



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{15}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{23}7^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 17 : 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-13;26)$ ,  $Q(3;26)$  и  $R(16;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$ .
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7. П.к.  $a, b, c \in \mathbb{N}$ , то  $a, b, c \neq 0$ .

Потому что п.к.  $ab : 2^{15} \cdot 7^{11}$ , то  $ab \geq 2^{15} \cdot 7^{11}$

аналогично:  $bc \geq 2^{17} \cdot 7^{18}$   
 $ac \geq 2^{23} \cdot 7^{39}$

Применив неравенства получаем  $a^2 b^2 c^2 \geq 2^{55} \cdot 7^{68}$   
 $abc \geq 2^{\frac{55}{2}} \cdot 7^{34}$

~~$abc \geq 2^{\frac{55}{2}} \cdot 7^{34}$~~

П.к.  $a, b, c \in \mathbb{N}$ , то  $abc \in \mathbb{N}$ ,

потому  $abc \geq 2^{27+1} \cdot 7^{39} = 2^{28} \cdot 7^{39}$ .

~~Покажем, что такая оценка достигается:~~

~~Пусть  $a = 2^{11} \cdot 7^{19}$   
 $b = 2^5$   
 $c = 2^{12} \cdot 7^{20}$~~

Пусть  $a = 7^d$ ,  $c = 7^b$ , где  $d, b$  - макс.

Тогда  $ac = 7^{d+b}$ , но  $ac = 7^{39}$ ,

потому  $d+b \geq 39$ ,

то есть  $\min(d+b) = 38$ .

П.к.  $ac = 7^{39}$ , то и  $abc = 7^{39}$

потому  $abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39}$ .

Покажем, что такая оценка достигается:

Пусть:

$$a = 2^{11} \cdot 7^{19}$$

$$c = 2^{12} \cdot 7^{20}$$

$$b = 2^5$$

Тогда  $abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$ .

Методом проверки и  
декомпозиции конкретных пар  
на соответствующие степени  
Тогда двойки и семёрки.

Ответ:  $2^{28} \cdot 7^{39}$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{№ } \frac{0}{3} \quad 24 \sqrt{\sqrt{13^4 + 17^2 \cdot 19 \cdot 33} - 169}$$

$$13^4 = (169)^2 = (170-1)^2 = 28900 - 2 \cdot 170 + 1$$

$$13^4 + 17^2 \cdot 19 \cdot 33 = 28900 - 2 \cdot 170 + 1 + 17^2 \cdot 19 \cdot 33 =$$

$$= 28901 + 17(17 \cdot 19 \cdot 33 - 20) =$$

$$= 28901 + 17(17 \cdot 19 \cdot 33 - 19 - 1) =$$

$$= 28901 + 17(19 \cdot (17 \cdot 33 - 1) - 1) =$$

$$= 28901 + 17(19 \cdot 560 - 1) =$$

$$= 28901 + 17(10639) =$$

$$= 28901 + 180863 =$$

$$= 209764$$

$$\text{Ответ: } 24 \sqrt{\sqrt{209764} - 169}$$

$$\begin{array}{r} \times 33 \\ \times 17 \\ \hline + 231 \\ \quad 33 \\ \hline \quad 561 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 560 \\ \times 19 \\ \hline + 5040 \\ \quad 560 \\ \hline 10640 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 10639 \\ \times 17 \\ \hline 79973 \\ + 10639 \\ \hline 180863 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + 28901 \\ + 180863 \\ \hline 209764 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2.

Из условия следует, что  $\text{НОД}(a; b) = 1$ .

$$a^2 - 7ab + b^2 = (a+b)^2 - 2ab - 7ab = (a+b)^2 - 9ab.$$

Тогда 
$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab}.$$

Если ~~это~~ дроби можно сократить на  $m$ ,

то  $a+b : m$ , н.т.к.  $(a; b) = 1$ , то  $a \not\vdash m$  и  $b \not\vdash m$

(Если  $a : m$  и  $a+b : m$ , то и  $b : m \Rightarrow \text{НОД}(a; b) \geq m$ )

т.к.  $(a+b) : m$ , то и  $(a+b)^2 : m$ .

т.к. дроби сократили на  $m$ , то  $(a+b)^2 - 9ab : m$

и т.к.  $(a+b)^2 : m$ , то и  $9ab : m$ , но  $a \not\vdash m$  и  $b \not\vdash m \Rightarrow$

$$\Rightarrow 9 : m \Rightarrow \boxed{m \leq 9}.$$

Приведем в пример такие  $a$  и  $b$ , что  $\frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab}$  сократили на  $9$ :

$$\begin{array}{l} a=4 \\ b=5 \end{array} \quad \frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab} = \frac{4+5}{(4+5)^2 - 9 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{9}{81 - 180} = \frac{9}{-99} = -\frac{1}{11}$$

Ответ: при  $m=9$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

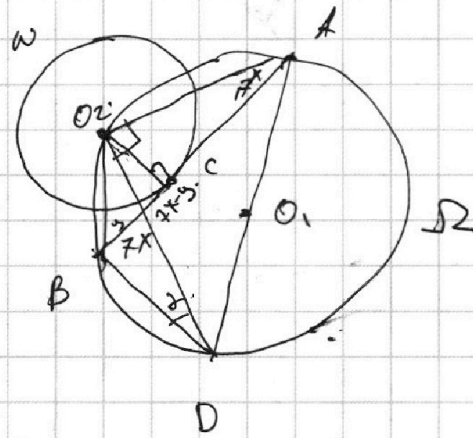


$\sqrt{\frac{10}{3}}$

Пусть  $AC = 17x$ ,  
тогда  $BC = 7x$ .

Очевидно,  $\triangle O_2BC$  — прямоугольный.  
тогда  $\operatorname{tg} \angle O_2BC = \frac{O_2C}{BC} = \frac{7}{17x} = \frac{1}{x}$ .

Проведем  $AO_1$  до пересечения с  $\Omega$ ,  
и пусть она пересекается в  $E$  и  $D$ ,  
тогда  $AD$  — диаметр  $\Rightarrow \angle DO_2A = \frac{\pi}{2}$ .



По т. Пифагора для  $\triangle O_2CA$ :  $O_2A = \sqrt{O_2C^2 + AC^2} = \sqrt{49 + 289x^2}$

По т. Пифагора для  $\triangle O_2AD$ :  $O_2D = \sqrt{AD^2 - AO_2^2} = \sqrt{26^2 - 49 - 289x^2}$

$\angle O_2BA = \angle O_2DA$ , как вписанные  $\Rightarrow \operatorname{tg} \angle O_2BA = \operatorname{tg} \angle O_2DA = \frac{1}{x}$

тогда в  $\triangle O_2AD$ :  $\operatorname{tg} \angle O_2DA = \frac{O_2A}{O_2D} = \frac{\sqrt{49 + 289x^2}}{\sqrt{26^2 - 49 - 289x^2}}$

то  $\operatorname{tg} \angle O_2DA = \frac{1}{x}$ . Получаем:

$$\frac{1}{x} = \frac{\sqrt{49 + 289x^2}}{\sqrt{(26^2 - 49) - 289x^2}}$$

$$\sqrt{19 \cdot 33 - 289x^2} = x \sqrt{49 + 289x^2}$$

$$19 \cdot 33 - 289x^2 = x^2 (49 + 289x^2)$$

$$19 \cdot 33 - 289x^2 = 49x^2 + 289x^4$$

$x^2 = t$

$$289x^4 + (49 + 289)x^2 - 19 \cdot 33 = 0$$

$$289t^2 + (49 + 289)t - 19 \cdot 33 = 0$$

$$D = (49 + 289)^2 + 4 \cdot 289 \cdot 19 \cdot 33 = 338^2 + 4 \cdot 289 \cdot 19 \cdot 33 =$$

$$= (2 \cdot 169)^2 + 4 \cdot 289 \cdot 19 \cdot 33 = 4 \cdot 13^4 + 4 \cdot 289 \cdot 19 \cdot 33 =$$

$$= 4 (13^4 + 17^2 \cdot 19 \cdot 33)$$

$$t = \frac{338 + 2 \sqrt{13^4 + 17^2 \cdot 19 \cdot 33}}{2}$$

$$= -169 + \sqrt{13^4 + 17^2 \cdot 19 \cdot 33}$$

тогда  $x = \sqrt{\sqrt{13^4 + 17^2 \cdot 19 \cdot 33} - 169}$ .  $AB = 17x + 7x = 24x = 24 \sqrt{\sqrt{13^4 + 17^2 \cdot 19 \cdot 33} - 169}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$$

Обозначим  ~~$3x^2-6x+2$~~   $3x^2-6x+2 = a \geq 0$   
 $3x^2+3x+1 = b \geq 0$

Заметим, что  $a-b = 3x^2-6x+2-3x^2-3x-1 = 1-9x$ .

Тогда исходное уравнение имеет вид:

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a-b, \quad a, b \geq 0$$
$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a} - \sqrt{b} = 0 \\ \sqrt{a} + \sqrt{b} = 1 \end{cases}$$

1)  $\sqrt{a} - \sqrt{b} = 0$   
 $\sqrt{a} = \sqrt{b}$   
 $a = b, \quad a \geq 0$

$$3x^2-6x+2 = 3x^2+3x+1$$

$$9x = 1$$

$$x = \frac{1}{9} \quad \text{Проверка: } 3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 + 3 \cdot \frac{1}{9} + 1 \geq 0$$

Значит,  $x = \frac{1}{9}$  - реш.

$$\frac{1}{27} + \frac{1}{3} + 1 > 0$$

2)  $\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 1$

$$\left(\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1}\right)^2 = 1^2$$

$$3x^2-6x+2 + 3x^2+3x+1 + 2 \cdot \sqrt{3x^2-6x+2} \cdot \sqrt{3x^2+3x+1} - 1 = 0$$

$$6x^2-3x+2 = -2 \sqrt{3x^2-6x+2} \cdot \sqrt{3x^2+3x+1}$$

Заметим, что левая часть всегда не положительна, т.к.

$$\forall y \geq 0: \sqrt{y} \geq 0. \quad 6x^2-3x+2, \quad D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6 = 9 - 48 < 0.$$

Получаем, что  $6x^2-3x+2$  - это парабола с вершиной направленной вверх ( $6 > 0$ ) и отрицательным дискриминантом. Значит

$$\forall x \quad 6x^2-3x+2 > 0. \quad \text{Но } 2 \sqrt{3x^2-6x+2} \cdot \sqrt{3x^2+3x+1}$$

Ответ:  $x = \frac{1}{9}$  (т.к. положительное число всегда больше не положительного)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



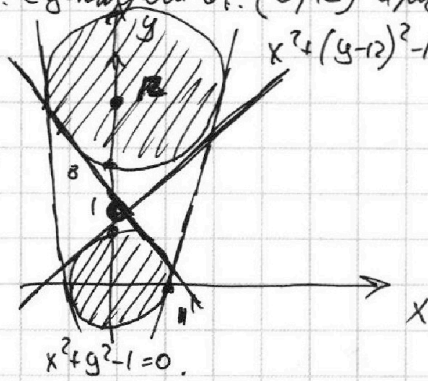
№6. <sup>нашли</sup>

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y-12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

a: 3b: 2 реш.

Построим график ~~каждого~~ неравенства системы:

$x^2 + y^2 - 1 = 0$  - окр. с центром в т. (0; 0) и радиусом 1.  
 $x^2 + (y-12)^2 - 16 = 0$  - окр. с центром в т. (0; 12) и рад. = 4.



Для окружности вида

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$$

значение выпр. ~~будет~~  $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 - R^2$

будет отрицательным только если  $x_0, y_0$  и  $y_0$  лежат внутри этой окружности и ближе осей.

Если  $x_0$  и  $y_0$  - вне окр. равенство  $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$  выполняется только для  $x$  и  $y$  на этой окр.

Произведение ~~выраж~~  $2 \times \text{шри}$   $\leq 0$ , только если одно из шри  $\leq 0$  и второе  $\geq 0$ . Поэтому ~~тогда~~  $(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y-12)^2 - 16) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + (y-12)^2 \geq 16 \end{cases}$ . Условия левосторонние, т.к. данные окружности не пересекаются, что можно заметить с графика.

$ax + y - 8b = 0 \Leftrightarrow y = -ax + 8b$  - это уравнение прямой

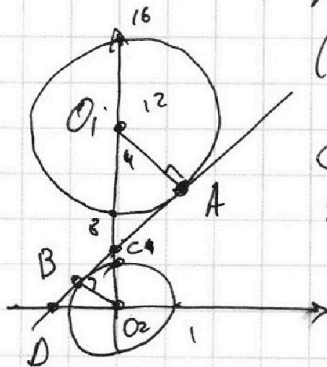
Если ~~мы~~ ~~два~~ ~~раза~~ заметим, что если прямая пересекает какую-либо окружность, то решений будет бесконечно много. Поэтому единственной возможной ситуацией - это когда прямая  $y = -ax + 8b$  касается обеих окружностей.

1) Рассмотрим случай, который показан на рисунке:

$\angle BCO_2 = \angle O_1CA$  (как вертик.)  
 $\angle O_2BC = \angle O_1AC = 90^\circ$  (радиус перпенд. кас.)

Значит,  $\triangle O_1CA \sim \triangle O_2CB \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{O_1C}{CO_2} = \frac{O_1A}{BO_2} = \frac{1}{4}$



( $O_1, O_2$  - центры окр.)  
 A, B - т. касания.  
 C - т. пересч.  
 $y = -ax + 8b$  (оси x, y.)

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№6. произвольные.

$$O_1C = 4CO_2 \quad O_1O_2 = 12 = O_1C + CO_2 = 5CO_2$$

$$CO_2 = \frac{12}{5}$$

Рассмотрим  $\triangle BO_2C$ :

$$BC = \sqrt{O_2C^2 - BO_2^2} = \sqrt{\frac{144}{25} - \frac{25}{25}} = \sqrt{\frac{119}{25}} = \frac{1}{5} \sqrt{119}$$

$$\operatorname{tg} \angle BCO_2 = \frac{BO_2}{BC} = \frac{1}{\frac{1}{5} \sqrt{119}} = \frac{5}{\sqrt{119}}$$

$$\angle DO_2C = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \angle CDO_2 = \frac{\pi}{2} - \angle BCO_2 \Rightarrow \operatorname{tg} \angle CDO_2 =$$

$$\operatorname{tg} \angle CDO_2 = \frac{\sqrt{119}}{5}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\operatorname{tg} \angle BCO_2} \\ &= \frac{\sqrt{119}}{5} \end{aligned}$$

наклона  $\frac{\sqrt{119}}{5}$

$$a = -\frac{\sqrt{119}}{5}$$

$y = -ax + b$ ;  $-a$  — это наклон угла прямой, коэффициент  $-a = \operatorname{tg} \angle CDO_2 = \frac{\sqrt{119}}{5}$

Заметим, что если выразить прямую  $AB$  относительно  $x$  и  $y$ , то такая прямая может быть касательной, а  $a$  либо « $a$ » поменять свой знак, тогда  $a = \frac{\sqrt{119}}{5}$ .

2) Рассмотрим 2-й случай:

Очевидно,  $\triangle XAO_1$ ,  $CS \triangle XBO_2$ :

$$\frac{XO_2}{XO_1} = \frac{O_2B}{O_1A} = \frac{1}{4} \quad \text{и} \quad XO_2 = XO_1$$

$$O_1O_2 = 12 = XO_1 - XO_2 = 3XO_2$$

$$XO_2 = 4$$

$$\operatorname{tg} \triangle XBO_2; \quad XB = \sqrt{XO_2^2 - O_2B^2} =$$

$$= \sqrt{15}$$

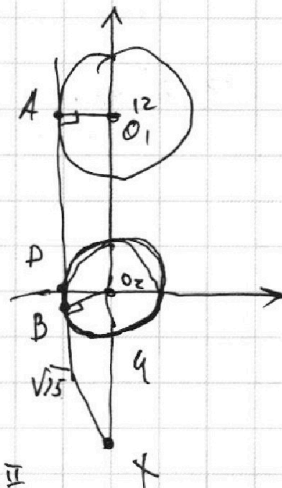
$$\operatorname{ctg} \angle B XO_2 = \frac{XB}{BO_2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\angle XDO_2 = \frac{\pi}{2} - \angle DXO_2 \Rightarrow \angle ADO_2 = \pi - \angle XDO_2 = \frac{\pi}{2} + \angle DXO_2$$

$$-a = \operatorname{tg} (\angle ADO_2) = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} + \angle DXO_2 \right) = -\operatorname{ctg} \angle DXO_2 = -\frac{\sqrt{15}}{4} \quad [a = \frac{\sqrt{15}}{4}]$$

Аналогично второйму случаю  $a = -\sqrt{15}$  — тоже возможно.

Ответ:  $a \in \left\{ \pm \sqrt{15}; \pm \frac{1}{5} \sqrt{119} \right\}$





На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

МФТИ



1  2  3  4  5  6  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$13^4 = 169^2 \quad 7(170-1)^2 = 28900 - 2 \cdot 170 + 1 + 17^2 \cdot 33 \cdot 19$$

$$\cancel{28} \cdot 28900 - 2 \cdot 170 + 1 + 17^2 \cdot 19 \cdot 33 =$$

$$= 28800 + 1 - 17(19 \cdot 33 - 20) =$$

$$= 28900 + 1 - 17(19 \cdot 32 - 1) =$$

$$= 28901 - 17 \cdot 19 \cdot 32 + 17.$$

$$20 \cdot 32 = 32 = 640 - 32 = 608.$$

$$28901 - 608 + 17.$$

$$28293 + 17 = 28300.$$

$$\begin{array}{r} 28901 \\ - 608 \\ \hline 28293 \end{array}$$

$$209769$$

$$49$$

$$100^2 = 10000.$$

$$109^2 =$$

$$\begin{array}{r} \times 109 \\ \times 109 \\ \hline 916 \\ + 109 \\ \hline 10816 \end{array}$$

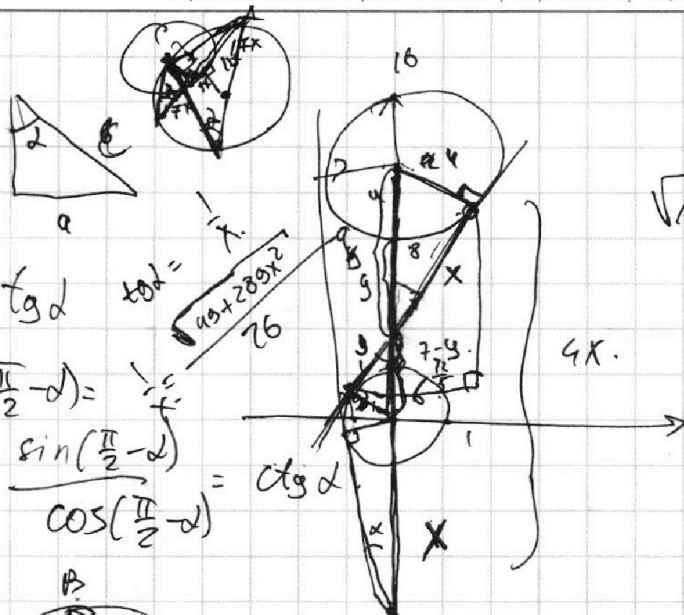
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab: 2^{15} \cdot 7^{11} \quad r=2^8$$

$$bc: 2^{17} \cdot 7^{15} \quad b=2^8$$

$$ac: 2^{23} \cdot 7^{33}$$

$$\sqrt{16+x^2} + \sqrt{1+y^2} = 12 \quad c=15$$

$$\frac{4}{x} = \frac{1}{y} \quad abc \approx 7 \cdot 2^{20} \cdot 7^{38}$$

$$4y = x$$

$$a=4b$$

$$a+b=12$$

$$5b=12 \quad b=\frac{12}{5}$$

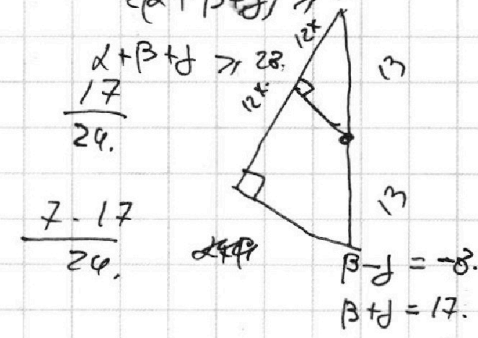
$$2+p \approx 15$$

$$p+d \approx 16$$

$$d+d \approx 23$$

$$d+p+d \approx 28$$

$$\text{tg}(90+\alpha) = \frac{\sin(90+\alpha)}{\cos(90+\alpha)} = \frac{\cos \alpha}{-\sin \alpha} = -\text{ctg} \alpha$$



$$2(2+p+d) \approx 55$$

$$d+p+d \approx 28$$

$$\frac{17}{24}$$

$$\frac{7 \cdot 17}{24}$$

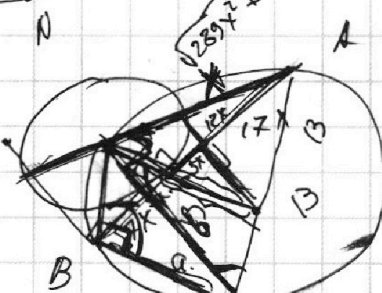
$$\beta - \delta = -8$$

$$\beta + \delta = 17$$

$$2\beta = 9$$

$$\text{tg} \alpha = \frac{5}{2AN}$$

$$\text{tg} \beta = \frac{5}{AM}$$



$$\text{tg}(90-x) = \text{ctg} x$$

$$\text{tg}(90-d-\beta) = \text{ctg}(d+\beta) = \frac{1}{1-\text{tg} d \cdot \text{tg} \beta}$$

$$\frac{1}{\text{tg} d + \text{tg} \beta}$$

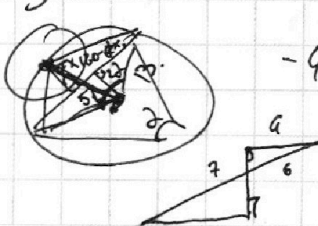
$$\left( \sqrt{289x^2 + 49} + 7 \right)^2 - 24^2 x^2 = \left( \frac{7 \cdot 17}{24} \right)^2$$

$$289x^2 + 49 + 49 + 14\sqrt{289x^2 + 49} + 24^2 x^2 = \frac{7 \cdot 17}{24}$$

$$-41x^2 + 2\sqrt{289x^2 + 49} + 14 - 24^2 = -7 \cdot 41x$$

$$(7x)^2 + (17x)^2 - 26^2 = 0 \quad -7 \cdot 41x^2 + 2 \cdot 7^2 + 14\sqrt{289x^2 + 49} = \frac{7 \cdot 17}{24^2}$$

$$-41x^2 + 14 + 2\sqrt{289x^2 + 49} = \frac{7 \cdot 17}{24^2}$$



$$\frac{7 \cdot 17}{24^2} - 14 = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3 Пусть  $AC = 17x$ , тогда  $BC = 7x$ .

Прежде всего,  $\triangle O_2BC$  — прямоугольный, тогда  $\operatorname{tg} \angle O_2BC = \frac{O_2C}{BC} = \frac{7}{7x} = \frac{1}{x}$

Продлим  $AO_1$  до пересечения с  $\Omega$ .

Пусть они пересекутся в т. D.

$AD$  — диаметр, поэтому  $\angle AO_2D = 2 \cdot \frac{\pi}{2}$ .

$\angle O_2BC = \angle O_2DA$  как вписанные.

Поэтому  $\operatorname{tg} \angle O_2BC = \operatorname{tg} \angle O_2DA = \frac{1}{x}$

Воспользуемся  $\triangle O_2DA$ :  $\operatorname{tg} \angle O_2DA = \frac{O_2A}{AD} = \frac{O_2A}{26}$ .

Следовательно,  $\frac{O_2A}{26} = \frac{1}{x}$ .

Из  $\triangle O_2CA$ :  $O_2H = \sqrt{O_2C^2 + AC^2} = \sqrt{49 + 289x^2}$

Тогда:  $\frac{\sqrt{49 + 289x^2}}{26} = \frac{1}{x}$

$O_2H = \sqrt{49 + 289x^2}$

$O_2D = \sqrt{26^2 - 49 - 289x^2}$

$$289 + 49 = x^2 \sqrt{49 + 289x^2} = 26$$

$$= 340 - 2 = \sqrt{49x^2 + 289x^4} = 26$$

$\cdot 338$

$$338 = 2 \cdot 169$$

$$49x^2 + 289x^4 = 26^2$$

$$x^2 = t$$

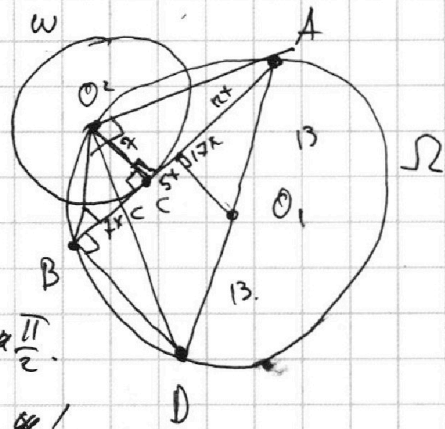
$$289t^2 + 49t - 26^2 = 0$$

$$D = 49^2 + 4 \cdot 289 \cdot 26^2$$

$$49^2 + 2 \cdot 49 \cdot 289 + 289^2 + 4 \cdot 289 \cdot 26^2 = 19 \cdot 33 - 289x^2$$

$$49^2 + 289 \cdot (2 \cdot 49 + 289 + 4 \cdot 19 \cdot 33) \cdot 26^2 - 289 \cdot 7^2 = (26-7)(26+7) =$$

$$= 19 \cdot 33.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

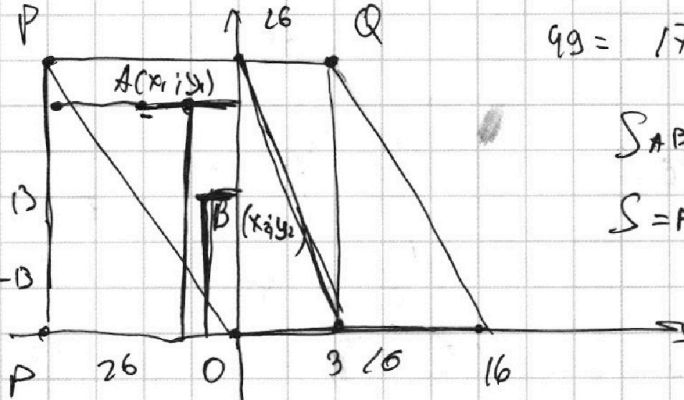
- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$7 = \sqrt{17}$$



$$99 = 17x$$

$$S_{ABC} = \frac{25}{\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} \sin(2(\alpha + \beta))$$

$$S = P \cdot 74 \quad \varepsilon = \frac{25 \sin(2(\alpha + \beta))}{\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot P}$$

$$AM = P - BC$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

$$\begin{aligned} ab &: 2^{15} \cdot 7^{11} \\ bc &: 2^{17} \cdot 7^{13} \\ ac &: 2^{23} \cdot 7^{39} \end{aligned} \quad \frac{\varepsilon}{P - BC}$$

$$\begin{aligned} a &= 2^{11} \cdot 7 \\ c &= 2^{12} \cdot 7 \\ b &= 2^5 \end{aligned}$$

min abc

$$abc^2 \geq 2^{55} \cdot 7^{68} = 2^{55} \cdot 7^{68}$$

$$\begin{aligned} a &= 7^d \\ c &= 7^d \\ d+d \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= 2^h \\ c &= 2^{12} \\ b &= 2^5 \end{aligned}$$

$$abc \geq 2^{28} \cdot 7^{34}$$

$$\frac{25 \sin(2(\alpha + \beta))}{\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta (P - BC) P} = \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)}$$

$$\sqrt{13^4 + 17^2 \cdot 19 \cdot 33} \approx$$

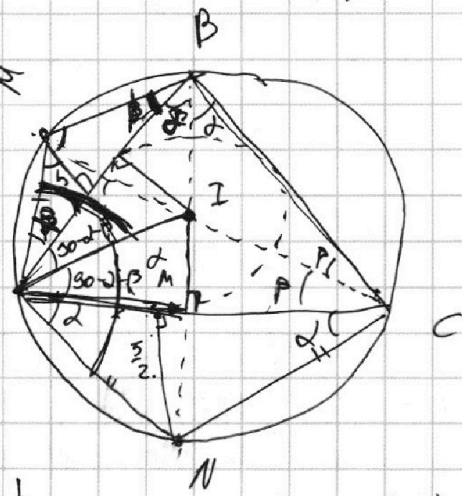
AI = ?

$$AC = 2 \frac{5}{2 \operatorname{tg} \alpha} = \frac{5}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$AB = \frac{10}{\operatorname{tg} \beta}$$

$$BC = \frac{5}{2x} = \operatorname{tg} \alpha$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{2} \frac{25}{\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} \cdot \cos(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha + \beta)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 1$$

$$3x^2-6x+2 + 3x^2+3x+1 + 2\sqrt{(3x^2-6x+2)(3x^2+3x+1)} = 1$$

$$6x^2-3x+3 = -2\sqrt{\dots}$$

$$3x^2-3x+3 = -\sqrt{\dots}$$

$$D = 9 - 12 = -3$$

$$ab : 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$bc : 2^{17} \cdot 7^{10}$$

$$ac : 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$\min abc = 2^{23} \cdot 7^{39}$$

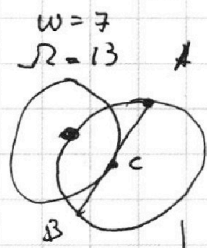
$$\frac{AC}{BC} = \frac{17}{7}$$

$$ab \geq 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$bc \geq 2^{17} \cdot 7^{10}$$

$$ac \geq 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$a^2 b^2 c^2 \geq 2^{55} \cdot 7^{39 \cdot 2}$$



$$abc \geq 2^{\frac{55}{2}} \cdot 7^{39} = 2^{27.5} \cdot 7^{39} = 2^{27} \cdot 2^{0.5} \cdot 7^{39}$$

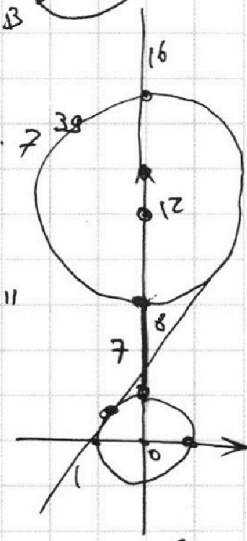
$$abc \geq 2^{27} \cdot 2^{\sqrt{2}} \cdot 7^{39}$$

$$abc \geq 2^{27} \cdot 7^{39}$$

$$a = 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$b = 2^9$$

$$c = 2^8$$



$$a = 2^8 \quad \alpha + \beta = 15$$

$$b = 2^7 \quad \beta + \gamma = 17$$

$$c = 2^8 \quad \gamma + \delta = 23$$

$$\alpha + \gamma = 23$$

$$\alpha + \beta = 15$$

$$\gamma - \beta = 8$$

$$\beta + \gamma = 17$$

$$y = -ax + 8b$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$y > 0 \quad y = \sqrt{1-x^2}$$

$$x < 0$$

$$\alpha + \beta = 16$$

$$\beta + \gamma = 17$$

$$\alpha + \gamma = 23$$

$$\alpha + \beta = 15$$

$$\beta + \gamma = 17$$

$$\gamma + \delta = 23$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 28$$

$$2(\alpha + \beta + \gamma) \geq 15 + 17 + 23 = 32 + 23 = 55$$

$$\gamma - \beta = 23 - 16 = 7$$

$$\beta + \gamma = 17$$

$$\alpha = 4$$

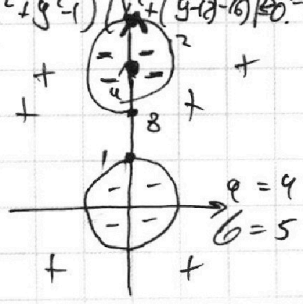
$$\beta = 12$$

$$\gamma = 13$$

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} \quad (a/b) = 1$$

$$ax + y - 8b = 0 \quad 2\beta = 24$$

$$(x^2 + y^2 = 1) \quad (x^2 + (y-16)^2 = 1)$$



$$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab}$$

$$\frac{a^2 - 7ab + b^2}{(a+b)^2 - 2ab - 7ab} = \frac{a^2 - 7ab + b^2}{(a+b)^2 - 9ab}$$

$$a = 2, b = 3$$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab} = \frac{4+5}{(4+5)^2 - 9 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{9}{81 - 180} = \frac{9}{-99} = -\frac{1}{11}$$

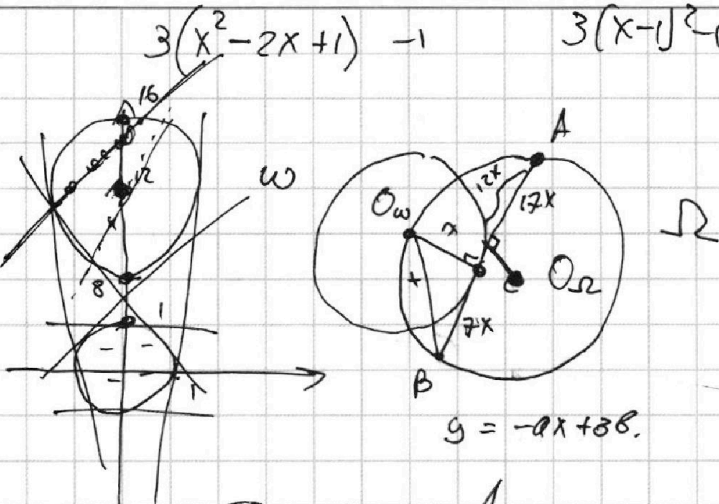
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AC}{BC} = \frac{17}{7}$$

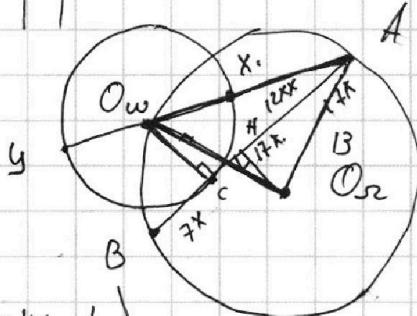
$$AB = ?$$

$$\omega = 7$$

$$\Omega = 13$$

$$AC = 17x$$

$$BC = 7x$$



$$AO_{\omega} = \sqrt{49 + 289x^2}$$

$$AX = \sqrt{49 + 289x^2} - 7$$

$$AY = \sqrt{49 + 289x^2} + 7$$

$$3\left(x^2 + 2\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\right) =$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

$$O_{\Omega}H = \sqrt{13^2 - 49x^2}$$

$$289x^2 = 49 + 289x^2$$

$$3\left(x^2 + x + \frac{1}{3}\right)$$

$$2x + 1$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{2}{4} + \frac{1}{3}$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{3}$$

$$3\left(x^2 + 2\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3} = \sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) = 3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$$

$$a > 0$$

$$b > 0$$

$$3x^2 - 6x + 2 = a$$

$$3x^2 + 3x + 1 = b$$

$$a - b = 1 - 9x$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b$$

$$a - 2\sqrt{ab} + b = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\sqrt{a} - a = \sqrt{b} - b$$

$$a - \sqrt{a} = b - \sqrt{b}$$

$$f(x) = x - \sqrt{x}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$$

$$a=b$$

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = (a - b)(\sqrt{a} + \sqrt{b})$$

$$(a - b) = (a - b)(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \quad \sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$$

$$\sqrt{a} = \sqrt{b} \quad \sqrt{a} \cdot a = b$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$$