



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{14}7^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{20}7^{37}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-12;24)$ ,  $Q(3;24)$  и  $R(15;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$ .

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

① Числа 1  
Пусть  $a = 2^{a_2} \cdot 7^{a_7}$ ;  $b = 2^{b_2} \cdot 7^{b_7}$ ;  $c = 2^{c_2} \cdot 7^{c_7}$   
Заметим, что если  $a, b$ , или  $c$  содержит <sup>примитивные</sup> множители, отличные от 2 и 7, то  $abc$  не минимально, т.к. ~~его~~ можно упростить эти множители.

Из условия следует, что:

$$\begin{cases} a_2 + b_2 \geq 14 \\ b_2 + c_2 \geq 17 \\ a_2 + c_2 \geq 20 \end{cases} \Rightarrow a_2 + b_2 + c_2 \geq \frac{14 + 17 + 20}{2} = 25,5$$
$$\Leftrightarrow a_2 + b_2 + c_2 \geq 26 \quad (\text{т.к. } a, b, c \in \mathbb{Z})$$
$$\begin{cases} a_7 + b_7 \geq 10 \\ b_7 + c_7 \geq 17 \\ a_7 + c_7 \geq 37 \end{cases} \Rightarrow a_7 + b_7 + c_7 \geq \frac{10 + 17 + 37}{2} = 32$$

Поэтому, что минимальное  $abc$  достигается при минимальном значении  $a_2 + b_2 + c_2 + a_7 + b_7 + c_7$ , т.к. независимо от него зависит. Минимальное значение  $a_2 + b_2 + c_2 + a_7 + b_7 + c_7$ , в свою очередь, достигается при  $a_2 + b_2 + c_2 = 26$ ,  $a_7 + b_7 + c_7 = 32$ ; пример:  $a_2 = 9$ ,  $b_2 = 6$ ,  $c_2 = 11$ ,  $a_7 = 10$ ,  $b_7 = 6$ ,  $a_7 = 2$ ,  $c_7 = 27$ . Тогда  $a = 2^9 \cdot 7^{10}$ ,  $b = 2^6 \cdot 7^6$ ,  $c = 2^{11} \cdot 7^{27}$ , легко убедиться, что условия соблюдаются.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

 МФТИ



1  2  3  4  5  6  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

①. Часть 2

Тогда  $abc = 2^{26} \cdot 7^{32}$  и мы доказали, что это  
наименьшее из вариантов.

Ответ:  $2^{26} \cdot 7^{32}$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2.

$\frac{a}{b}$  несократима  $\Rightarrow a, b$  взаимно просты  $\Leftrightarrow (a, b) = 1$

$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$  сократима на  $m \Rightarrow \begin{cases} a+b \equiv 0 \pmod{m} & (1) \\ a^2-6ab+b^2 \equiv 0 \pmod{m} & (2) \end{cases}$

$$(1) b \equiv -a \pmod{m}$$

Заметим, что т.к.  $a, b$  взаимно просты, то

$a$  и  $m$  взаимно просты, ~~также  $a+b \equiv 0 \pmod{m}$  и  $a, b \equiv m$~~

~~аналогично~~ предположим противное, пусть  $(a, m) = k$ ,

тогда  $a+b = m \cdot \begin{matrix} \text{н.к. } a+b \equiv m, \\ :k \quad \quad :k \end{matrix} x \in \mathbb{Z}$ , но тогда

$b \equiv k \Rightarrow (a, b) \neq 1$ . Противоречие  $\Rightarrow (a, m) = 1$ ,

аналогично  $(a, b, m) = 1$

$$(2) a^2 + 6a^2 + a^2 \equiv 0 \pmod{m}$$

$8a^2 \equiv 0 \pmod{m}$ , т.к.  $(a, m) = 1$ ,  $m$  - делитель 8,

$$\Rightarrow m \leq 8$$

Пример для  $m=8$ :  $a=3, b=5$

$$\frac{3+5}{3^2-6 \cdot 3 \cdot 5+5^2} = -\frac{8}{64}, \text{ действительно уробь сократима на } 8.$$

Ответ: при  $m=8$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



4.

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

Заметим, что  $\sqrt{2x^2 + 2x + 1} > 0$ , т.к. дискриминант положительного квадратного трёхчлена отрицателен ( $D = 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -4 < 0$ ) и коэффициент при  $x^2$  положителен.  $\Rightarrow \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} > 0$

Для дадим на  $t$  наше равенство, получим

$$2x^2 - 5x + 3 - 2x^2 - 2x + 1 = (2 - 7x)t$$

$$-7x + 2 = (2 - 7x)t \Rightarrow \begin{cases} t = 1 & (1) \\ 2 - 7x = 0 & (2) \end{cases}$$

$$1) t = 1: \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$$

$$\text{Погда } \begin{cases} 2x^2 + 2x + 1 \leq 1 \\ 2x^2 - 5x + 3 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-1; 0] \\ x \in [\frac{1}{2}; 2] \end{cases} \text{ Понкая система}$$

не имеет решений  $\Rightarrow$  при  $t=1$  решений нет.

$$2) 2 - 7x = 0 \quad x = \frac{2}{7}$$

$$\sqrt{\frac{8}{49} - \frac{70}{49} + 3} - \sqrt{\frac{8}{49} + \frac{28}{49} + 1} = 0$$

$$\frac{\sqrt{85}}{7} - \frac{\sqrt{85}}{7} = 0, \text{ это действительно так.}$$

Ответ:  $\frac{2}{7}$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

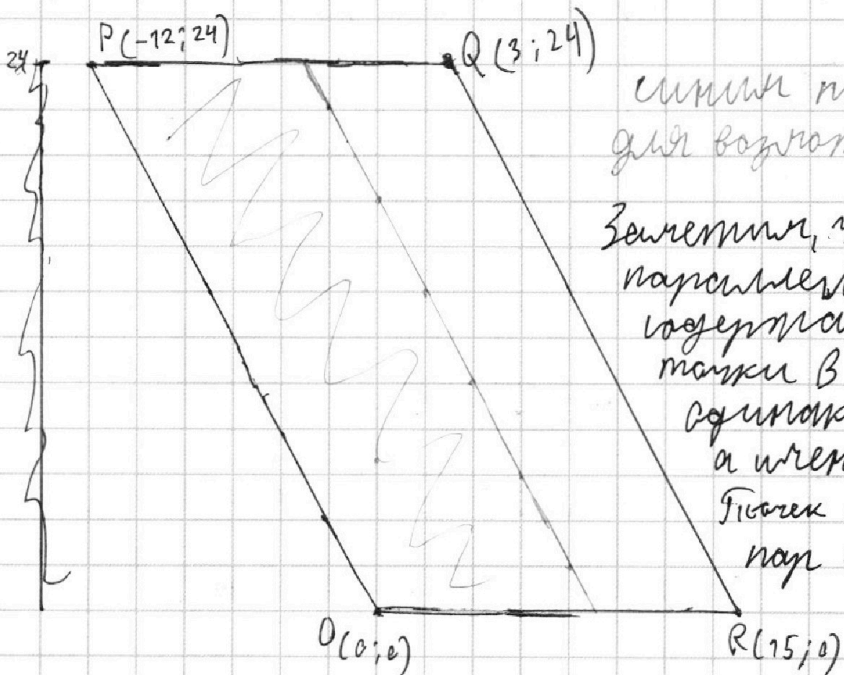
1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5.

Будем считать, что точка  $A$  зафиксирована, тогда  
 $B$  - точки с целыми координатами в параллелограмме,  
удовл.  $y_2 = (-2)x_2 + (12 + 2x_1 + y_1)$ . Заметим, что  
 $QR$  ~~лежит~~ <sup>возможными</sup> на прямой  $30 - 2x - (2)x + 30$  и пар.  
к прямой с точками  $B$ , что по условию  $2x_1 + y_1 \leq 18$ , иначе  
к прямой с точками  $B$  <sup>возможными</sup> лежит вне параллелограмма



линии показана область  
для возможных точек  $A$

Заметим, что т.к.  $QR$  перпендикулярна  
параллельна прямой,  
содержащей возможные  
точки  $B$ , то для  $\forall$  т.  $A$   
существует кол-во т.  $B$ ,  
а именно  $13 \cdot \frac{24 - 0}{2} = 156$   
Поскольку  $A \in 10 \cdot 13 = 130$ , тогда  
пар  $A$  и  $B$   $130 \cdot 13 = 1690$

Ответ: 1690.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



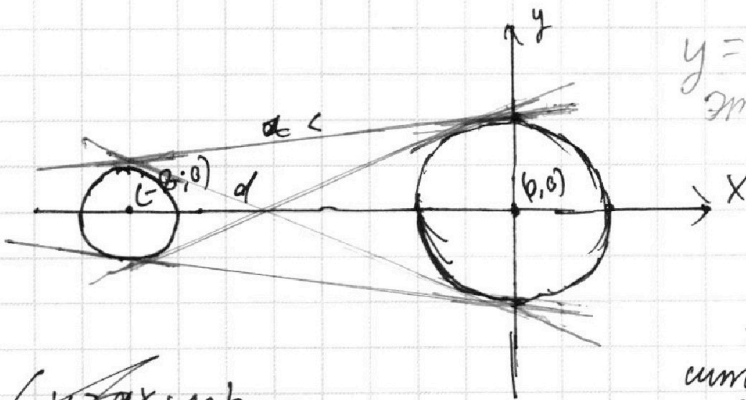
6. Часть 1

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 & (1) \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 & (2) \end{cases}$$

1) ~~реш~~  $y = ax + 10b$  - прямая

2) решения лежат на ~~внутри~~ (включая границы) окружностей, на их пересечении общие точки.

Тогда ровно 2 решения может быть только в том случае, если  $y = ax + 10b$  - касательная к этим 2 окружностям



$y = ax + 10b$  - прямая  
этим 2 окружностям  
касательными

2 прямые симметричны  
2 оставшиеся отно-  
сительно  $ax \Rightarrow$  достаточно  
найти только 2:  $ca$  и  $d$   
 $\in$  касается ~~левой~~  $ax$

$$\begin{cases} y = ax + 10b \\ (x+8)^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 - 1 \\ x^2 + y^2 - 4 \\ y = ax + 10b \end{cases}$$

можно иметь ровно 1 решение

$$\begin{cases} D_1 = 400a^2b^2 - 4(a^2+1)(100b^2-4) = 0 \\ D_2 = (0 \oplus ab + 10b)^2 - 4(a^2+1)(100b^2-1) = 0 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



6. Задача 2

$$\begin{cases} 400a^2b^2 - 4(a^2+1)(100b^2-4) = 0 \\ 400a^2b^2 + 640ab + 256 - 4(a^2+1)(100b^2-1) = 0 \end{cases}$$

$$640ab + 256 = 4(a^2+1) \cdot 3$$

$$640ab + 256 = 12a^2 + 12$$

$$12a^2 - 640ab - 244 = 0$$

$$6a^2 - 320ab - 122 = 0$$

$$3a^2 - 160ab - 61 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 80^2 + 3 \cdot 61 = 1600 + 183 = 1783$$

$$a_1 = \frac{16080 + \sqrt{\frac{D}{4}}}{-2 \cdot 3} \quad a_2 = \frac{80 - \sqrt{\frac{D}{4}}}{3}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x_0 = -\frac{1}{2}$$

$$y_0 = \frac{1}{2} - 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

$$+ 1 - \frac{3}{2} +$$

$$\frac{1}{2} \quad 0$$

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \end{cases}$$

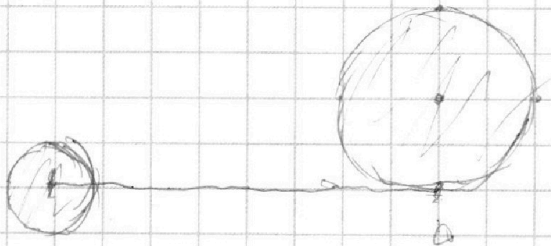
$$\begin{cases} ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

$$D = 25 - 16 = 9$$

$$y = ax + 10b$$

$$x_1 = \frac{5+3}{4} = 2$$

$$x_2 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab = 2^{14} \cdot 7^{10} K$$

$$a = 2^{a_2} \cdot 7^{a_7}$$

$$\# a_2 + b_2 \geq 14$$

$$a_7 + b_7 \geq 10$$

$$a_2 + c_2 \geq \del{14} 20$$

$$a_7 + c_7 \geq \del{10} 37$$

$$b_2 + c_2 \geq 17$$

$$b_7 + c_7 \geq 17$$

$$\begin{cases} a_7 + b_7 \geq 10 \\ b_7 + c_7 \geq 17 \\ a_7 + c_7 \geq 37 \end{cases}$$

$$a = 2^9 \cdot 7^{10}$$

$$b = 2^6$$

$$c = 2^{11} \cdot 7^{27}$$

$$\begin{cases} a_2 + b_2 \geq 14 \\ a_2 + c_2 \geq 20 \\ b_2 + c_2 \geq 17 \end{cases}$$

$$\# a_2 + b_2 + c_2 \geq \frac{20 + 14 + 17}{2} = 25,5$$

$$\# c = b + 3$$

$$\# c = 11$$

$$a = 9$$

$$b = 6$$

$$5 + 8 + 18 + 1 = 32$$

$$c = 27$$

$$b = 0$$

$$a = 10$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$[a, b] = 1$$

$$(a, b) = 1 \quad (a+b)^2 - 8ab$$

$$p+q \equiv 0 \pmod{m} \Rightarrow q \equiv -p \pmod{m}$$

$$p^2 - 6pq + q^2 \equiv 0 \pmod{m}$$

$$p^2 + 6p^2 + p^2 \equiv 0$$

$$8p^2 \equiv 0 \pmod{m}$$

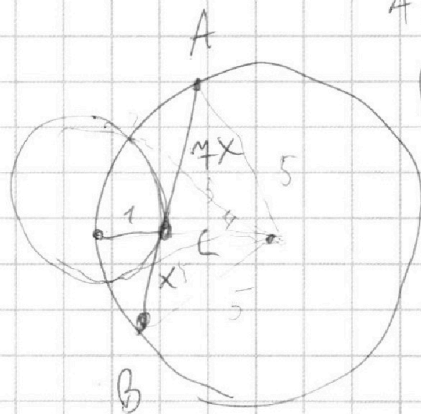
$$ax \equiv$$

$$a+b \equiv 0 \pmod{m}$$

$$\frac{3+5}{}$$

$$q = 6 \cdot 15 + 25$$

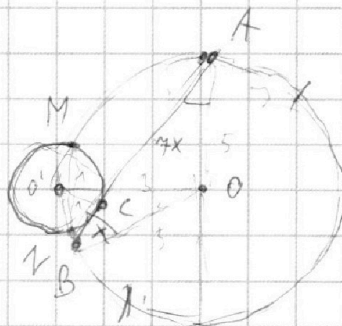
$$36 - 90 = -54$$



AB-?

R=5

r=1



$$R^2 - MO^2 = r^2 - MO'^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$D = 25 - 24 = 1 \quad D \geq 0$$

$$x_1 = \frac{5+1}{4} = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = 1$$

$$-7x + 2$$

$$2 - 7x = 0$$

$$7x = 2$$

$$x = \frac{2}{7}$$

$$2 \cdot \frac{4}{49} - 5 \cdot \frac{2}{7} + 3$$

$$\frac{8}{49} - \frac{70}{49} + 3 = -\frac{62}{49} + 3$$

$$14x - 62 = 85$$

$$\frac{\sqrt{85}}{7}$$

$$\frac{8}{49} + \frac{4}{7} + 7$$

$$36 + 49 = 85$$

$$2x^2 - 5x + 3 + 2x^2 + 2x + 1 + 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} = \cancel{2-7x} + 1$$

$$4x^2 - 3x + 3 = 4(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)$$

$$D \geq 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

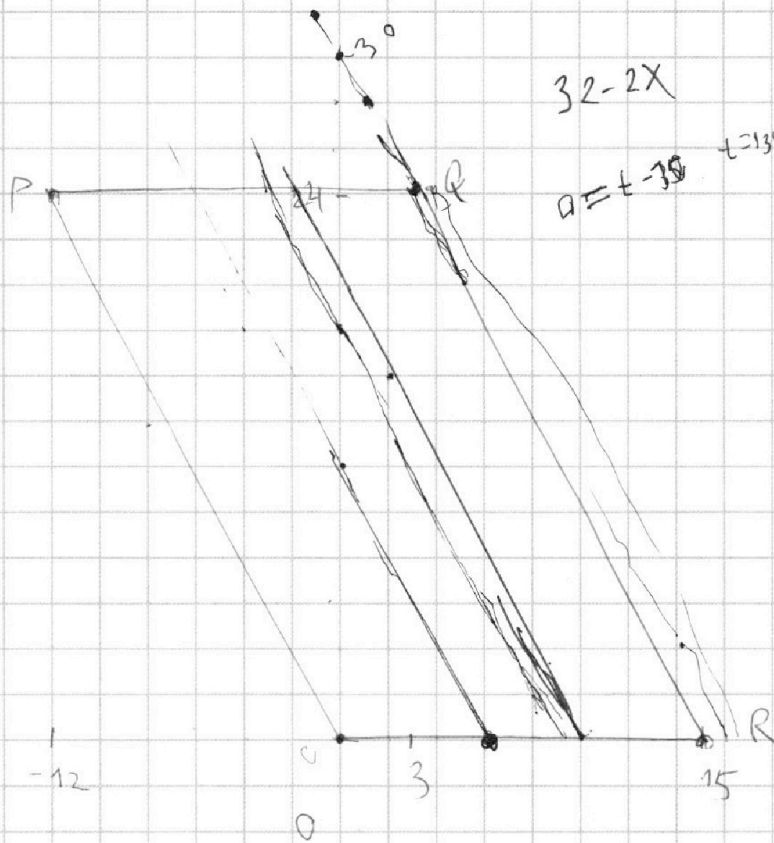
- |                          |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |
|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                                   | 4                                   | 5                                   | 6                                   | 7                                   |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12$$



$$2x_2 + y_2 = 12$$

$$y_2 = 12 - 2x_2$$

$$y_2 = 12 - 2x_2 + 2x_1 - y_1$$

$$y_2 = (-2)x_2 + (12 + 2x_1 - y_1)$$

$$QR = kx + b$$

$$30 - 2x$$

$$2x_1 + y_1 \leq 18$$

$$y \leq 18 - 2x_1$$



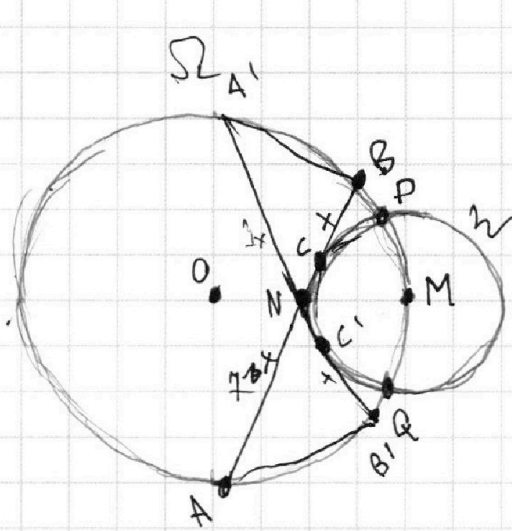
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1                                   | 2                                   | 3                                   | 4                                   | 5                                   | 6                                   | 7                                   |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



AB-?  $R=5$   $r=1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

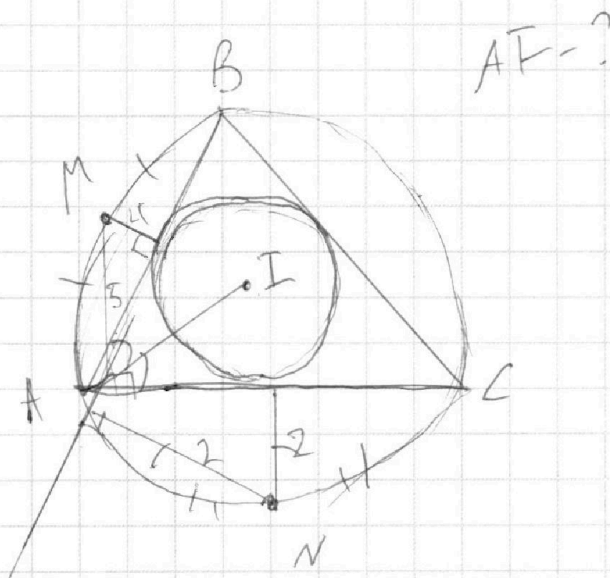
**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x^2 + 16x + 64 + a^2 y^2 + 20abx + 100b^2 - 1 = 0$$

$$D = (20ab + 16)^2 - 4(a^2 + 1)(100b^2 - 1) = 0$$



$$y = ax + 10b$$

$$x^2 + (ax + 10b)^2 - 4 = 0$$

$$x^2 + a^2 x^2 + 20abx + 100b^2 - 4 = 0$$

$$D = 400a^2 b^2 - 4(a^2 + 1)(100b^2 - 4) = 0$$