



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{14}7^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{20}7^{37}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-12;24)$ ,  $Q(3;24)$  и  $R(15;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$ .
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



УС.

$$\begin{aligned}
 ab &: 2^{14} \cdot 7^{10} & \Rightarrow & \quad ab \geq 2^{14} \cdot 7^{10} & \Rightarrow & \quad abc \geq 2^{14} \cdot 7^{10} \\
 bc &: 2^{17} \cdot 7^{17} & \Rightarrow & \quad bc \geq 2^{17} \cdot 7^{17} & \Rightarrow & \quad abc \geq 2^{17} \cdot 7^{17} \\
 ac &: 2^{20} \cdot 7^{37} & \Rightarrow & \quad ac \geq 2^{20} \cdot 7^{37} & \Rightarrow & \quad abc \geq 2^{20} \cdot 7^{37}
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow abc \geq 2^{14} \cdot 7^{10}, abc \geq 2^{17} \cdot 7^{17}, abc \geq 2^{20} \cdot 7^{37}$

Минимальное возможное значение abc можно представить в виде:  $abc = 2^x \cdot 7^y \Rightarrow$

$$\begin{cases}
 x \geq 14 \\
 x \geq 17 \\
 x \geq 20 \\
 y \geq 10 \\
 y \geq 17 \\
 y \geq 37
 \end{cases}$$

$$\begin{cases}
 x \geq 20 \\
 y \geq 37
 \end{cases}$$

$$\Rightarrow abc \geq 2^{20} \cdot 7^{37}$$

Если  $abc = 2^{20} \cdot 7^{37}$ ; тогда найдутся значения a, b, c:

$$a = \frac{2^{20} \cdot 7^{37}}{2^{17} \cdot 7^{17}} = 2^3 \cdot 7^{20}$$

$$b = \frac{2^{20} \cdot 7^{37}}{2^{20} \cdot 7^{37}} = 1$$

$$c = \frac{2^{20} \cdot 7^{37}}{2^{14} \cdot 7^{10}} = 2^6 \cdot 7^{27}$$

$$ab = 2^3 \cdot 7^{20}$$

x, y - целые натур. т.к. a, b, c - натур

При этом:

$$abc \geq 2^{14+17+20} \cdot 7^{10+17+37}$$

$$\begin{cases}
 x \geq \frac{14+17+20}{2} \\
 y \geq \frac{10+17+37}{2} \\
 x \geq 20 \\
 y \geq 37
 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}
 x \geq 25,5 \\
 y \geq 32 \\
 x \geq 20 \\
 y \geq 37
 \end{cases}$$

$$\begin{cases}
 x \geq 26 \\
 y \geq 37
 \end{cases}
 \Rightarrow abc \geq 2^{26} \cdot 7^{37}$$

$$a = \frac{2^{26} \cdot 7^{37}}{2^{17} \cdot 7^{17}} = 2^9 \cdot 7^{20} = a$$

$$b = \frac{2^{26} \cdot 7^{37}}{2^{26} \cdot 7^{37}} = 1 = b$$

$$c = \frac{2^{26} \cdot 7^{37}}{2^{14} \cdot 7^{10}} = 2^{12} \cdot 7^{27} = c$$

Минимальное значение abc - это  $2^{26} \cdot 7^{37}$

Ответ:  $2^{26} \cdot 7^{37}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

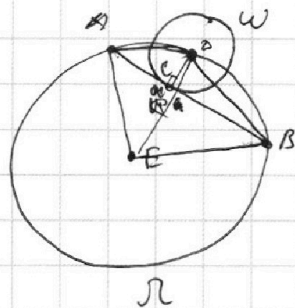
1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

ЛМФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№3.



$D, E$  - центры  $\omega$  и  $\Omega$ , соответственно  
 Треугольн  $AD, DB, EA, EB, ED$ :

Рассмотрим 4-угольник  $ADBE$  индольно:

$DC \perp AB$  по св.  
 касательной  $AB$   
 $\Rightarrow DC$  - высота на  $AB$

По условию:  $\frac{AC}{CB} = \frac{7}{1}$

$DC = 1$        $\frac{AC}{CB} = \frac{7}{1}$

Пусть  $BC = x$ . Тогда  $AC = 7x$

$\Rightarrow \Omega$  - описанная окружность для  $\triangle ADB$

$\Rightarrow$  Площадь  $\triangle ADB$ :  $S = \frac{AD \cdot DB \cdot AB}{4R}$ , где

$R = AE = ED = EB = 5$ . Также же:  $S = \frac{DC \cdot AB}{2}$

$AD = \sqrt{1 + (7x)^2}$ ,  $DB = \sqrt{1 + x^2}$ ,  $AB = 8x$

$$\frac{AD \cdot DB \cdot AB}{4R} = \frac{DC \cdot AB}{2}$$

$AD \cdot DB = 2DCR = 2 \cdot 1 \cdot 2R = 4R$

$AD \cdot DB = \sqrt{1 + (7x)^2} \cdot \sqrt{1 + x^2} = 2 \cdot 5 = 10$

$(1 + 49x^2)(1 + x^2) = 100$

$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$

$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0 \Leftrightarrow D = 2500 + 4 \cdot 49 \cdot 99 = 21904 =$

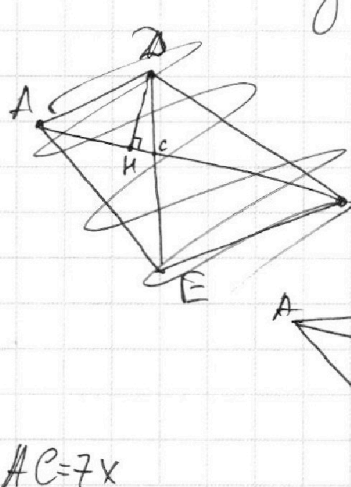
$= 16 \cdot 1369 = 16 \cdot 37^2 = (4 \cdot 37)^2 = 148^2$

Замечка:  $t = x^2 \geq 0$   
 $49t^2 + 50t - 99 = 0$

Замечка:  $t = x^2 \geq 0$

$49t^2 + 50t - 99 = 0$

$D = 2500 + 4 \cdot 49 \cdot 99 = 3088 = 16 \cdot 193$



$$\begin{array}{r} \times 99 \\ 49 \\ \hline 891 \\ 396 \\ \hline 4851 \\ 4 \\ \hline 19404 \\ + 2500 \\ \hline 21904 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{193} \\ 13 \\ \hline 98 \\ 498 \\ \hline 588 \\ 24 \\ \hline 3088 \\ 24 \\ \hline 3088 \\ - 3088 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{148} \\ 12 \\ \hline 36 \\ 488 \\ \hline 588 \\ 24 \\ \hline 3088 \\ 24 \\ \hline 3088 \\ - 3088 \\ \hline 0 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1    2    3    4    5    6    7  
                 

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$49t^2 + 50t - 99 = 0$$

$$t = \frac{-50 + 148}{2 \cdot 49} = \frac{98}{2 \cdot 49} = 1 \quad \Rightarrow X^2 = 1 \Rightarrow X = 1$$

$$t = \frac{-50 - 148}{2 \cdot 49} < 0$$

$$AB = 7x + x = 8x = 8$$

Ответ:  $AB = 8$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№4

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

Замена переменных:  $a = 2x^2 - 5x + 3$

$$b = 2x^2 + 2x + 1.$$

$$2 - 7x = 2x^2 - 5x + 3 - (2x^2 + 2x + 1) = a - b \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} \sqrt{a} - \sqrt{b} &= a - b \\ \sqrt{a} - \sqrt{b} &= (a - \sqrt{a}) - (b - \sqrt{b}) \\ \sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{a} &= a - \sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{b} \\ 2\sqrt{a} - \sqrt{b} &= a - \sqrt{a} \end{aligned}}$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \\ \sqrt{a} - \sqrt{b} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \text{ ①} \\ b \geq 0 \text{ ②} \\ \sqrt{a} = \sqrt{b} \text{ ③} \\ \sqrt{a} + \sqrt{b} = 1 \text{ ④} \end{cases}$$

Рассмотрим отдельно:

①  $a \geq 0$

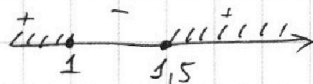
$$2x^2 - 5x + 3 \geq 0$$

$$D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1$$

$$2\left(x - \frac{5-1}{4}\right)\left(x - \frac{5+1}{4}\right) \geq 0$$

$$\frac{1}{2}(x-1)(x-1,5) \geq 0$$

$$x \in (-\infty; -1] \cup [1,5; +\infty)$$



②  $b \geq 0$

$$2x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

$$D = 4 - 4 \cdot 2 = -4 < 0$$

Т.к.  $2 > 0$ , то

$$b > 0 \text{ всегда} \Rightarrow x \in (-\infty; +\infty)$$

$$\text{④ } \sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} = 1$$

④  $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$

$$\sqrt{b} = 1 - \sqrt{a}$$

$$b = a - 2\sqrt{a} + 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{b}} \geq 0$$

③  $\sqrt{a} = \sqrt{b}$   
Т.к.  $\sqrt{a} \geq 0$   
 $\sqrt{b} \geq 0$   
 $a = b$

$$2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 2x + 1.$$

$$\begin{aligned} 7x &= 2 \\ x &= \frac{2}{7} \end{aligned}$$

$$2x^2 + 2x + 1 = 2x^2 - 5x + 3 - 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + 1$$

$$2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 3 - 7x$$

$$\begin{cases} 3 - 7x \geq 0 \\ 4(2x^2 - 5x + 3) = 9 + 49x^2 - 42x \end{cases} \Leftrightarrow$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



④ Продолжение

$$\begin{cases} 7x \leq 3 \\ 8x^2 - 20x + 12 = 9 + 49x^2 - 42x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{3}{7} \\ 41x^2 - 62x - 3 = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим отдельно:

$$41x^2 - 62x - 3 = 0$$

$$D = 62^2 + 4 \cdot 3 \cdot 41 = 976 = (4\sqrt{61})^2$$

$$x = \frac{22 \pm 4\sqrt{61}}{82}$$

$$\begin{array}{r} \times 101 \\ 101 \\ 10201 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 61 \\ 61 \\ 366 \\ 61 \\ 976 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 976 \overline{) 14} \\ 8 \phantom{00} \\ \underline{17} \phantom{00} \\ 16 \phantom{00} \\ \underline{16} \phantom{00} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 22 \\ 22 \\ 44 \\ 44 \\ \underline{484} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 41 \\ 41 \\ 82 \\ 41 \\ \underline{492} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 492 \\ 492 \\ 484 \\ \underline{976} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 41 \\ 41 \\ 155 \\ 205 \\ \underline{41} \\ 615 \end{array}$$

Умножив систему:

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -1] \cup [1,5; +\infty) \\ x = \frac{22 \pm 4\sqrt{61}}{82} \\ x = \frac{2}{7} < 1 < 1,5 \end{cases}$$

$$\frac{22 + 4\sqrt{61}}{82} = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} \vee 1,5$$

$\vee$

$\vee$

$\vee$

$\vee$

$\vee$

$\vee$

$\vee$

$\vee$

$\vee$

$\vee$

$\vee$

$\vee$

$\vee$

$\vee$

$\vee$

$\vee$

$\vee$

$\vee$

$\vee$

$\vee$

$\vee$

$\vee$

$\vee$

$\vee$

$\vee$

$\vee$

$$11 + 2\sqrt{61} \vee 61,5$$

$$2\sqrt{61} \vee 50,5$$

$$\sqrt{61} \vee 25,25 = \frac{101}{4}$$

$$61 \vee \frac{101^2}{16}$$

$$976 < 10201$$

$$\frac{4 + 2\sqrt{61}}{41} < 1,5$$

$$22 \vee 4\sqrt{61}$$

$$5,5 < 6 < \sqrt{61}$$

$$36 < 61$$

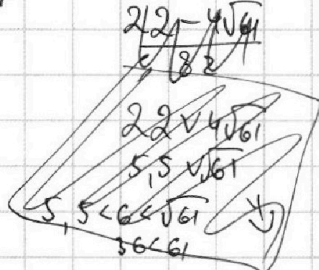
$$\frac{22 - 4\sqrt{61}}{82} < 0$$

$$26 > 20 > \sqrt{61}$$

$$400 > 61$$

$$\frac{22 - 4\sqrt{61}}{82} > -1$$

Проверка того, что корни входят в промежутки



**Ответ:**  
 $x = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41}$   
 $x = \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41}$   
 $x = \frac{2}{7}$

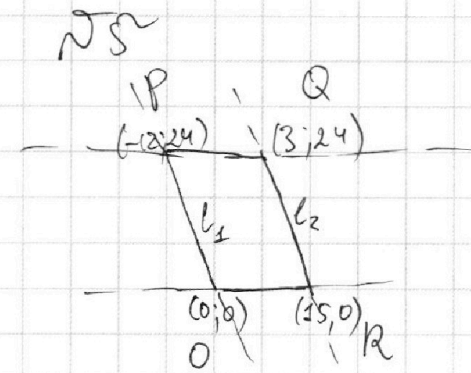
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Если точка ~~A(x1, y1)~~ M(x, y) принадлежит параллелю PQRO, то:

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ y \leq 24 \\ y \leq -2x + 30 \\ y \geq -2x \end{cases} \quad 2) x \in [-2; 15]$$

$l_1$  - прямая через PO.

ур-е прямой  $l$  из графика:

$$l_1: y = -2x$$

Аналогично

для  $l_2$ :  $l_2 \parallel l_1$ , то  
 $y_{l_2} \text{ выг: } -2x + b = 0$   
 $-2 \cdot 15 + b = 0$   
 $b = 30$

$$l_2: y = -2x + 30$$

Для точек  $A(x_1, y_1)$  и  $B(x_2, y_2)$ :

$$\begin{cases} y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \\ y_1 \leq 24, y_2 \leq 24 \\ y_1 \leq -2x_1 + 30 \\ y_2 \leq -2x_2 + 30 \\ y_1 \geq -2x_1 \\ y_2 \geq -2x_2 \\ 2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leq y_1 \leq 24 \\ 0 \leq y_2 \leq 24 \\ 0 \leq y_1 + 2x_1 \leq 30 \\ 0 \leq y_2 + 2x_2 \leq 30 \\ 2x_2 + y_2 = 12 + 2x_1 + y_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq y_1 \leq 24 \\ 0 \leq y_2 \leq 24 \\ -2x_1 \leq y_1 \leq 30 - 2x_1 \\ -2x_2 \leq y_2 \leq 30 - 2x_2 \\ 2x_2 + y_2 = 12 + 2x_1 + y_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 + 2x_1 \in [0; 30] \\ 0 \leq y_1 \leq 24, 0 \leq y_2 \leq 24 \\ 12 \leq 2x_2 + y_2 \leq 42 \\ 2x_2 + y_2 = 12 + 2x_1 + y_1 \\ 0 \leq y_2 + 2x_2 \leq 30 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 0 \leq y_1 \leq 24; 0 \leq y_2 \leq 24 \\ 12 \leq 2x_2 + y_2 \leq 30 \\ 2x_2 + y_2 = 12 + 2x_1 + y_1 \\ y_1 + 2x_1 \in [0; 30] \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~$$\begin{cases} 0 \leq y_1 \leq 24 \\ 0 \leq y_2 \leq 24 \\ 12 \leq 2x_2 + y_2 \leq 30 \\ 2x_2 + y_2 = 2x_1 + y_1 + 12 \\ 0 \leq 2x_1 + y_1 \leq 30 \end{cases}$$~~

~~$x_1$  - целое и  $x_1 \in [-12; 15]$~~

Далее переберём значения  $A(x_1, y_1)$  и посчитаем кол-во подходящих  $B(x_2, y_2)$

$x_1 = -12$ :  $y_1 \in [24; 24]$

$x_1 = -11$ :  $y_1 \in [10; 10]$

$x_1 = -10$ :  $y_1 \in [9; 9]$

$$\begin{cases} 0 \leq y_1 \leq 24 \\ 0 \leq y_2 \leq 24 \\ 12 - 2x_2 \leq y_2 \leq 30 - 2x_2 \\ 2x_2 + y_2 = 2x_1 + y_1 + 12 \end{cases}$$
$$2x_2 + y_2 = 2(x_1 + y_1) + y_1 + 4$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 6.

Г. - точка

Рассмотрим отдельно первое ур-е:

$$ax - y + 10b = 0$$

(1)  $ax + 10b = y$  - ур-е прямой.

Рассмотрим отдельно второе ур-е:

$$((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \quad (2)$$

$$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 - 1 \leq 0 \\ (x^2 + y^2 - 4) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + y^2 \geq 4 \end{cases} \quad (2)$$

$(x+8)^2 + y^2 \leq 1$  - верно для точек, лежащих ~~внутри~~ принадлежащих окр-ти <sup>ω<sub>1</sub></sup> радиуса 1 с центром в т. Г. ~~(-8; 0)~~;  $(x+8)^2 + y^2 \geq 1$  - для точек вне этой окр-ти и на ее границе.

$x^2 + y^2 \leq 4$  - верно для точек, принадлежащих окр-ти <sup>ω<sub>2</sub></sup> радиуса 2 с центром в (0; 0);  $x^2 + y^2 \geq 4$  - для точек вне этой окр-ти и на ее границе.

Решение системы (2) - это точки

$(x_0; y_0)$  - решение системы (2), если:

т.  $(x_0; y_0)$  ~~лежит~~ принадлежит  $\omega_1$  и не лежит внутри  $\omega_2$

или принадлежит  $\omega_2$  и не лежит внутри  $\omega_1$ .

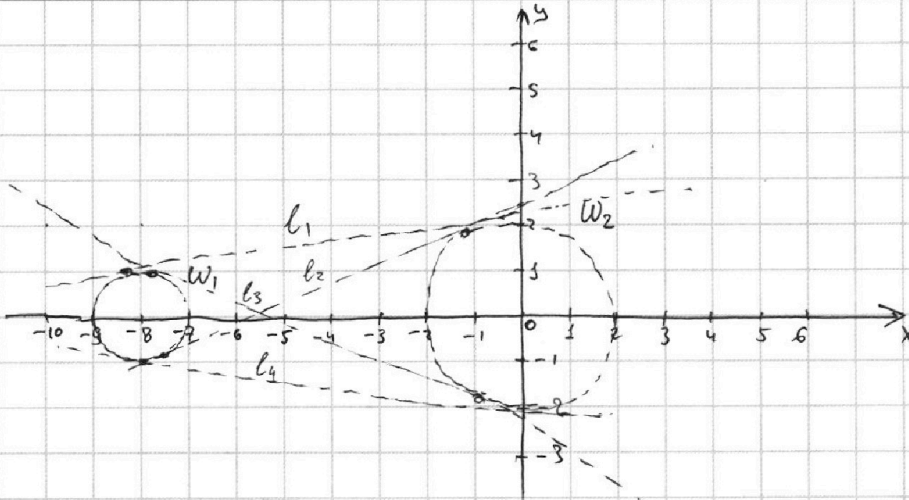
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



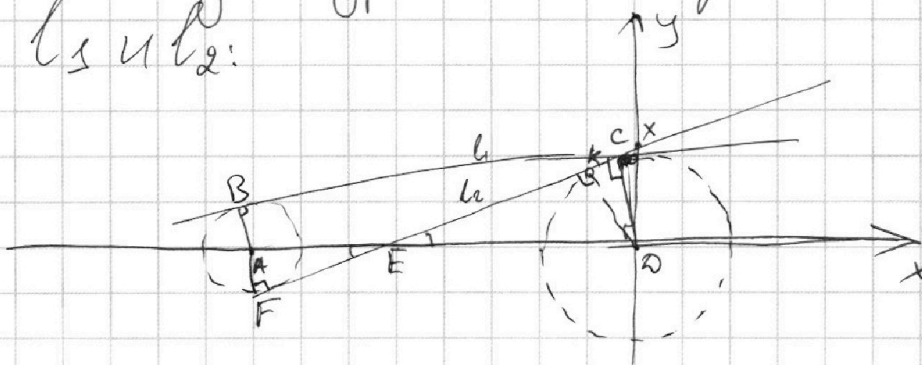
Исходная система:

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 & (3) \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

Система (3) имеет ~~ровно~~ ровно 2 решения ~~только~~ только если прямая  $y = ax + 10b$  касается обеих окружностей (точки касания - решения системы)

Общих касательных к 2-м окр-там можно провести 4 (см. рис:  $l_1, l_2, l_3, l_4$ ). <sup>параллельно</sup> ~~Собираем все прямые~~ и все

Найдём уравнение прямой  $l_1, l_2, l_3, l_4$ :  
 $l_1$  и  $l_2$ :



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$AE + ED = 8$$

$$AF = 1$$

$$ED \text{ с к} = 5$$

$\angle CED = \angle AEF$  как вертикальные  
углы

~~$\angle AFE = \angle DCE = 90^\circ$~~   
по св. касательной

$$\Delta CED \sim \Delta FEA$$

$$\frac{ED}{AE} = \frac{CE}{AF} = 5 \Rightarrow ED = 5AE$$
$$AE + 5AE = 8$$
$$AE = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \Rightarrow$$

$$ED = 5 \cdot \frac{4}{3} = \frac{20}{3}$$

~~$\Delta EAD \sim \Delta EDC \Rightarrow \frac{AD}{ED} = \frac{DC}{ED}$~~   
 ~~$\Delta EAD \sim \Delta EAF \Rightarrow$~~

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

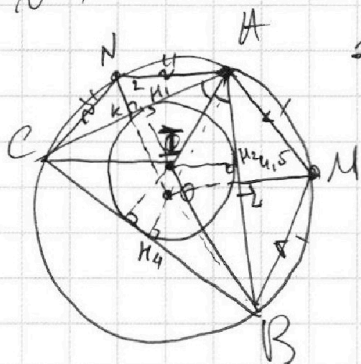
1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№7



р/б - равнобедренный

1. Т.  $O$  - центр описанной окр-ти для  $\triangle ABC$ ,  $R$  - её радиус
2. Т.  $I$  - центр вписанной окр-ти для  $\triangle ABC$ ,  $r$  - её радиус.

3. Т.к.  $UCN = UAN$ , то  $AN = CN$   
 $UAM = UBM$ , то  $AM = BM$

4. Пусть  $NK$  и  $ML$  - высоты из т.  $N$  и т.  $M$  на  $AC$  и  $AB$ , соответственно. Тогда по усл.  $NK = 2$ ,  $ML = 4,5$ .

5. Из 3)  $\triangle CNA$  и  $\triangle AMB$  - р/б.  $\Rightarrow$

$NK$  и  $ML$  - серединные перпендикуляры к  $AC$  и  $AB$  соответственно  $\Rightarrow$  Третьи  $NK$  и  $ML$

пересекаются в т.  $O$  по св. описанной окр-ти.

6.  $OM = ON = R = NK + OK = ML + OL$

7. Опустим из т.  $I$  высоты  $IK_1$  и  $IK_2$  на  $AC$  и  $AB$  соответственно.  $IK_1 = IK_2 = r$

8.  $AO = OM = OB \Rightarrow \triangle AMB = \triangle AOB \Rightarrow ML = OL \Rightarrow OM = 2ML = 9$   
 Аналогично,  $OK = 4$

~~8.  $IK_2 = \frac{1}{2} OC = \frac{1}{2} R = IK_1 = r$~~

8.  $AI = 2OK_1$  (сл. р.с.)  $\Rightarrow OK_1 = \frac{1}{2} AI$

9.  $OK_1 + OK + OL = 3r \Rightarrow 2R + OL = 3r + 6,5$

$2R + \frac{1}{2} AI = 3r + 6,5$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1    2    3    4    5    6    7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2R + \frac{1}{2}AI = 6,5 + 3n$$

$$2R + 0,5n = 6,5 + 3n$$

$$2,5n = 2R - 6,5$$

*Нужно найти:*  
 $AI = n - ?$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1)  $ab: 2^{14} 7^{10} \Rightarrow \min ab = 2^{14} 7^{10}$

$bc: 2^{17} 7^{17} \Rightarrow \min bc = 2^{17} 7^{17}$

$ac: 2^{20} 7^{37} \Rightarrow \min ac = 2^{20} 7^{37}$

$abc^2 = 2^{31} \cdot 7^{27} \cdot 2^{20} \cdot 7^{37}$   
 $\min 2^{51} \cdot 7^{64}$

$a = 2^8 \cdot 7^{15}$

$b = 2^6 \cdot 7^5$

$c = 2^{12} \cdot 7^{22}$

$2x^2 + 2x + 1$

$D = 4 - 4$

$2x^2 - 5x + 3$   
 $D = 25 - 4 \cdot 6 = 1$   
 $2(x - \frac{5-1}{4})(x - \frac{5+1}{4})$   
 $2(x-1)(x-1.5)$

$bc_{\min} = 2 \cdot 2^{17} \cdot 7^{17} = 2^{18} \cdot 7^{17}$

$abc^2 = 2^{14+6+20} \cdot 7^{10+5+37} = 2^{40} \cdot 7^{52}$   
 $abc = 2^{26} \cdot 7^{32}$

$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}$

$a^2 - 6ab + b^2$

$D = 36 - 4 = 32$

$D = 36b^2 - 4b^2 = 32b^2$

$\frac{a^2 - 6ab + b^2}{a^2 + ab} \cdot \frac{a+b}{a-7b}$   
 $\frac{-7ab + b^2}{-7ab - 7b^2} \cdot \frac{8b^2}{8b^2}$

$(a - \frac{6 - \sqrt{32}}{2}) (a - \frac{6 + 4\sqrt{2}b}{2}) (a - \frac{6 + 4\sqrt{2}b}{2})$

$(a - 3 + 2\sqrt{2}b) (a - 3 - 2\sqrt{2}b)$

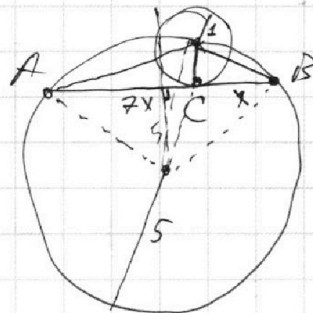
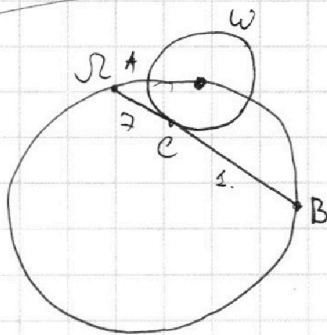
$\frac{a+b}{(a-7b)(a+b) + 8b^2}$

$8b^2 : a+b ?$

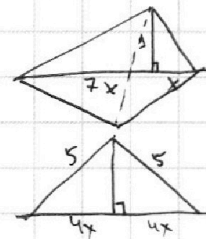
$8b^2 = (a+b)k$

$a+b=8$

$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b$



AB=?



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$4x = \frac{\sqrt{49x^4 + 50x^2 + 1}}{20}$$

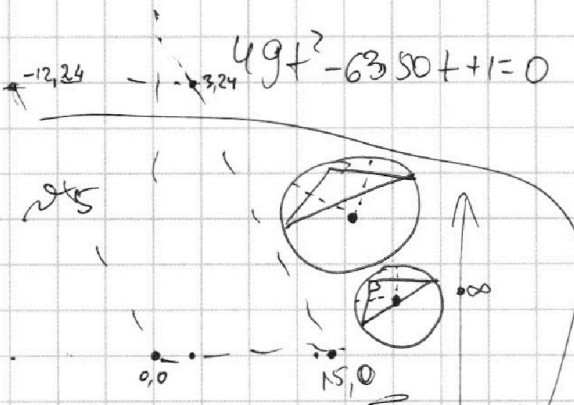
$$400x^2 = 49x^4 + 50x^2 + 1$$

$$49t^2 - 6350t + 1 = 0$$

$$D = 6350^2 - 4 \cdot 49 = 60229$$

$$\begin{array}{r} 21904 \overline{) 4} \\ 43808 \\ \underline{-16} \\ 1659 \\ 1658 \\ \underline{-1} \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 637 \\ 259 \\ \hline 111 \\ 1369 \end{array}$$



$$y_1, y_2 \geq 0$$

$$y_1, y_2 \geq -2x_1, -2x_2$$

$$y_1, y_2 \leq 24$$

$$y_1, y_2 \leq -2x_1 + 30, -2x_2 + 30$$

$$3k + b = 24$$

$$5k + b = 0$$

$$12k = 24$$

$$k = 2$$

$$b = 30$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$\begin{array}{r} 237 \\ \times 237 \\ \hline 1659 \\ 474 \\ \hline 56169 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 243 \\ \times 243 \\ \hline 972 \\ 486 \\ \hline 59049 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 217 \\ \times 217 \\ \hline 1519 \\ 434 \\ \hline 47089 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 287 \\ \times 287 \\ \hline 2296 \\ 574 \\ \hline 82369 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 247 \\ \times 247 \\ \hline 1729 \\ 988 \\ \hline 61009 \end{array}$$

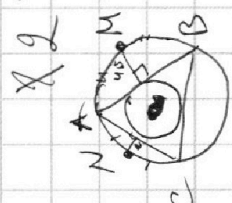
$$\begin{array}{r} 369236 \\ \times 369236 \\ \hline 2215416 \\ 738472 \\ 1314816 \\ 2215416 \\ \hline 136000000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 26 \\ \hline 156 \\ 52 \\ \hline 676 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 26 \\ \hline 156 \\ 52 \\ \hline 676 \end{array}$$

~~12~~  
~~5~~  
~~6~~  
7

~~7~~  
~~9~~  
~~5~~  
~~8~~



$$\begin{array}{r} 244 \\ \times 244 \\ \hline 976 \\ 976 \\ \hline 59049 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 56 \\ \times 56 \\ \hline 336 \\ 336 \\ \hline 3136 \end{array}$$

1000

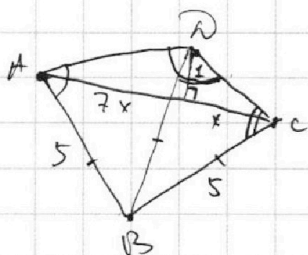
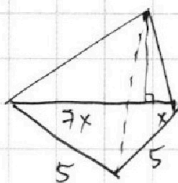
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle BC$$

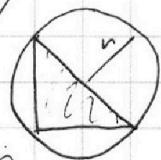
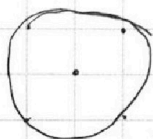
~~1/2 \* a \* b~~

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = S_{ABC}$$

$$S_{ABC} =$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8x = 4x$$

$$S_{ADC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{abc}{4R} ?$$



$$r = \sqrt{2}$$

$$S = 2$$

$$\frac{abc}{4R} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2\sqrt{2}}{4 \cdot \sqrt{2}} = 2$$

$$\frac{\sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{1+49x^2}}{4 \cdot 5}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 49 \\ 4 \\ \hline 196 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2500 \\ - 196 \\ \hline 2304 \end{array}$$

$$D = 50^2 - 4 \cdot 49 = 2500 - 196 = 2304 = 48^2$$

$$\begin{array}{r} 42 \\ \times 42 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 48 \\ \times 48 \\ \hline 384 \\ 192 \\ \hline 2304 \end{array}$$

$$4x = \frac{\sqrt{49x^4 + 50x^2 + 1}}{20}$$

$$80x^2 = \sqrt{49x^4 + 50x^2 + 1}$$

$$6400x^2 = 49x^4 + 50x^2 + 1$$

$$49x^4 - 6350x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = \frac{-50 + 48}{2 \cdot 49} = -\frac{1}{49}$$

$$x^2 = \frac{-50 - 48}{2 \cdot 49} =$$

$$49t^2 - 6350t + 1 = 0$$

$$D = 6350^2 - 4 \cdot 49$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{6350} \\ 6350 \\ \hline 3175 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1905 \\ 3810 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 60325 \\ - 50 \\ \hline 60325 \end{array} \quad \begin{array}{r} 25 \\ 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -103 \\ -106 \\ \hline 2415 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2415 \\ 2415 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -32 \\ 25 \\ \hline -75 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -75 \\ 75 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 60 \overline{) 22919} \\ \underline{57} \\ 32 \\ \underline{19} \\ 132 \\ \underline{114} \\ 189 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 635 \\ 635 \\ \hline 3175 \\ 1905 \\ 3810 \\ \hline 60325 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 60325 \\ - 196 \\ \hline 60229 \\ - 58 \\ \hline 60325 \end{array} \quad \begin{array}{r} 17 \\ 313 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~Д1.~~

~~$ab: 2^{14} \cdot 7^{10}$~~   
 ~~$bc: 2^{17} \cdot 7^{17} \Rightarrow$~~   
 ~~$ac: 2^{20} \cdot 7^{37}$~~

~~$a, b, c \in \mathbb{N} \Rightarrow abc \in \mathbb{N}$~~

~~П.к.  $abc$  - натуральное, то  $abc \geq 2^{26} \cdot 7^{32}$~~

~~Если  $abc = 2^{26} \cdot 7^{32}$ , то:~~

~~$a = \frac{abc}{bc} = \frac{2^{26} \cdot 7^{32}}{2^{18} \cdot 7^{17}} = 2^8 \cdot 7^{15}$~~   
 ~~$b = \frac{abc}{ac} = \frac{2^{26} \cdot 7^{32}}{2^{20} \cdot 7^{37}} = 2^{-4} \cdot 7^{-5}$~~   
 ~~$c = \frac{abc}{ab} = \frac{2^{26} \cdot 7^{32}}{2^{14} \cdot 7^{10}} = 2^{12} \cdot 7^{22}$~~

~~Минимальные значения  
 ~~$ab \geq 2^{14} \cdot 7^{10}$~~   
 ~~$bc \geq 2^{17} \cdot 7^{17} \Rightarrow (abc)^2 \geq 2^{14+17+20} \cdot 7^{10+17+37}$~~   
 ~~$ac \geq 2^{20} \cdot 7^{37} \Rightarrow (abc)^2 \geq 2^{51} \cdot 7^{64}$~~   
 ~~$abc \geq 2^{25} \cdot 7^{32} \cdot \sqrt{2} \Rightarrow$~~~~

~~для  $a, b, c \in \mathbb{N}$~~

~~Д1.~~

~~$ab: 2^{14} \cdot 7^{10}$~~   
 ~~$bc: 2^{17} \cdot 7^{17} \Rightarrow abc: 2^{17} \cdot 7^{17} \Rightarrow abc \geq \text{НОК}(2^{14} \cdot 7^{10}, 2^{17} \cdot 7^{17}, 2^{20} \cdot 7^{37})$~~   
 ~~$ac: 2^{20} \cdot 7^{37}$~~   
 ~~$abc: 2^{20} \cdot 7^{37}$~~   
 ~~$\text{НОК}(2^{14} \cdot 7^{10}, 2^{17} \cdot 7^{17}, 2^{20} \cdot 7^{37}) = 2^{20} \cdot 7^{37} \Rightarrow abc \geq 2^{20} \cdot 7^{37}$~~

~~При  $abc = 2^{20} \cdot 7^{37}$ :~~

~~возможны следующие значения  $a, b, c$ :~~

~~$a = \frac{abc}{bc} = \frac{2^{20} \cdot 7^{37}}{2^{17} \cdot 7^{17}} = 2^3 \cdot 7^{20}$~~   
 ~~$b = \frac{abc}{ac} = \frac{2^{20} \cdot 7^{37}}{2^{20} \cdot 7^{37}} = 1$~~   
 ~~$c = \frac{abc}{ab} = \frac{2^{20} \cdot 7^{37}}{2^{14} \cdot 7^{10}} = 2^6 \cdot 7^{27}$~~