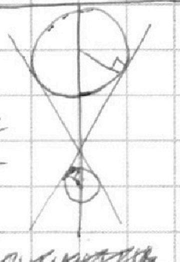
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

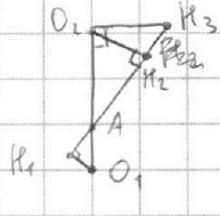
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6 (продолжение)

~~Вторая внешняя касательная симметрична первой относительно оси Y => она проходит через точки A(0;-4) и $H_3'(-16;12)$ H_3' – отражённая относительно оси Y точка H_3.~~ $\begin{cases}-4=0+8b\\12=16a+8b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=\frac{-1}{2}\\16a=16\end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases}a=1\\b=\frac{-1}{2}\end{cases}}$

2 случай – внутренняя касательная. Аналогично: O_1, O_2 – центры окружностей; O_1H_1 и O_2H_2 – радиусы к точке касания, A – точка пересечения касательных с осью Y, H_3 – точка пересечения касательной с перпендикуляром к оси Y через точку O_2. $O_1(0;0)$; $O_2(0;12)$;





$O_1H_1=1$; $O_2H_2=4$; $O_1O_2=12$. Касательные опять ~~симметричны~~ симметричны относительно оси Y, потому что центры окружностей всё ещё друг над другом, а касательные симметричны относительно прямой через центры окружностей. $\angle H_1AO_1=\angle H_2AO_2$ (вертикальные), $\angle AH_2O_2=\angle AH_1O_1=90°$; =>

=> $\triangle H_1AO_1 \sim \triangle H_2AO_2$ (по трём углам); => $\frac{H_1O_1}{H_2O_2}=\frac{O_1A}{AO_2}$; $\frac{1}{4}=\frac{O_1A}{12-O_1A}$;

$12-O_1A=4O_1A$; $O_1A=\frac{12}{5}$; A лежит на оси Y между O_1 и O_2; => её координаты $A(0;\frac{12}{5})$. ~~Координаты точки H_3: $x(H_3)=x(O_2)+O_2H_2=\frac{O_2H_3}{\sin\angle H_2}$~~

1 случай. Координаты H_3: $y(H_3)=y(O_2)=12$; $x(H_3)=x(O_2)+O_2H_3=\frac{O_2H_2}{\cos\angle H_3O_2H_2}=$

$=\frac{O_2H_2}{\cos(90°-\angle AO_2H_2)}=\frac{O_2H_2}{\sin\angle AO_2H_2}=\frac{O_2H_2}{\frac{AH_2}{AO_2}}$; по т. Пифагора: $AH_2=\sqrt{AO_2^2-O_2H_2^2}=$

$=\sqrt{16^2-4^2}=4\sqrt{15}$; => $x(H_3)=\frac{4}{\frac{4\sqrt{15}}{16}}=\boxed{\frac{16}{\sqrt{15}}}$; => $H_3(\frac{16}{\sqrt{15}};12)$

~~Каса~~ Внешние касательные симметричны относительно прямой между центрами окружностей (т.е. оси Y); => касательные – это прямые AH_3 и AH_3', где $H_3'(\frac{-16}{\sqrt{15}};12)$ – H_3, отражённая относительно оси Y. Касательные: $y=-ax+8b$.

первая касательная: $\begin{cases}-4=0+8b\\12=-a\cdot\frac{16}{\sqrt{15}}+8b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=\frac{-1}{2}\\16=\frac{-16a}{\sqrt{15}}\end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases}a=-\sqrt{15}\\b=\frac{-1}{2}\end{cases}}$

вторая касательная: $\begin{cases}-4=0+8b\\12=-a\cdot\frac{-16}{\sqrt{15}}+8b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=\frac{-1}{2}\\16=\frac{16a}{\sqrt{15}}\end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases}a=\sqrt{15}\\b=\frac{-1}{2}\end{cases}}$

2 случай. Координаты H_3: $y(H_3)=y(O_2)=12$; $x(H_3)=x(O_2)+O_2H_3=\frac{O_2H_2}{\cos\angle H_2O_2H_3}=$

$=\frac{4}{\cos(90°-\angle AO_2H_2)}=\frac{4}{\sin\angle AO_2H_2}=\frac{4}{\frac{AH_2}{AO_2}}$; по т. Пифагора: $AH_2=\sqrt{AO_2^2-O_2H_2^2}=$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№6 (продолжение – 2)

$= \sqrt{\left(12-\frac{12}{5}\right)^2-4^2} = \sqrt{12^2\cdot\frac{4^2}{5^2}-4^2} = 4\sqrt{\frac{12^2}{5^2}-1} = \frac{4\sqrt{119}}{5}$; $\Rightarrow x(H_3) = \frac{4}{\frac{4\sqrt{119}}{5\cdot AO_2}} =$

$= \frac{5\cdot\left(12-\frac{12}{5}\right)}{\sqrt{119}} = \frac{12\cdot 4}{\sqrt{119}} = \frac{48}{\sqrt{119}}$; $\Rightarrow H_3\left(\frac{48}{\sqrt{119}}; 12\right)$.

Аналогично: касательные симметричны – прямые AH_3 и AH_3', где $H_3'\left(\frac{-48}{\sqrt{119}}; 12\right)$.

Касательные: $y=-ax+8b$.

первая касательная: $\begin{cases} \frac{12}{5}=0+8b \\ 12=\frac{-48a}{\sqrt{119}}+8b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\frac{3}{10} \\ \frac{-48a}{\sqrt{119}}=12-\frac{12}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{\sqrt{119}\cdot 12\cdot 4}{5\cdot(-48)} \\ b=\frac{3}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{-\sqrt{119}}{5} \\ b=\frac{3}{10} \end{cases}$

вторая касательная, аналогично: $\begin{cases} a=\frac{\sqrt{119}}{5} \\ b=\frac{3}{10} \end{cases}$

Итак, нам подходит только такие a и b, чтобы получившаяся прямая была касательной к двум кругам. Касательных всего 4 штуки, и мы рассмотрели все случаи.

$\boxed{\text{Ответ: } a=\pm\sqrt{15};\ \frac{\pm\sqrt{119}}{5}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$ab \vdots 2^{15}7^{11};\ bc \vdots 2^{17}7^{18};\ ac \vdots 2^{23}7^{39};$ ~~$\Rightarrow a^2b^2c^2 \vdots 2^{55}7^{68}$~~

~~$a = 2^{11}\cdot 7^{11},\ b = 2^{5}\cdot 7^{28},\ c = 2^{12}$~~

$\begin{cases} x+y \geq 15 \\ y+z \geq 17 \\ x+z \geq 23 \end{cases} \Leftrightarrow 2(x+y+z) \geq 55 \Rightarrow x+y+z \geq \underline{28}$ $\mathbb{N}$

аналогично: $k+l+m \geq \frac{11+18+39}{2} = \cancel{34}$ 39

Пример

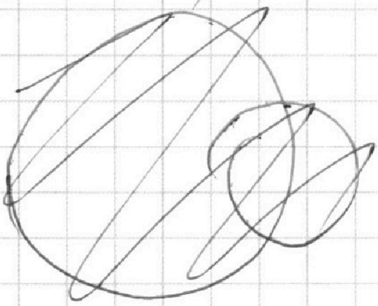
$\begin{cases} k+l=15 \\ l+m=17 \\ k+m=23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k+l=15 \\ k-l=6 \\ k+m=23 \end{cases} \Leftrightarrow l = 4{,}5\ (1)$
$k = 10{,}5\ (1)$
$m = 12{,}5\ (13)$

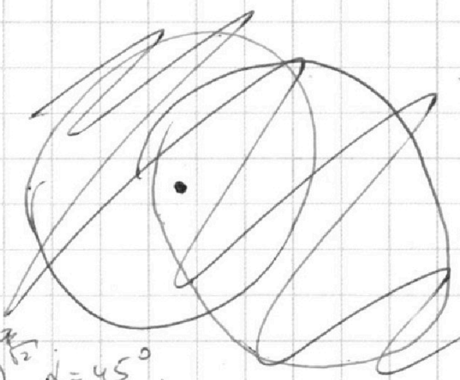
$a = 2^{11}\cdot 7^{11},\ b = 2^{5},\ c = 2^{12}\cdot 7^{28}$

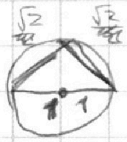
$\begin{array}{r} 1960 \\ +1521 \\ \hline 3481 \end{array}$ $\begin{array}{r} 169 \\ \times 9 \\ \hline 1521 \end{array}$

$\begin{array}{r} 454 \\ \times 454 \\ \hline 1816 \\ +2270 \\ 1816 \\ \hline 206116 \end{array}$

$\begin{array}{r} 450 \\ \times 450 \\ \hline 225 \\ +180 \\ \hline 202500 \end{array}$

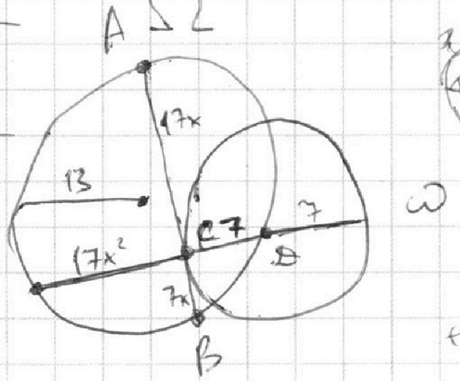


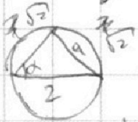




$\begin{array}{r} 460 \\ \times 460 \\ \hline 276 \\ +184 \\ \hline 211600 \end{array}$

$\begin{array}{r} 456 \\ \times 456 \\ \hline 2736 \\ +2280 \\ 1824 \\ \hline 207936 \end{array}$





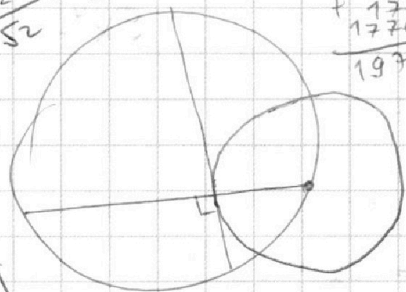
$\alpha = 45^\circ$

$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$

$\begin{array}{r} 444 \\ \times 444 \\ \hline 1776 \\ +1776 \\ 1776 \\ \hline 197136 \end{array}$

458

$\begin{array}{r} 458 \\ \times 458 \\ \hline 3664 \\ +2290 \\ 1832 \\ \hline 209764 \end{array}$



$289x^2 - (\sqrt{289x^2+49} - 7)(\sqrt{289x^2+49} + 7)$

~~$289x^2 - 289x^2$~~

$\triangle ABD:\ \frac{7}{\sqrt{289x^2+49}\cdot 24x} = 26$, в квадрат: $0 = 26^2\cdot 24^2(289x^4 + 49x^2) - 49$

$D = 26^4\cdot 24^4\cdot 49^2 - 4\cdot 49\cdot 26^2\cdot 24^2\cdot 17^2 =$

$= 26^2\cdot 24^2\cdot 49\cdot(26^2\cdot 24^2\cdot 49 - 4\cdot 17^2)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

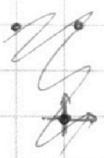
МФТИ

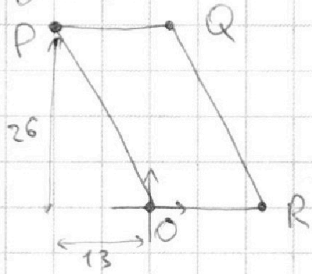
№3

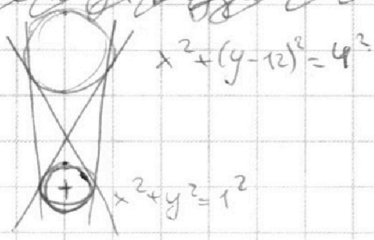
$y_2 - y_1 = 14 + 2(x_1 - x_2) = \cancel{28(x_1 - x_2)} = \cancel{-28(x_2 - x_1)}$

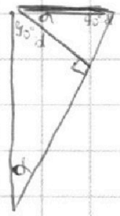
$= -2(x_2 - x_1) + 14$

~~Сначало будем считать, что $x_2 \geq x_1$ (т.е. за B будем считать более правую из двух точек).~~

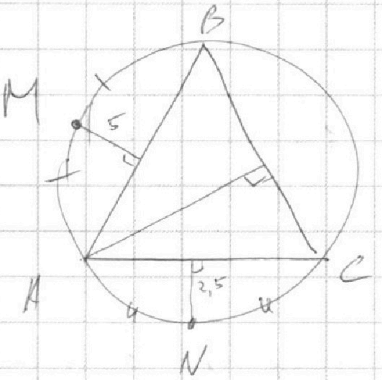


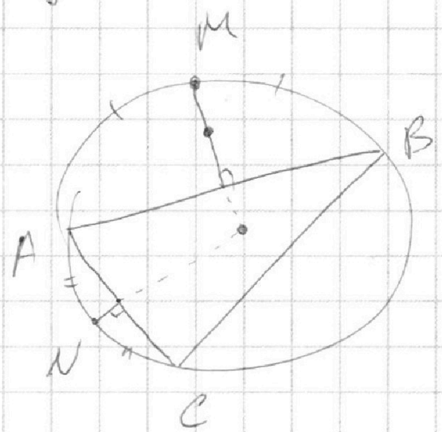


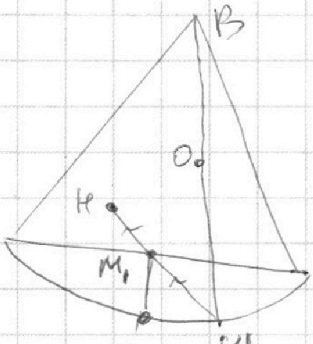




$y = -ax + 8b$







$a^2 - 7ab + b^2 = (a+b)^2 - 9ab$

$ka + kb = 9ab \Rightarrow k \,\vdots\, 9a ; k \,\vdots\, b$; ~~где~~ $k \geq ab$

$ab(a+b) \leq 9ab$; $a + b \leq 9$