



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{15}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{23}7^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 17 : 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-13;26)$ ,  $Q(3;26)$  и  $R(16;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$ .
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1) Пусть  $a = 2^{\alpha_1} \cdot 4^{\beta_1}$ ,  $b = 2^{\alpha_2} \cdot 4^{\beta_2}$ ,  $c = 2^{\alpha_3} \cdot 4^{\beta_3}$ , тогда

$$abc = 2^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \cdot 4^{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3}$$

Из условия имеем:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 \geq 15 & (1) \\ \alpha_2 + \alpha_3 \geq 14 & (2) \\ \alpha_1 + \alpha_3 \geq 13 & (3) \\ \beta_1 + \beta_2 \geq 11 & (4) \\ \beta_2 + \beta_3 \geq 18 & (5) \\ \beta_3 + \beta_1 \geq 39 & (6) \end{cases}$$

≥ т.к. изнач. степень  
вхождении простого  
фактора в число ~~меньше~~  
не, чем число вхождений  
этого же простого числа  
в факторы числа ~~(n)~~ -  
- проги впрочем

$$\begin{aligned} (1)+(2)+(3) & \left\{ \begin{aligned} 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) & \geq 15 + 14 + 13 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 & \geq 24,5 \end{aligned} \right. \\ (4)+(5)+(6) & \left\{ \begin{aligned} 2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) & \geq 11 + 18 + 39 \\ \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 & \geq 34 \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

т.к.  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \in \mathbb{N}$ ,  $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \in \mathbb{N}$ , то

мин. знач.  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 : 28$ ,  $a$

$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 : 34$ . т.о.

мин. знач.  $abc$  это  $2^{28} \cdot 4^{34}$ . Действительно

если ~~это~~ уменьшим, то в него будет (т.к. оканчивается только из шк.)

входить  $\leq 27$  двоек или  $\leq 33$  четверок,

но в таком случае неверно либо

$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 24,5)$ , либо  $(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 34)$ , что  
следует из условия. Прогн впрочем.

Ответ:  $abc = 2^{28} \cdot 4^{34}$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\frac{a}{b} \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{Z}$  - несократимая  $\Leftrightarrow (a, b) = 1$  ( $(a, b) \neq \text{НОД}(a, b)$ )  
это

$$\frac{a+b}{a^2 - 2ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 2ab}$$

( $\Leftrightarrow$  тогда и только тогда, когда)

Предположим, что эта дробь сократима на  $m \in \mathbb{N}$  такое, что  $m \neq 1$ . Тогда ~~верно что~~ должно выполняться

~~$(a+b; (a+b)^2 - 2ab) \Rightarrow \frac{a+b}{(a+b)^2 - 2ab}$~~  средств

$$\begin{cases} a+b : m \\ (a+b)^2 - 2ab : m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b : m \\ 2ab : m \end{cases}$$

(т.к.  $(a+b)^2 : m$ )

$\Rightarrow \frac{a+b}{2ab}$  - сократима на  $m$ .

Докажем, что дробь  $\frac{a+b}{2ab}$  несократима,

т.е.  $(a+b, 2ab) = 1$ :

~~т.к. из условия  $(a, b) = 1$ , то~~  
 ~~$\begin{cases} a : b \\ b : a \end{cases} \Rightarrow a+b : ab$~~   
 ~~$\begin{cases} a : a \\ b : b \end{cases} \Rightarrow a+b : a$~~

~~т.к.  $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ,  $a$  и  $b$  взаимно просты, то~~  
 ~~$\begin{cases} a : b \\ b : a \end{cases} \Rightarrow a+b : ab$~~   
 ~~$\begin{cases} a : a \\ b : b \end{cases} \Rightarrow a+b : a$~~

~~т.к.  $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ,  $a$  и  $b$  взаимно просты, то~~

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

МФТИ

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~$a$  и  $b$  есть любые одно нечетное (или же  $(a, b) = 1$ ),~~

~~Если ~~одно~~ нечетное только одно (круглое веткое),~~

~~то  $ab$  - четное,  $(a+b)$  - нечетное~~

Теперь ~~так~~ разложимся  $a$  и  $b$  на простые множ-ия. Т.к.  $(a, b) = 1$  без лишнего, то

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$$

$$b = q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot q_\ell^{\beta_\ell}, \text{ причем } p_i \neq q_j \text{ для } \begin{matrix} 1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq \ell \end{matrix}$$

Тогда дроби ~~так~~ примет вид:

$$\frac{(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n} + q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \dots q_n^{\beta_n})}{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n} q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \dots q_n^{\beta_n}}. \text{ Заметим, что}$$

она не сократится т.к. числитель не делится ни на один простой множитель знаменателя (он делится только ~~срочно~~ ~~и~~ ~~сложнее~~, второе не делится).

Получив, что  $\frac{a+b}{ab}$  не сократится приходим к выводу, что сократить можно максимум на  $m=9$ , пример:  $\begin{cases} a = 5 \cdot \frac{a}{5} \\ b = 9 \cdot \frac{b}{9} \end{cases}$  - не сократится,  $\frac{a+b}{a^2 - 9ab + b^2} =$

Ответ:  $m=9$ .

$$= \frac{a}{-99}$$

сократится на  $m=9$





На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

24 Во-первых, заметим что  $3x^2+3x+1 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ ,  
т.к. коэф. при  $x^2$  положительны, а  $D = 3^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = -3 < 0$   
(ветви параболы вверх)

Отсюда  $\sqrt{3x^2+3x+1} + \sqrt{3x^2-6x+2} > 0$

Извещ. ур-ие:  $\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$

Допонем его к  $f(x) \geq 0$ :

$$(\sqrt{3x^2-6x+2})^2 - (\sqrt{3x^2+3x+1})^2 = (1-9x)(\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1})$$

$$-9x+1 = (1-9x)(\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1})$$

$$x \neq \frac{1}{9}$$

$$\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 1 \quad (\text{возведем в квадрат, т.к. обе части неотриц.})$$

$$x \neq \frac{1}{9}$$

$$(\sqrt{3x^2-6x+2})^2 + 2\sqrt{3x^2-6x+2} \cdot \sqrt{3x^2+3x+1} + (\sqrt{3x^2+3x+1})^2 = 1$$

$$x \neq \frac{1}{9}$$

$$6x^2 - 9x + 3 + 2\sqrt{(3x^2-6x+2)(3x^2+3x+1)} = 1 \quad (*)$$

Заметим, что  $6x^2 - 9x + 3 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$

т.к. коэф. при  $x^2$  положит., а  $D = 9 - 4 \cdot 6 \cdot 2 = -39 < 0$ . Отсюда  $6x^2 - 9x + 3 > 1$ ,

значит (\*) не имеет решений при  $x \neq \frac{1}{9}$ , т.к. левая часть всегда больше правой.

значит (\*) не имеет решений при  $x \neq \frac{1}{9}$ , т.к. левая часть всегда больше правой.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1    2    3    4    5    6    7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Значит, при  $x \neq \frac{1}{9}$  уравнение не имеет решения.

При  $x = \frac{1}{9}$ :

$$\sqrt{3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 - 6 \cdot \frac{1}{9} + 2} - \sqrt{3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 + 3 \cdot \frac{1}{9} + 1} = 1 - 9 \cdot \frac{1}{9}$$

$$\sqrt{\frac{1}{24} - \frac{2}{3} + 2} - \sqrt{\frac{1}{24} + \frac{1}{3} + 1} = 0$$

$$\sqrt{\frac{1}{24} + \frac{4}{3}} - \sqrt{\frac{1}{24} + \frac{4}{3}} = 0 ; \text{ верно}$$

$x = \frac{1}{9}$  корень.

Ответ:  $\frac{1}{9}$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

✓6

( $\Leftrightarrow$  - тогда и только тогда, когда)

$$\begin{cases} ax+ay-8b=0 & (1) \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 & (2) \end{cases}$$

Заметим, что  $ax+ay-8b=0$  - уравнение прямой, обозначим её  $\omega_1$ .

Заметим, что  $(x^2+y^2-1)=0$  - уравнение окружности с центром  $(0;0)$  и радиусом  $r_1=1$ . Обозначим её  $\omega_2$ .

Заметим, что  $(x^2+(y-12)^2-16)=0$  - уравнение окружности с центром  $(0;12)$  и радиусом  $r_2=4$ . Обозначим её  $\omega_3$ .

Заметим, что для произвольной точки  $(x_0; y_0)$  неравенство (2) верно, если она лежит или внутри одной из окружностей  $\omega_2$  и  $\omega_3$  (т.к.  $\omega_2$  и  $\omega_3$  не имеют общ. точек, ведь расстояние между центрами больше суммы радиусов  $1+4 < 12$ ).

~~Кроме того~~ Отсюда количество решений системы есть суммарное количество точек



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

МФТИ

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Прямой  $l$  и кругов, которые являются окружностями  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Заметим, что если ~~данная~~  $l$  пересекает <sup>одну</sup> из окружностей, то внутри этой окружности может быть любая точка, т.е.  $l$  имеет бесконечно много точек с одной из окружностей, а значит система имеет бесконечно много решений, что нам не подходит. С другой стороны, если ~~данная~~  $l$  не имеет точек с  $\omega_1$  или с  $\omega_2$  в общих точки, т.е. ~~данная~~ прямая либо касается окружности, либо не пересекает её. С другой стороны, если  $l$  ~~касается~~ касается только одной окр. из двух или не касается ни одной, то система имеет одно и не имеет решений соответственно. Получаем, что система имеет ровно 4 решения  $\Leftrightarrow$  прямая  $l$  - общая касательная  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Таких прямых - 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

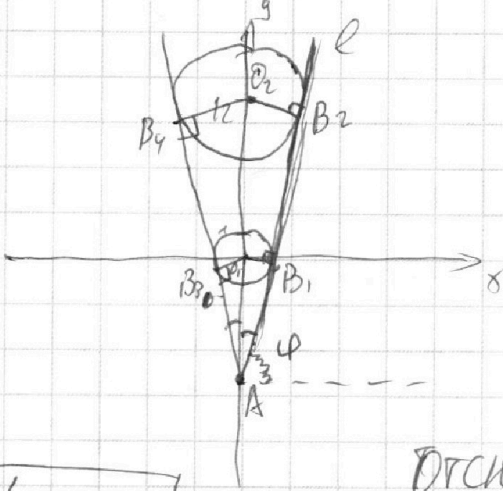
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1) Внешние касательные Гельвица!



Пусть

$$\begin{aligned} O_1, B_3 \perp l, B_3 \in l \\ O_2, B_4 \perp l, B_4 \in l \\ O_2, B_2 \perp l, B_2 \in l \\ O_1, B_1 \perp l, B_1 \in l \end{aligned}$$

радиусы в точке касания  
точки касания

Заметим, что  $O_1 \in O_2 A$

Отсюда  $A \in O_2 A$  (точка пересечения касательных)

точка пересечения касательных

$\Delta A O_1 B_1 \sim \Delta A O_2 B_2$  (по 2-м углам)

$$\frac{O_2 O_1 A}{O_1 A} = \frac{r_2}{r_1}$$

$$\frac{O_2 O_1}{O_1 A} + r = 4; O_1 A = \frac{12}{3} = 4 \Rightarrow A(0; -4)$$

~~У.к.  $ax + by = 0$  упрое  $l$ , то  $l$~~

$$\begin{aligned} -4a &= 8b \\ b &= -2 \end{aligned}$$

~~Преобразуем уравнение  $l$  в  $ax + by = 0$~~

~~У.к. упрое  $l$ :  $y = -ax + 8b$ , то  $l$~~

~~(У.к. упрое  $l$  симметрично отк.  $O_2$ , то решение  $l$  из 2-х уравнений,  $ax + by = 0$  и  $y = -ax + 8b$ )~~

$$\sin \angle O_1 A B_1 = \frac{r_1}{O_1 A}$$

$$0 = \sqrt{14}$$

По отп.  $-a$  - тангенс угла наклона  $l$  к  $O_1 A$

$$-a = \operatorname{ctg}(\angle O_1 A B_1) = \pm \sqrt{\frac{1}{\sin^2(\angle O_1 A B_1)} + 1} = \pm \sqrt{10 + 1} = \pm \sqrt{11}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

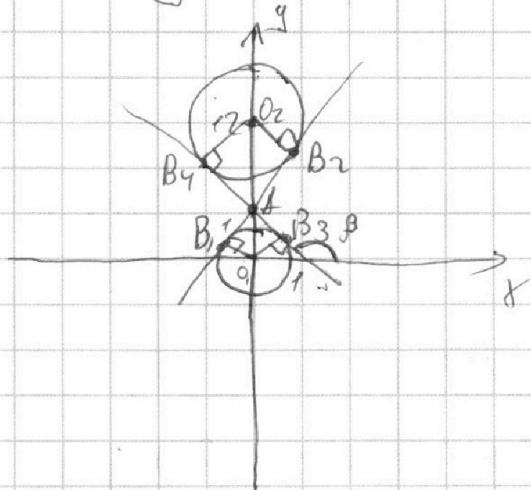
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

II Визур. касательные



Точки  $B_1, B_2, B_3, B_4$  для окружностей  $\text{I}$  и  $\text{II}$

Аналогично  $\text{I}$   $A \in O_1O_2$

$\triangle AO_1B_1 \sim \triangle AO_2B_2$  (по 2-м углам)

$$\frac{O_2A}{O_1A} = \frac{r_2}{r_1}, \quad \frac{O_2O_1}{O_1A} - 1 = 4$$

~~Окей~~  $O_1A = 80 \cdot \frac{12}{5}$

$$A(0; \frac{12}{5})$$

~~Аналог. I  $a = \frac{12}{5}$~~

~~Аналог. I  $a = \dots$  по опр.  $a$  - тангенс (или косинус) угла~~

$$-a = \tan \beta = -\cot \angle O_1AB_3 = -\sqrt{\frac{1}{\sin^2 \angle O_1AB_3} - 1} \quad \text{I}$$

~~...~~

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{144}{25} + 1} = \sqrt{\frac{169}{25}} = \frac{13}{5}$$

Итак:  $\text{I}$  и  $\text{II}$  касательные прямые

симметричны от  $Oy$ , то мы находим „ $a$ “

для одной из прямых, а для другой прямой берем  $a$  с противоположным знаком.

Ответ:  ~~$a \in \{\pm \frac{13}{5}, \pm \sqrt{14}\}$~~

$$a \in \{\pm \frac{13}{5}, \pm \sqrt{14}\}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{a+b}{a^2+4ab+b^2} = \frac{a+b}{(a-b)^2+5ab} ; a+b \equiv (a+b)^2 \neq 9ab$$

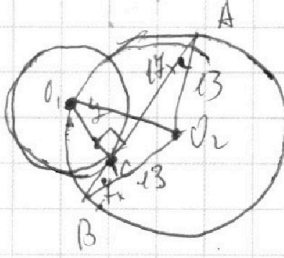
$$(a, b) = 1 \quad m(a+b) = ab$$

$$\frac{5+4}{25-4-5-4+10} = \frac{9}{48-140}$$

$$= \frac{9}{-99}$$

$$3x^2 + 3x$$

$$3x(x+1)$$



$$b \neq 0$$

$$a \neq 0$$

$$a \neq b$$

$$a+b \neq 0$$

$$a \cdot b \neq 0$$

$$a+b \neq 0$$

$$ab$$

$$D = 36 - 24 = 12$$

$$x_1, x_2 = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{3}$$

$$3x^2 - 6x + 2 \geq 0$$

$$x \leq \frac{3 - \sqrt{3}}{3}$$

$$x \geq \frac{3 + \sqrt{3}}{3}$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \dots$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2}$$

$$-\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$3x^2 - 6x + 2 - 3x^2 - 3x - 1 = (1 - 9x) \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$b(a-m) = am$$

$$b = \frac{am}{a-m} (a+b) \neq \frac{a+b}{9ab}$$

$$a+b \equiv 9ab$$

$$\frac{a}{9b} + \frac{b}{9a}$$

$$ab = a+b$$

$$ab = (a+b)x$$

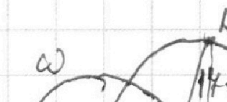
$$a+b-x = b(x)$$

$$a = b$$

$$a(b-x) = bx$$

$$a = \frac{bx}{b-x}$$

$$x = \frac{1}{9} - \frac{1}{9} + 2$$



$$3x+1$$

$$3x^2 - 6x + 2 + 3x + 3x + 1 = 2\sqrt{3x^2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$$

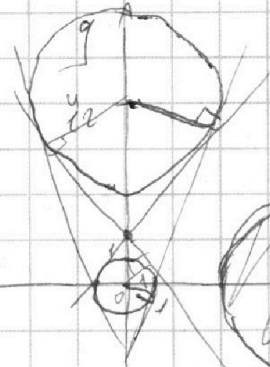
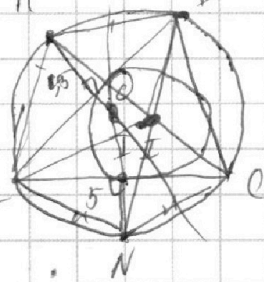
$$x = \frac{1}{3}$$

$$6x^2 - 3x + 3 + \sqrt{(3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1)} = 1$$

$$6x^2 - 3x + 3 \leq 1$$

$$2x^2 - 3x + 1 \leq \frac{1}{3}$$

$$6x^2 - 3x + 2 \leq 0$$



$\frac{5}{12}$

2v

$$\frac{12+x}{x}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$y = -ax + 8b$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ y = kx + b \end{cases}$$

$$\cot \alpha = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1}$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$x^2 + (y - 8b)^2 = 16$$

$$ax + y - 8b = 0$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$-12y + 144 = 16b^2$$

~~192~~

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ ax + y - 8b = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + (ax - 8b)^2 = 1 \quad (*) \\ ax + y - 8b = 0 \end{cases}$$

$$(*) \quad x^2 + (a^2 + 1)x^2 - 16abx + 64b^2 - 1 = 0$$

$$D = 16b^2 - 4(a^2 + 1)(64b^2 - 1) = -256b^2 + 4a^2 + 4$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\alpha_1 \beta_1$      $\alpha_2 \beta_2$      $\alpha_3 \beta_3$   
 $2 \cdot 4$      $2 \cdot 4$      $2 \cdot 4$   
 $11$      $11$      $11$   
 $8$      $6$      $6$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 15$$

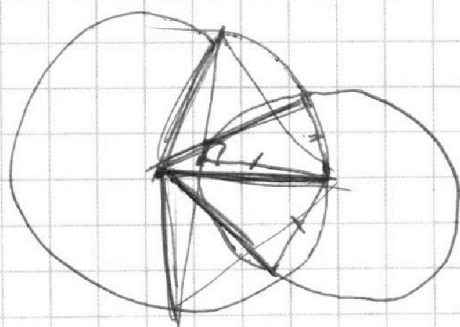
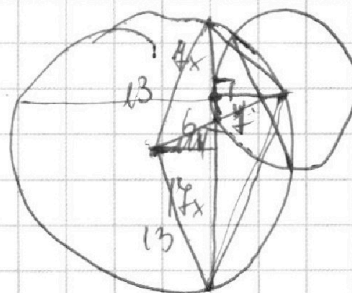
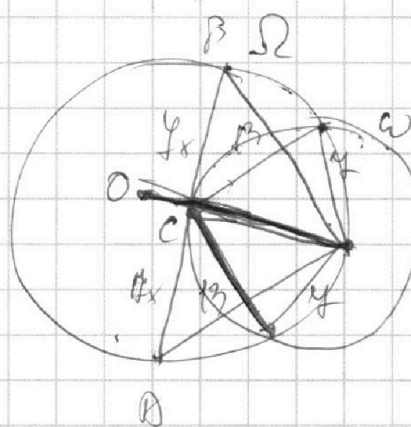
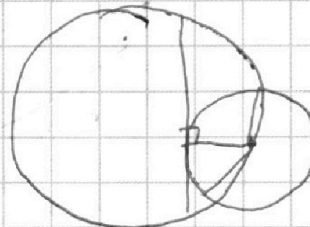
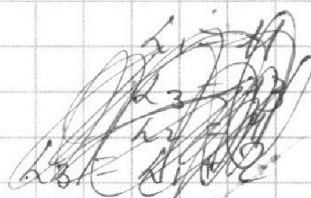
$$\beta_1 + \beta_2 = 11$$

$$\alpha_1 + \alpha_3 = 23$$

$$\beta_1 + \beta_3 = 39$$

$$\beta_2 + \beta_3 = 18$$

$$\alpha_2 + \alpha_3 = 14$$



$$\sqrt{169 - 144}$$

$$= 5$$

$$= 4$$

