МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь
$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$
При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение
$$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система
$$\begin{cases} ax+y-8b=0, \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leqslant 0 \end{cases}$$
имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7. Т.к. $a, b, c \in \mathbb{N}$, то $a, b, c \neq 0$.

Поэтому т.к. $ab \vdots 2^{15}\cdot 7^{11}$, то $ab \geq 2^{15}\cdot 7^{11}$

аналогично: $ab \geq 2^{15}\cdot 7^{11}$
$bc \geq 2^{17}\cdot 7^{18}$
$ac \geq 2^{23}\cdot 7^{39}$

Перемножив неравенства получаем $a^2b^2c^2 \geq 2^{55}\cdot 7^{68}$
$abc \geq 2^{\frac{55}{2}}\cdot 7^{34}$

~~$abc \geq 2^{\frac{55}{2}}\cdot 7^{34}$~~

Т.к. $a, b, c \in \mathbb{N}$, то $abc \in \mathbb{N}$,

поэтому $abc \geq 2^{27+1}\cdot 7^{34} = 2^{28}\cdot 7^{34}$.

~~Покажем, что такая оценка достигается~~:

~~пусть $a = 2^{11}\cdot 7^{19}$~~
~~$b = 2^5$~~
~~$c = 2^{12}\cdot 7^{20}$~~

Пусть $a \vdots 7^{\alpha}$, $c \vdots 7^{\beta}$, где α и β - max.

Тогда $ac \vdots 7^{\alpha+\beta}$, но $ac \vdots 7^{39}$,
поэтому $\alpha+\beta \geq 39$,
то есть $\min(\alpha+\beta) = 39$.
Т.к. $ac \vdots 7^{39}$, то и $abc \vdots 7^{39}$,
поэтому $abc \geq 2^{28}\cdot 7^{39}$.

Покажем, что такая оценка достигается:
пусть:
$a = 2^{11}\cdot 7^{19}$
$c = 2^{12}\cdot 7^{20}$
$b = 2^5$

Тогда $abc = 2^{28}\cdot 7^{39}$.

Нетрудно проверить и делимость конкретных пар на соответствующие степени также двойки и семёрки.

Ответ: $2^{28}\cdot 7^{39}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№ $\frac{0}{3}$. $24\sqrt{\sqrt{13^4+17^2\cdot 19\cdot 33}-169}$

$13^4=(169)^2=(170-1)^2=28900-2\cdot170+1$

$13^4+17^2\cdot19\cdot33=28900-2\cdot170+1+17^2\cdot19\cdot33=$

$=28901+17(17\cdot19\cdot33-20)=$

$=28901+17(17\cdot19\cdot33-19-1)=$

$=28901+17(19\cdot(17\cdot33-1)-1)=$

$=28901+17(19\cdot560-1)=$

$=28901+17(10639)=$

$=28901+180863=$

$=209764$

Ответ: $24\sqrt{\sqrt{209764}-169}$

$$\begin{array}{r} \times\ 33 \\ 17 \\ \hline +\ 231 \\ 33 \\ \hline 561 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times\ 560 \\ 19 \\ \hline +\ 5040 \\ 560 \\ \hline 10640 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times\ 10639 \\ 17 \\ \hline +\ 74473 \\ 10639 \\ \hline 180863 \end{array}$$

$$+\ \cancel{28901} \quad \cancel{180}$$

$$\begin{array}{r} +\ 180863 \\ 28901 \\ \hline 209764 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№2.

Из условия следует, что НОД$(a;b)=1$.

$$a^2-7ab+b^2 = (a+b)^2-2ab-7ab = (a+b)^2-9ab.$$

Тогда $\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$.

Если ~~эту~~ дробь можно сократить на m,

то $a+b \vdots m$, но т.к. $(a;b)=1$, то $a \not\vdots m$ и $b \not\vdots m$

(Если $a \vdots m$ и $a+b \vdots m$, то и $b \vdots m \Rightarrow$ НОД$(a;b) \geq m$)

~~то~~ т.к. $(a+b) \vdots m$, то и $(a+b)^2 \vdots m$.

т.к. дробь сократима на m, то $(a+b)^2-9ab \vdots m$

и т.к. $(a+b)^2 \vdots m$, то и $9ab \vdots m$, но $a \not\vdots m$ и $b \not\vdots m \Rightarrow$

$\Rightarrow 9 \vdots m \Rightarrow \boxed{m \leq 9}$.

Приведём в пример такие a и b, что $\frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$ сократимо на 9:

$a=4$, $b=5$: $\frac{a+b}{(a+b)^2-9ab} = \frac{4+5}{(4+5)^2-9\cdot4\cdot5} = \frac{9}{81-180} = \frac{9}{-99} = -\frac{1}{11}$

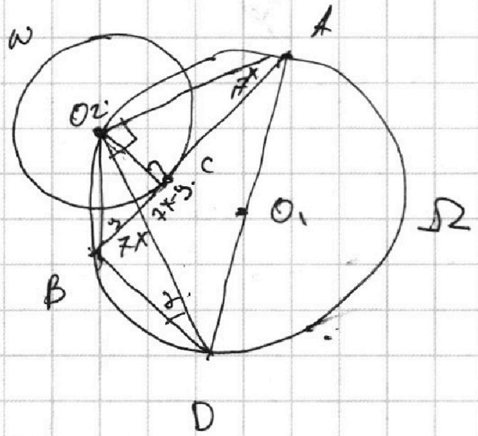
Ответ: при $m=9$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3.



Пусть $AC = 17x$, тогда $BC = 7x$.

Очевидно, $\triangle O_2BC$ – прямоугол. тогда $tg \angle O_2BC = \frac{O_2C}{BC} = \frac{7}{7x} = \frac{1}{x}$.

Продлим AO_1 до пересеч. с Ω, пусть они пересекаются в т. D, тогда AD – диаметр $\Rightarrow \angle DO_2A = \frac{\pi}{2}$.

По т. Пифагора для $\triangle O_2CA$: $O_2A = \sqrt{O_2C^2 + AC^2} = \sqrt{49+289x^2}$

По т. Пифагора для $\triangle O_2AD$: $O_2D = \sqrt{AD^2 - AO_2^2} = \sqrt{26^2 - 49 - 289x^2}$

$\angle O_2BA = \angle O_2DA$, как вписанные $\Rightarrow tg\angle O_2BA = tg\angle O_2DA = \frac{1}{x}$

Из $\triangle O_2AD$: $tg \angle O_2DA = \frac{O_2A}{O_2D} = \frac{\sqrt{49+289x^2}}{\sqrt{26^2-49-289x^2}}$,

но $tg\angle O_2DA = \frac{1}{x}$. Получаем:

$$\frac{1}{x} = \frac{\sqrt{49+289x^2}}{\sqrt{(26-7)(26+7)-289x^2}}$$

$$\sqrt{19\cdot 33 - 289x^2} = x\sqrt{49+289x^2}$$

$$19\cdot 33 - 289x^2 = x^2(49+289x^2)$$

$$19\cdot 33 - 289x^2 = 49x^2 + 289x^4$$

$x^2 = t$
$$289x^4 + (49+289)x^2 - 19\cdot 33 = 0.$$

$$289t^2 + (49+289)t - 19\cdot 33 = 0.$$

$$D = (49+289)^2 + 4\cdot 289\cdot 19\cdot 33 = 338^2 + 4\cdot 289\cdot 19\cdot 33 = (2\cdot 169)^2 + 4\cdot 289\cdot 19\cdot 33 = 4\cdot 13^4 + 4\cdot 289\cdot 19\cdot 33 = 4(13^4 + 17^2\cdot 19\cdot 33)$$

~~Ответ: $24\sqrt{\sqrt{13^4+17^2\cdot 19\cdot 33} - 169}$~~

$$t = \frac{338 + 2\sqrt{13^4+17^2\cdot 19\cdot 33}}{2} = -169 + \sqrt{13^4+17^2\cdot 19\cdot 33}$$ ($t<0$ – не подходит)

Тогда $x = \sqrt{\sqrt{13^4+17^2\cdot 19\cdot 33} - 169}$. $AB = 17x + \cancel{24}7x = 24x = 24\sqrt{\sqrt{13^4+17^2\cdot 19\cdot 33} - 169}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№4. $\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$

Обозначим ~~$\sqrt{3x^2-6x+2}$~~ $3x^2-6x+2 = a \geqslant 0$
$3x^2+3x+1 = b \geqslant 0.$

Заметим, что $a-b = 3x^2-6x+2-3x^2-3x-1 = 1-9x.$
Тогда исходное уравнение имеет вид:

$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a-b, \quad a, b, \geqslant 0$
$\sqrt{a} - \sqrt{b} = (\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})$

$\sqrt{a}-\sqrt{b} = (\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{a}-\sqrt{b}=0 \\ \sqrt{a}+\sqrt{b}=1 \end{array}\right.$

1) $\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$
$\sqrt{a}=\sqrt{b}$
$a=b, \quad a \geqslant 0$

$\cancel{3x^2}-6x+2 = \cancel{3x^2}+3x+1$
$9x=1$
$x=\frac{1}{9}$ Проверка: $3\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^2 + 3\cdot\frac{1}{9}+1 \geqslant 0$

$\frac{1}{27}+\frac{1}{3}+1 > 0$

Значит, $x=\frac{1}{9}$ - реш.

2) $\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 1$
$\left(\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1}\right)^2 = 1^2$

$3x^2-6x+2+3x^2+3x+1+2\cdot\sqrt{3x^2-6x+2}\cdot\sqrt{3x^2+3x+1} - 1 = 0$
$6x^2-3x+2 = -2\sqrt{3x^2-6x+2}\cdot\sqrt{3x^2+3x+1}$

Заметим, что правая часть всегда не положительна, т.к.
$\forall y \geqslant 0: \sqrt{y} \geqslant 0. \quad 6x^2-3x+2, \ D = 3^2-4\cdot2\cdot6 = 9-48<0.$
Получаем, что $6x^2-3x+2$ — это парабола с ветвями направленными вверх $(6>0)$ и отрицательным дискриминантом. Значит
$\forall x \quad 6x^2-3x+2 > 0.$ ~~Но~~ Поэтому $\forall x \quad 6x^2-3x+2 \neq -2\sqrt{3x^2-6x+2}\cdot\sqrt{3x^2+3x+1}$
Ответ: $x=\frac{1}{9}$ (т.к. положительное число всегда больше не положительного)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

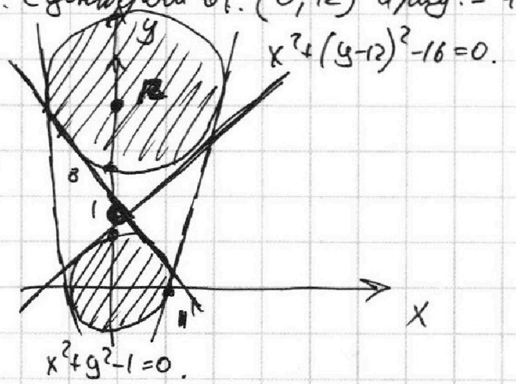
№6. начало

$$\begin{cases} ax+y-8b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16)\le 0 \end{cases}$$

$a: \exists b:$ 2 реш.

Построим график ~~второго~~ неравенства системы:

$x^2+y^2-1=0$ – окр. с центром в т. $(0;0)$ и радиусом 1.
$x^2+(y-12)^2-16=0$ – окр. с центром в т. $(0;12)$ и рад. = 4.

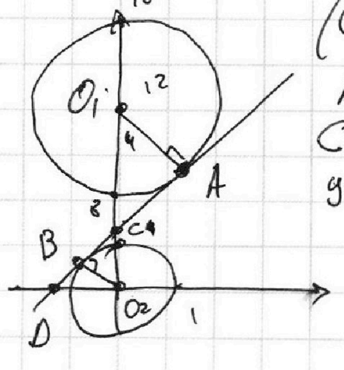


Для окружности вида
$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$
Значение выр. ~~будет~~ $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-R^2$
будет отрицательным только если x_0 и y_0 лежат внутри этой окружности и больше о если.
~~Та~~ если x_0 и y_0 – вне окр. равенство $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ достигается только для x_0 и y_0 на этой окр.

Произведение ~~чисел~~ 2-х чисел ≤ 0, только если одно из чисел ≤ 0 и а второе ≥ 0. Поэтому условие $(x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16)\le 0 \iff \left[\begin{array}{l} x^2+y^2\le 1 \\ x^2+(y-12)^2\le 16 \end{array}\right.$.
Условия равносильны, т.к. данные окружности не пересекаются, что можно заметить из графика.

$ax+y-8b=0 \iff y=-ax+8b$ – это уравнение прямой
~~Чтобы для Надо 2 реш~~ Заметим, что если прямая пересекает какую-либо окружность, то решений будет бесконечно много. Поэтому единственный возможный случай – это когда прямая $y=-ax+8b$ касается обеих окружностей.

1) Рассмотрим случай, который показан на рисунке:
$\angle BCO_2=\angle O_1CA$ (как вертик.)
$\angle O_2BC=\angle O_1AC=90°$ (рад. в т. кас.)
Значит, $\triangle O_1CA \sim \triangle O_2CB \Rightarrow$
$\Rightarrow \dfrac{O_1C}{CO_2}=\dfrac{O_1A}{BO_2}=\dfrac{4}{1}$



(O_1, O_2 – центры окр.
A, B – т. касания.
C – т. пересеч. $y=ax+8b$ и оси y.)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№6. продолжение.

$O_1C = 4CO_2 \qquad O_1O_2 = 12 = O_1C + CO_2 = 5CO_2$

$CO_2 = \frac{12}{5}$.

Рассмотрим $\triangle BO_2C$:

$CO_2 = \frac{12}{5}$, $OB_2 = 1$

$BC = \sqrt{O_2C^2 - BO_2^2} = \sqrt{\frac{144}{25} - \frac{25}{25}} = \sqrt{\frac{119}{25}} = \frac{1}{5}\sqrt{119}$.

$tg\angle BCO_2 = \frac{BO_2}{BC} = \frac{1}{\frac{1}{5}\sqrt{119}} = \frac{5}{\sqrt{119}}$

$\angle DO_2C = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \angle CDO_2 = \frac{\pi}{2} - \angle BCO_2 \Rightarrow tg\angle CDO_2 = \frac{1}{tg\angle BCO_2} = \frac{\sqrt{119}}{5}$

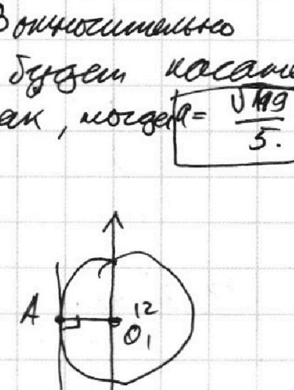
$tg\angle CDO_2 = \frac{\sqrt{119}}{5}$

$y = -ax + 8b$; $-a$ – это тангенс угла наклона прямой, поэтому $-a = tg\angle CDO_2 = \frac{\sqrt{119}}{5}$, $\boxed{a = -\frac{\sqrt{119}}{5}}$

Заметим, что если отразить прямую AB относительно ~~оси~~ оси y, то новая прямая тоже будет касательной, а число „a" поменяет свой знак, тогда $\boxed{a = \frac{\sqrt{119}}{5}}$.

2) Рассмотрим 2-й случай:

Очевидно, $\triangle XAO_1 \sim \triangle XBO_2$:



$\frac{XO_2}{XO_1} = \frac{O_2B}{O_1A} = \frac{1}{4}$ $\quad 4XO_2 = XO_1$

$O_1O_2 = 12 = XO_1 - XO_2 = 3XO_2$

$XO_2 = 4$

Из $\triangle XBO_2$: $XB = \sqrt{XO_2^2 - O_2B^2} = \sqrt{15}$

$ctg\angle BXO_2 = \frac{XB}{BO_2} = \sqrt{15}$

$\angle XDO_2 = \frac{\pi}{2} - \angle DXO_2$ т.к. $\angle DO_2X = \frac{\pi}{2}$, $\angle ADO_2 = \pi - \angle XDO_2 = \frac{\pi}{2} + \angle DXO_2$

$-a = tg(\angle ADO_2) = tg\left(\frac{\pi}{2} + \angle DXO_2\right) = -ctg\angle DXO_2 = -\sqrt{15}$. $\boxed{a = \sqrt{15}}$

Аналогично первому случаю $a = -\sqrt{15}$ – тоже подходит.

Ответ: ~~$a \in \{\pm\sqrt{15}, \pm\sqrt{119}\,\frac{1}{5}\}$~~ $a \in \left\{\pm\sqrt{15}; \pm\frac{1}{5}\sqrt{119}\right\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$13^4 = 169^2 \quad 7 \quad (170-1)^2 = 28900 - 2\cdot170+1 +$

$+ 17^2 \cdot 33 \cdot 19$

$\cancel{28}\cdot\ 28900 - 2\cdot170+1 + 17^2\cdot19\cdot33 =$

$= 28800 + 1 - 17(19\cdot33 - 20) =$

$= 28900+1 - 17(19\cdot32 - 1) =$

$= 28901 - 17\cdot19\cdot32 + 17.$

$20\cdot32 - 32 = 640 - 32 = 608.$

$28901 - 608 + 17.$

$$\begin{array}{r} 28901 \\ -\ 608 \\ \hline 28293 \end{array}$$

$28293 + 17 = 28300.$

209764

$100^2 = 1000.$

44

$104^2 =$

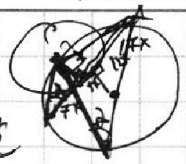
$$\begin{array}{r} 104 \\ \times\ 104 \\ \hline 416 \\ +\ 104 \\ \hline 10816 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

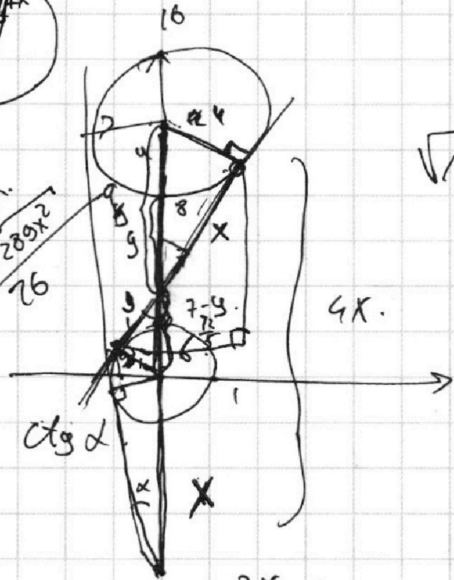
МФТИ



$tg\alpha$ $\quad tg\alpha = \frac{1}{x}$

$\sqrt{49+289x^2}$ $\quad 26$

$tg(\frac{\pi}{2}-\alpha) =$
$= \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)}{\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)} = ctg\alpha$



$4x.$

$3x. =$

$ab: 2^{15}7^{11}$ $\quad a=2^9$ $\quad b=2^4$

$bc: 2^{17}\cdot 7^{15}$ $\quad ac: 2^{23}\cdot 7^{33}$

$\sqrt{16+x^2} + \sqrt{1+y^2} = 12.$ $\quad c=15.$ $\quad 15$

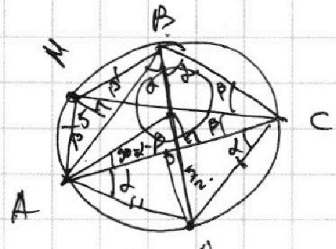
$\frac{4}{x} = \frac{1}{y}$ $\quad abc^2 \geq 2^{55}\cdot 7^{33\cdot 2}$

$4y = x$

$abc \geq 2^{28}\cdot 7^{33}$

$a=4b.$
$a+b=12.$
$5b=12$
$b=\frac{12}{5}.$

$\alpha+\beta \geq 15$
$\beta+\gamma \geq 16$
$\gamma+\alpha \geq 23$
$\alpha+\beta+\gamma \geq 28$



$tg(90+\alpha) = \frac{\sin(90+\alpha)}{\cos(90+\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -ctg\alpha.$

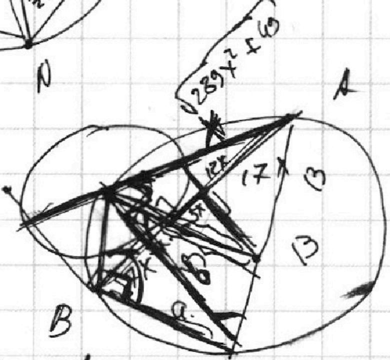
$2(\alpha+\beta+\gamma) \geq 55.$

$\alpha+\beta+\gamma \geq 28.$

$tg\alpha = \frac{5}{2AN}$

$tg\beta = \frac{5}{AM}.$

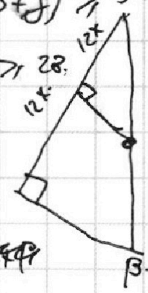
$\sqrt{289x^2+49}$



$7x/x = x.$

$\frac{17}{24}.$

$\frac{7\cdot 17}{24}.$



$\beta-\gamma = -8.$
$\beta+\gamma = 17.$
$2\beta = 9$

$tg(90-x) = ctg x.$

$tg(90-\alpha-\beta) = ctg(\alpha+\beta) =$
$= \frac{1}{tg(\alpha+\beta)} = \frac{1-tg\alpha\cdot tg\beta}{tg\alpha+tg\beta}$

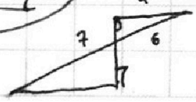
$$\left(\sqrt{289x^2+49}+7\right)^2 - 24^2x^2 = \left(\frac{7\cdot 17}{24}\right)^2$$

$$289x^2+49+49+14\sqrt{289x^2+49} - 24^2x^2 = \frac{7\cdot 17}{24},$$

$$-41x^2 + 2\sqrt{289x^2+49}\cdot 7 \quad 17^2-24^2 = -7\cdot 41x$$

$$(7x)^2 + (17x^2)^2 - 26^2 = 0. \quad -7\cdot 41x^2 + 2\cdot 7^2 + 14\sqrt{289x^2+49} = \frac{7^2\cdot 17^2}{24^2}$$

$$-41x^2 + 14 + 2\sqrt{289x^2+49} = \frac{7\cdot 17^2}{24^2}$$



$$\frac{7\cdot 17^2}{24^2} - 14 = 0.$$

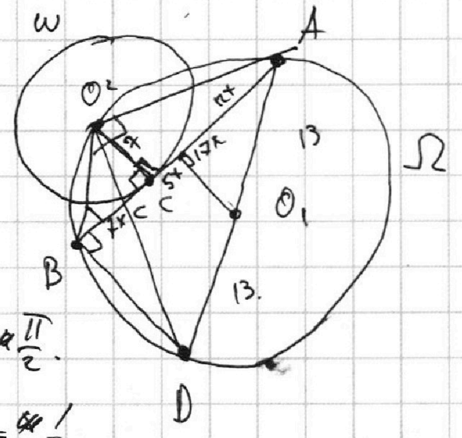
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3 Пусть $AC = 17x$, тогда $BC = 7x$.



Очевидно, $\triangle O_2BC$ – прямоугольный,
тогда $tg \angle O_2BC = \frac{O_2C}{BC} = \frac{7}{7x} = \frac{1}{x}$

Продлим AO_1 до пересечения с Ω.
Пусть они пересекутся в т. D.
AD – диаметр, поэтому $\angle AO_2D = \frac{\pi}{2}$.
$\angle O_2BC = \angle O_2DA$ как вписанные.
Поэтому $tg \angle O_2BC = tg \angle O_2DA = \frac{1}{x}$

~~Из $\triangle O_2DA$: $tg \angle O_2DA = \frac{O_2A}{AD} = \frac{O_2A}{26}$.~~

~~Получаем, $\frac{O_2A}{26} = \frac{1}{x}$.~~

~~Из $\triangle O_2CA$: $O_2A = \sqrt{7^2 + AC^2}$~~ $\sqrt{O_2C^2 + AC^2} = \sqrt{49+289x^2}$

~~Тогда: $\frac{\sqrt{49+289x^2}}{26} = \frac{1}{x}$~~

$O_2A = \sqrt{49+289x^2}$

$O_2D = \sqrt{26^2 - 49 - 289x^2} =$

$= \sqrt{(26-7)(26+7)} = \sqrt{19 \cdot 33 - 289x^2}$

$\frac{\sqrt{49+289x^2}}{\sqrt{19\cdot 33 - 289x^2}} = \frac{1}{x}$.

$289 + 49 =$
$= 200 + 50 - 2 =$
$= 340 - 2 =$
$= 338$.
$338 = 2 \cdot 169$

~~$x\sqrt{49+289x^2} = 26$.~~

~~$\sqrt{49x^2 + 289x^4} = 26$.~~

~~$49x^2 + 289x^4 = 26^2$~~

~~$x^2 = t$~~

~~$289t^2 + 49t - 26^2 = 0$~~

~~$D = 49^2 + 4 \cdot 289 \cdot 26^2$~~

$49^2 + 2 \cdot 49 \cdot 289 + 289^2 + 4 \cdot 289 \cdot 19 \cdot 33 =$ $x^2(49 + 289x^2) = 19 \cdot 33 - 289x^2$

$49^2 + 289(2 \cdot 49 + 289 + 4 \cdot 19 \cdot 33)$ $26^2 - 7^2 = (26-7)(26+7) =$

$= 19 \cdot 33$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

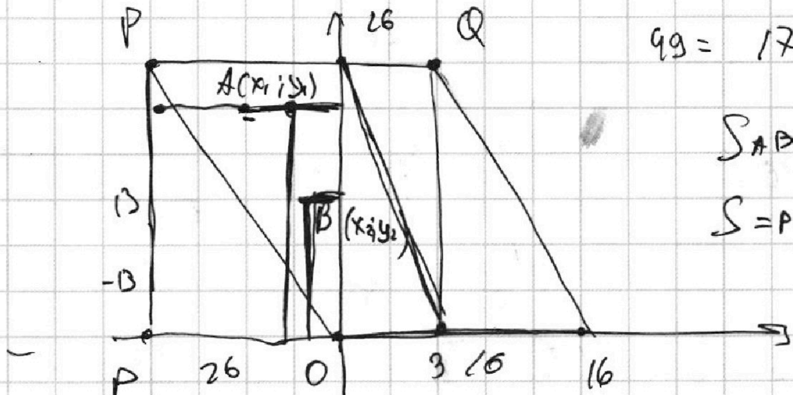
1 ☒ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$7 = \sqrt{17}$

$99 = 17x.$



$S_{ABC} = \frac{25}{tg\alpha \cdot tg\beta} \sin(2(\alpha+\beta))$

$S = p \cdot r$

$r = \frac{25 \sin(2(\alpha+\beta))}{tg\alpha \cdot tg\beta \cdot p}$

$AH = p - BC.$

$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14.$

$ab : 2^{15} \cdot 7^{19}$

$bc : 2^{17} \cdot 7^{19}$

$ac : 2^{23} \cdot 7^{39}$

$\frac{r}{p - BC}$

$a = 2^{11} \cdot 7^{20}$

$c = 2^{12} \cdot 7$

$b = 2^{5}$

min abc

$a^2 b^2 c^2 \geq 2^{55} \cdot 7^{29+39} = 2^{55} \cdot 7^{68}$

$abc \geq 2^{28} \cdot 7^{34}.$

$a = 2^{\alpha}$

$c = 2^{\alpha}$

$\alpha + \alpha$

$a = 2^{11}$

$c = 2^{12}$

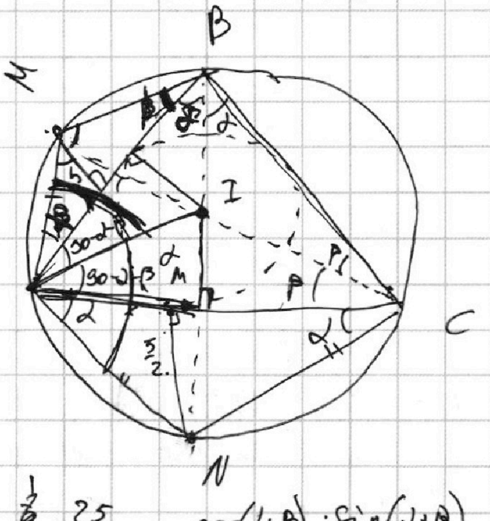
$b = 2^{5}$

23

$\frac{25 \sin(2(\alpha+\beta))}{tg\alpha \cdot tg\beta (p - BC) p} = \frac{1}{tg(\alpha+\beta)}$

$AI = ?$

$\sqrt{13^4 + 17^2 \cdot 19 \cdot 33} =$



$AC = 2 \frac{5}{2tg\alpha} = \frac{5}{tg\alpha}$

$AB = \frac{10}{tg\beta}$

$BC =$

$\frac{5}{2x} = tg\alpha$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin(\alpha+\beta) = \frac{1}{2} \frac{25}{tg\alpha \cdot tg\beta} \cdot \cos(\alpha+\beta) \cdot \sin(\alpha+\beta)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{3x^2-6x+2}+\sqrt{3x^2+3x+1}=1$

$3x^2-6x+2+3x^2+3x+1+2\sqrt{(3x^2-6x+2)(3x^2+3x+1)}=1$

$6x^2-3x+2=-2\sqrt{\ldots}$

$12x-3$

$D=9$

min

$ab \vdots 2^{15}\cdot 7^{11}$

$bc \vdots 2^{17}\cdot 7^{18}$

$ac \vdots 2^{23}\cdot 7^{39}$

$\min abc = 2^{23}\cdot 7^{39}$

$ac \geqslant 2^{23}\cdot 7^{39}$

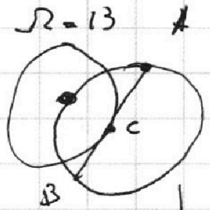
$\frac{AC}{BC}=\frac{17}{7}$

$\omega=7$

$\Omega=13$

$a=2^{15}\cdot 7^{11}$

$\cancel{b}=\cancel{c}=$



$ab \geqslant 2^{15}\cdot 7^{11}$

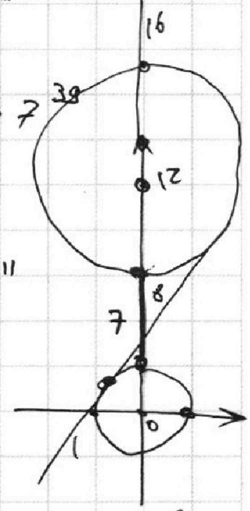
$bc \geqslant 2^{17}\cdot 7^{18}$

$ac \geqslant 2^{23}\cdot 7^{39}$

$a^2b^2c^2 \geqslant 2^{55}\cdot 7^{39\cdot 2}$

$abc \geqslant 2^{\frac{55}{2}}\cdot 7^{39} = 2^{27}\cdot 2\cdot 7^{39} = 2^{28}\cdot 7^{39}$

$abc \quad \sqrt[2]{2^{54}\cdot 2} = 2^{27}\sqrt{2}$



$abc \geqslant 2^{27}\cdot 7^{39}$

$a=2^{15}\cdot 7^{11}$

$b=2^{9}$

$c=2^{8}$

$a=2^{8}$

$b=2^{7}$

$c=$

$\alpha+\beta=15$

$\beta+\gamma=17$

$\gamma+\alpha=23$

$\cancel{\alpha+\beta}=15$

$\cancel{\beta}+\gamma=$

$\alpha+\gamma=23$

$\alpha+\beta=15$

$\gamma-\beta=8$

$\beta+\gamma=17$

$y=-ax+8b$

$x^2+y^2=1$

$y\geqslant 0$, $x\leqslant 0$, $y=\sqrt{1-x^2}$

$\alpha+\beta=16$

$\beta+\gamma=17$

$\alpha+\gamma=23$

$\alpha+\beta\geqslant 15$

$\beta+\gamma\geqslant 17$

$\cancel{\beta}\alpha+\gamma\geqslant 23$

$\alpha+\beta+\gamma=28$

$2(\alpha+\beta+\gamma)\geqslant 15+17+23=$
$=32+23=55$

$\gamma-\beta=23-16=7$

$\beta+\gamma=17$

$2\beta=24$

$\alpha=4$

$\beta=12$

$\gamma=13$

$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$

$(a;b)=1$

$ax+y-8b=0$

$(x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16)\geqslant 0$ $=12$

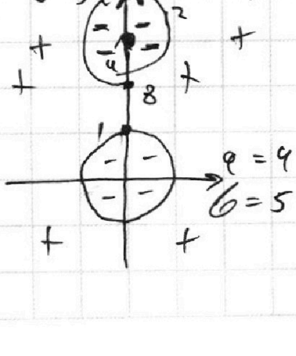
$a+b \vdots m$

$a+b\vdots m$

$\frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$

$a^2-7ab+b^2 \vdots m$

$(a+b)^2-2ab-7ab=$
$=(a+b)^2-9ab$



$a=2$

$b=3$

$a=4$

$b=5$

$\frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}=\frac{4+5}{(4+5)^2-9\cdot4\cdot5}=\frac{9}{81-180}=\frac{-9}{99}=-\frac{1}{11}$

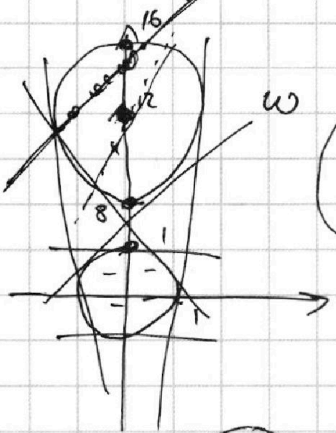
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

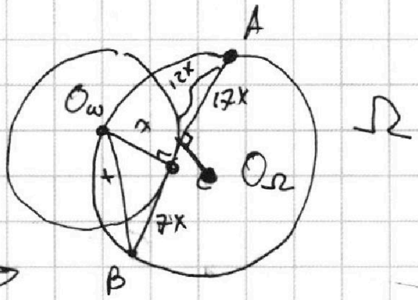
1 ☒ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$3(x^2-2x+1)-1$ $\quad 3(x-1)^2-1$





$\frac{AC}{BC}=\frac{17}{7}$

$AB=?$

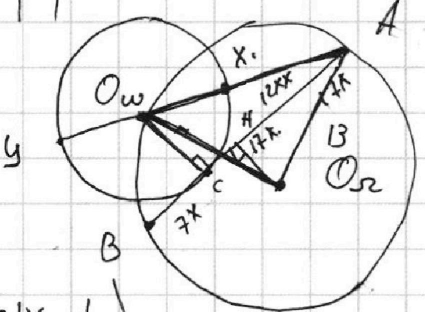
$\omega=7$

$\Omega=13.$

$y=-ax+3b.$

$AC=17x$

$BC=7x.$



$AO_\omega=\sqrt{49+289x^2}$

$AX=\sqrt{49+289x^2}-7$

$AY=\sqrt{49+289x^2}+7.$

$3\left(x^2+2\cdot\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}\right)=$

$289x^2=49+289x^2$

$3\left(x^2+x+\frac{1}{3}\right)$

$O_\Omega H=\sqrt{13^2-144x^2}$

$\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^2}$

$2x+1$ $\quad +\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=$

$x=-\frac{1}{2}$ $\quad =\frac{1}{4}-\frac{2}{4}+\frac{1}{3}=$

$3\left(x^2+2\cdot\frac{1}{2}x+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)$ $\quad \sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x.$

$3\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-3\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=3\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$ $\quad 3x^2-6x+2=a$ $\quad -\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=$

$a\geq 0$ $\quad 3x^2+3x+1=b.$ $\quad a-b=1-9x$

$b\geq 0.$

$\sqrt{a}-\sqrt{b}=a-b.$

$a-2\sqrt{ab}+b=a^2-2ab+b^2$

$f(x)=x-\sqrt{x}$

$f'(x)=1-\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\sqrt{a}-a=\sqrt{b}-b$

$a-\sqrt{a}=b\sqrt{b}.$

$\boxed{a=0 \\ b=0.}$

$\boxed{a=b}$ $\quad (\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})=(a-b)(\sqrt{a}+\sqrt{b})$

$(a-b)=(a-b)(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ $\quad \sqrt{a}-\sqrt{b}.=a^2-b^2$

$\sqrt{a}+\sqrt{b}=1$

$\sqrt{a}-\sqrt{b}=(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})$

$\sqrt{a}=\sqrt{b}$ $\quad \sqrt{a}\cdot a=b.$

$\sqrt{a}+\sqrt{b}=1$