МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A\left(x_1;y_1\right)$ и $B\left(x_2;y_2\right)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система

$$\begin{cases} ax+y-8b=0, \\ \left(x^2+y^2-1\right)\left(x^2+(y-12)^2-16\right) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1.

$a, b, c \in \mathbb{N}$. $ab \vdots 2^{15}7^{11} \Rightarrow ab = 2^{15}7^{11}x$, $x \in \mathbb{N}$

$bc \vdots 2^{17}7^{18} \Rightarrow bc = 2^{17}7^{18}y$, $y \in \mathbb{N}$

$ac \vdots 2^{23}7^{39} \Rightarrow ac = 2^{23}7^{39}z$, $z \in \mathbb{N}$

$a^2b^2c^2 = ab \cdot bc \cdot ac = 2^{15} \cdot 2^{17} \cdot 2^{23} \cdot 7^{11} \cdot 7^{18} \cdot 7^{39} xyz =$
$= 2^{45} \cdot 7^{68} xyz$

$(2, 7) = 1$. Очевидно, $abc \to \min$ при $x, y, z \to \min$. $x, y, z \in \mathbb{N} \Rightarrow \min(x) = \min(y) = \min(z) = 1$.

$(abc)^2 = 2^{45} \cdot 7^{68} \cdot xyz \Rightarrow abc = 7^{34}\sqrt{2^{45}xyz} =$
$= 7^{34} \cdot 2^{22}\sqrt{2xyz}$.

Очевидно, если $x = y = z = 1$, то abc будет иррациональным $\Rightarrow$ какое-то из чисел > 1. Минимальное число $\in \mathbb{N} > 1$ это 2.

$\sqrt{2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1} = 2$ — рациональное $\Rightarrow x = 2, y = 1, z = 1$.

$abc = 7^{34} \cdot 2^{22} \cdot \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1} = 7^{34} \cdot 2^{23}$

Ответ: $7^{34} \cdot 2^{23}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2.

$\frac{a}{b}$ — несократимая $\Rightarrow$ $(a,b)=1$ $((a,b)=\text{НОД}(a,b))$

~~Пусть $a+b=$~~

Докажем, что $m=9$ подходит.

$a+b=9x$ $\Rightarrow$ $a^2+b^2+2ab=81x^2$

$a^2-7ab+b^2=9y$ $((x,y)=1)$

$\Downarrow$

$81x^2-9ab=9y$, $9x^2-ab=y$

Допустим, $\exists$ $m>9$: $m=9+n$ $(n\geq 1)$
$\mathbb{Z}$

$a+b=(9+n)x$ $(x\in\mathbb{Z})$

$a^2+b^2+2ab=(81+18n+n^2)x^2$. $a^2+b^2-7ab=(9+n)y$
$(x,y)=1$

$\cancel{(81+18n+n^2)x^2-9ab=(9+n)y}$

$\cancel{81x^2+18nx^2+n^2x^2-9ab=9y+ny}$

$\cancel{\underbrace{81x^2+18nx-9ab}_{\vdots 9}+n^2x^2-ny=9y.}$

$\cancel{\Rightarrow n(nx^2-y)\vdots 9}$

$\underbrace{(9+n)^2x^2}_{\vdots 9+n}-9ab=(9+n)y$

$\Downarrow$

$9ab \vdots 9+n \Rightarrow 9ab\equiv_{9+n} 0 \equiv 9+n$

$\cancel{9ab=(9+n)k \quad (k\in\mathbb{Z})}$

$\cancel{9ab=9k+nk \Rightarrow nk\vdots 9.}$

$9(ab-1)\equiv_{9+n} n$

$9(ab-1)\equiv n-9-n=-9 \Rightarrow ab-1\equiv -1 \Rightarrow ab\equiv_{9+n} 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

2.

$ab \underset{9+n}{\equiv} 0 \Rightarrow ab = (9+n)k \quad (k \in \mathbb{Z})$

$\frac{a}{b} = \frac{(9+n)k}{b^2}$ — несокр $\qquad \frac{b}{a} = \frac{(9+n)k}{a^2}$ — несокр

$\Downarrow$

$((9+n)k;\ a^2;\ b^2) = 1$

$\Updownarrow$

$((9+n)k;\ a;\ b) = 1$

у $(9+n)k$, a и b нет общ. множителей $\Rightarrow$

$\cancel{ab \ne (9+n)k}$

$ab \ne (9+n)k$ Противоречие.

Ответ: 9.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3.

$R(\omega) = 7$

$R(\Lambda) = 13$

$\cancel{AB}\ \frac{AC}{CB} = \frac{17}{7} \Rightarrow$

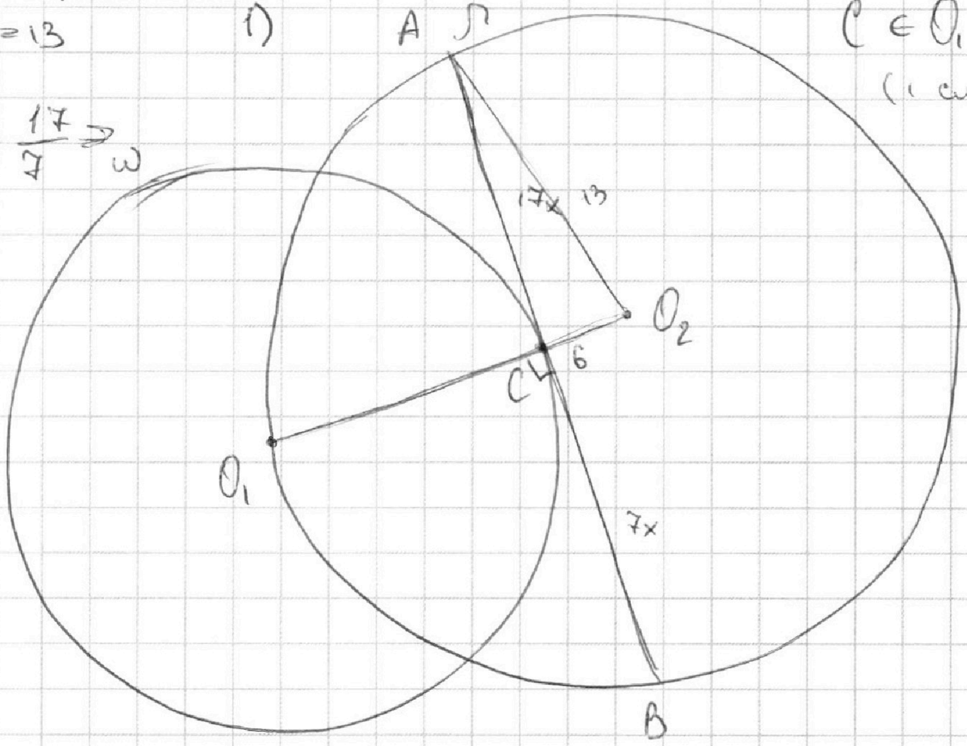
$AC = 17x,$

$CB = 7x$

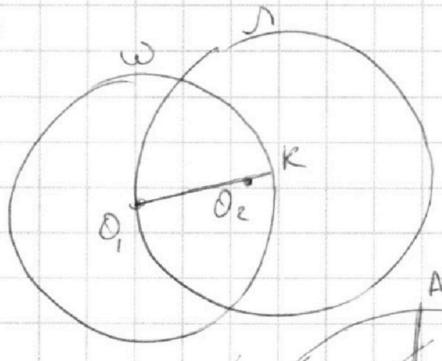
1)

$C \in O_1O_2$

(1 случай)

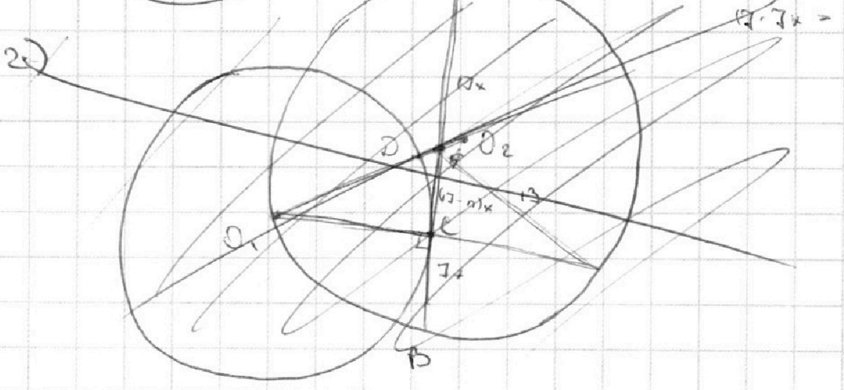


Докажем, что другого расположения быть не может.



В таком случае $O_1O_2 =$
$= R(\Lambda) = 13$, $O_1K = R(\omega) = 7$.
$O_2O_1 + O_2K = O_1K \Rightarrow 13 + O_2K = 7 \Rightarrow$
$O_2K < 0$ — противоречие.

2)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

по св-ву окр-ти радиус ⊥ касательной ⇒

$O_1C \perp AB$. $O_1C = R(\omega) = 7$, $O_1O_2 = R(\lambda) = 13$ ⇒

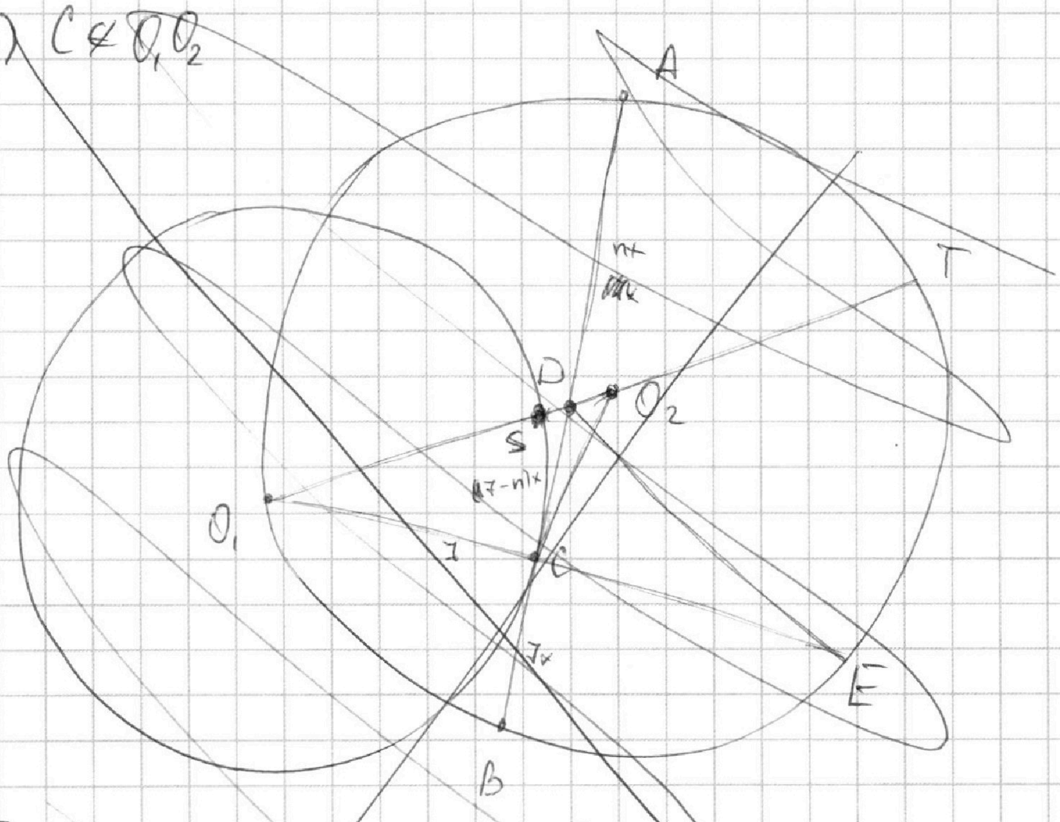
$O_2C = O_1O_2 - O_1C = 13 - 7 = 6$. $O_2A = R(\lambda) = 13$. По

т. Пифагора $AC = 17x = \sqrt{13^2 - 6^2} = \sqrt{(13-6)(13+6)} =$

$= \sqrt{7 \cdot 19} = \sqrt{133} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{133}}{17}$. $AB = 17x + 7x = 24x$.

$AB = \frac{\sqrt{133} \cdot 24}{17} = \frac{24\sqrt{133}}{17}$

2) $C \notin O_1O_2$



Пусть $DC = (17-n)x$. По св-ву ∧ хорд

$AC \cdot CB = \underset{R(\omega)=7}{O_1C} \cdot CE \Rightarrow 17 \cdot 7x^2 = 7 \cdot CE \Rightarrow 17x^2 = CE$

$O_1E \perp AB$, т.к. AB – касательная

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

3.

$$49+289x^2-338+338\frac{x^2-1}{x^2+1}=0$$

$$-289+289x^2+\frac{338x^2-338}{x^2+1}=0$$

$$\cancel{-289(x^2+1)}\quad 289(x^2-1)(x^2+1)+338(x^2-1)=0$$

$$(x^2-1)(289x^2+289+338)=0$$

$$x^2=1 \qquad x^2=-\frac{627}{289}\Rightarrow x\notin\mathbb{R}$$

$$x=1$$

Значит, $x=1$.

$AB=24x=24$.

Ответ: $24;\ \frac{24\sqrt{133}}{17}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

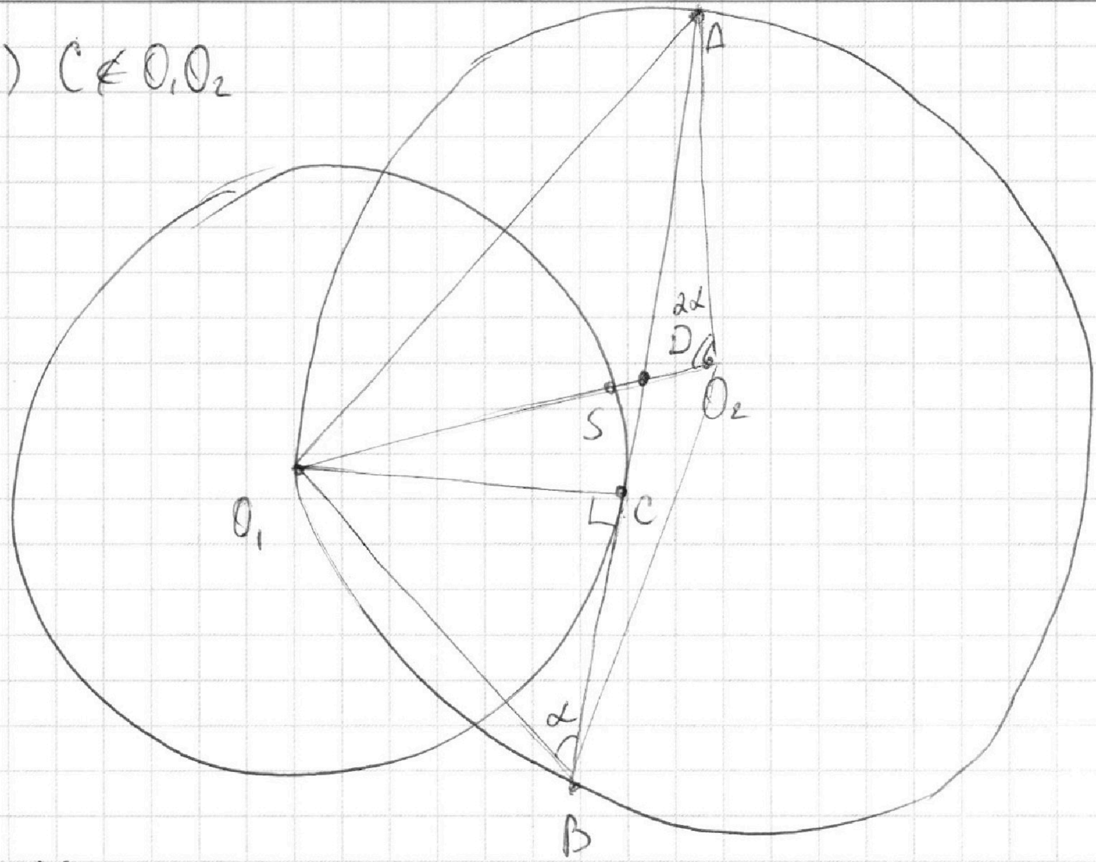
1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3.

2) $C \notin O_1O_2$



$AC = 17x, \quad CB = 7x.$

$O_1C \perp AB$ (AB – кас; O_1C – радиус) $\Rightarrow$
по т. Пифагора:

$O_1A = \sqrt{O_1C^2 + AC^2} = \sqrt{7^2 + 17^2x^2}$; $O_1B = \sqrt{O_1C^2 + BC^2} = 7\sqrt{x^2+1}$

$\angle O_1BA = \alpha$ – впис; $\angle O_1O_2A = 2\angle O_1BA = 2\alpha$ – центральн.

по т. косинусов $O_1A^2 = O_1O_2^2 + O_2A^2 - 2 \cdot O_1O_2 \cdot O_2A \cdot \cos 2\alpha \Rightarrow$

$7^2 + 17^2x^2 = 2 \cdot 13^2 - 2 \cdot 13^2 \cdot \cos 2\alpha$

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

в $\triangle O_1BC$:

$\sin\alpha = \frac{O_1C}{O_1B} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{1}{x^2+1} \Rightarrow \cos 2\alpha =$

$= 1 - \frac{2}{x^2+1} = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

$49 + 289x^2 = 338 - 338 \cdot \frac{x^2-1}{x^2+1}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

4.

$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x$

ОДЗ: $3x^2-6x+2 \geq 0$ $\qquad$ $3x^2+3x+1 \geq 0$

~~$D = 36-4\cdot3\cdot2 = 12$~~ $\qquad$ $D = 9-12 < 0 \Rightarrow$

~~$x = \frac{6\pm\sqrt{12}}{6} = 1 \pm \frac{\sqrt{12}}{6}$~~ $\qquad$ $3x^2+3x+1 > 0$ всегда

Заметим, что $3x^2-6x+2-(1-9x) = 3x^2+3x+1$

$3x^2-6x+2 = a$, $3x^2-3x+1 = b \Rightarrow 1-9x = a-b$

$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a-b$

Пусть $\sqrt{a} = c$, $\sqrt{b} = d \Rightarrow a-b = c^2-d^2$

$c-d = \underset{(c-d)(c+d)}{c^2-d^2} \Rightarrow (c-d)(1-c-d) = 0$

$c = d$ $\qquad$ $1 = c+d$

1) $c = d \Rightarrow \sqrt{a} = \sqrt{b} \Rightarrow \sqrt{3x^2-6x+2} = \sqrt{3x^2-3x+1}$

$3x^2-6x+2 = 3x^2-3x+1$

$-6x+3x+2-1 = 0$

$-3x+1 = 0$

$x = \frac{1}{3}$ $\qquad$ ОДЗ: $3\cdot\frac{1}{9} - 6\cdot\frac{1}{3}+2 =$

$= \frac{1}{3}-2+2 = \frac{1}{3} \geq 0.$

подходит.

2) $1 = c+d \Rightarrow 1 = \sqrt{a}+\sqrt{b}$

~~$1 = a+b+2\sqrt{ab}$~~ $\qquad$ $\sqrt{a} = 1-\sqrt{b} \Rightarrow a = 1+b-2\sqrt{b}$

$2\sqrt{b} = 1+b-a$

$\sqrt{b} = \frac{1+b-a}{2}$

$b = \frac{(1+b-a)^2}{4} \Rightarrow 4b = (1+b-a)^2$

4.

$$4\cdot(3x^2-3x+1) = (\cancel{1}+\cancel{1}\,3x^2-3x+\cancel{1}-\cancel{3x^2}+6x-\cancel{2})^2 =$$

$$= 4\ 9x^2$$

$$12x^2-3x+1=9x^2 \Rightarrow 3x^2-3x+1=0$$

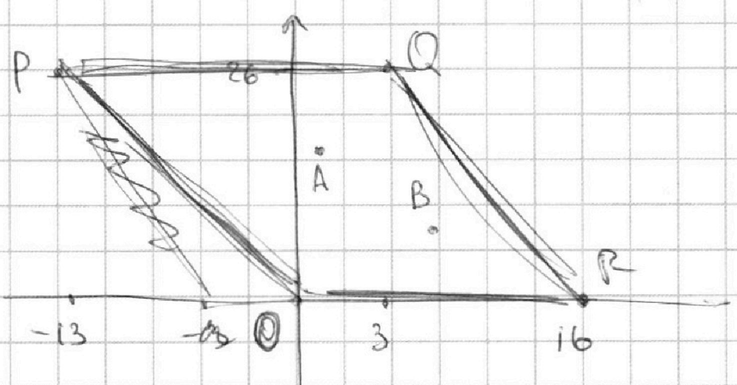
$D<0 \Rightarrow$ нет корней.

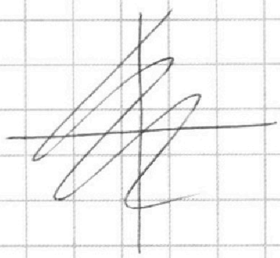
Ответ: $\frac{1}{3}$.

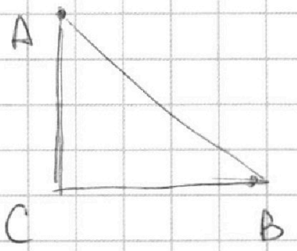
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!







$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$

$AC = y_2 - y_1$ $\qquad BC = x_2 - x_1$

$2BC + AC = 14 \Rightarrow AC = 14 - 2BC$

$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{14 - 28BC + 4BC^2 + BC^2} =$

$= \sqrt{14 - 28BC + 5BC^2}$

$0 \le AC \le 26; \; 0 \le BC \le 16.$

$\Downarrow$

$0 \le AB \le \sqrt{14 - 28 \cdot 16 + 5 \cdot 16^2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

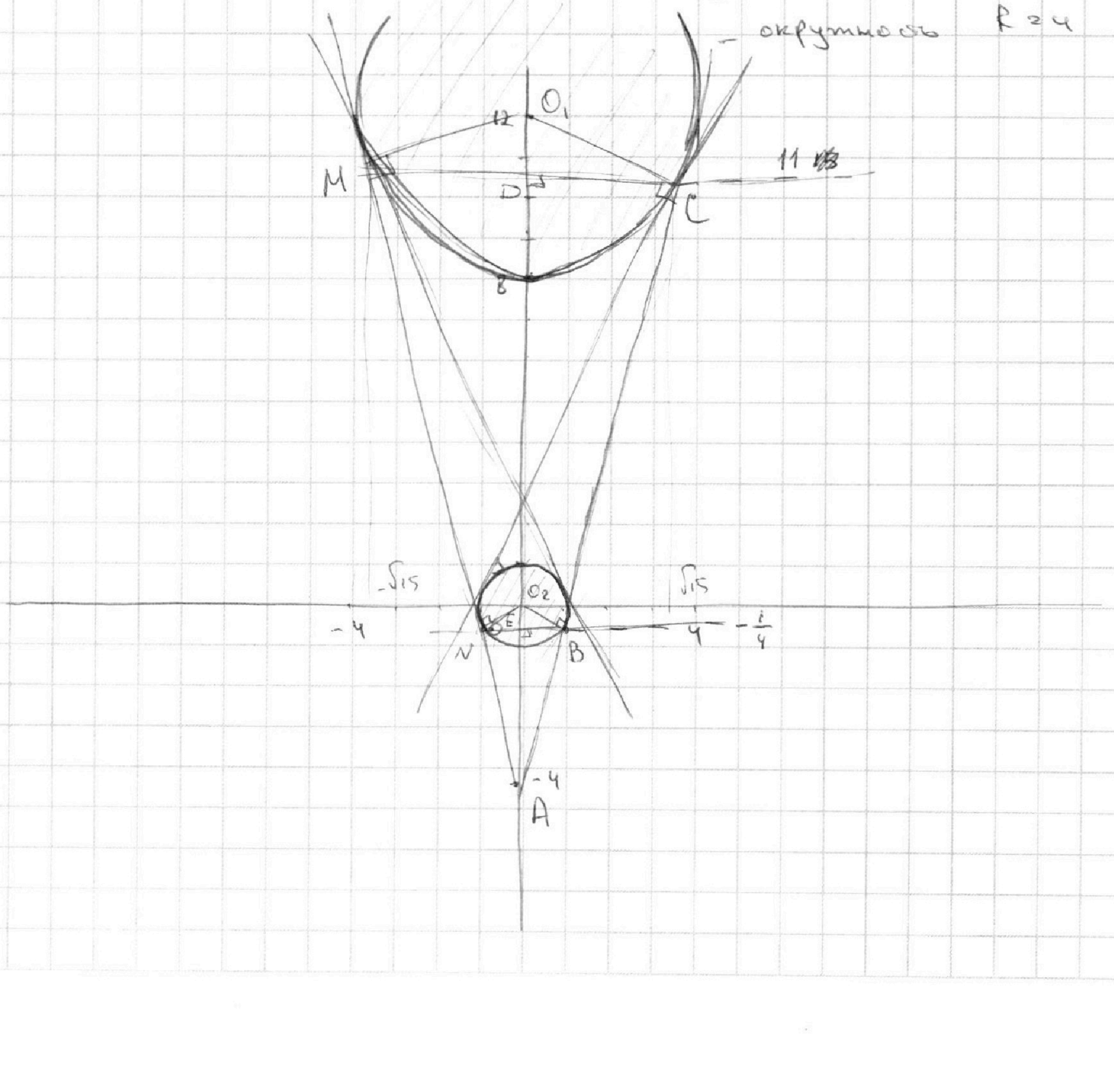
$$\begin{cases} ax+y-8b=0 \Rightarrow y=8b-ax \text{ — график прямой} \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16)\le 0 \end{cases}$$

Рассмотрим 2-е уравнение

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+y^2-1\le 0 \\ x^2+(y-12)^2-16\ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y^2-1\ge 0 \\ x^2+(y-12)^2-16<0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+y^2\le 1^2 \\ x^2+(y-12)^2\ge 4^2 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y^2\ge 1 \\ x^2+(y-12)^2\le 4^2 \end{cases} \end{array}\right.$$

— окружность $R=4$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$y(N) = 8b_1 - a_1 x(N)$ $\qquad$ $y(M) = 8b_1 - a_1 x(M)$

$-\frac{1}{4} = 8b_1 + a_1 \frac{\sqrt{15}}{4}$ $\qquad$ $11 = 8b_1 + a_1\sqrt{15}$

$-$

$$11 + \frac{1}{4} = a_1\left(\sqrt{15} - \frac{\sqrt{15}}{4}\right)$$

$$\frac{45}{4} = a_1\left(\frac{3\sqrt{15}}{4}\right)$$

$$a_1 = \frac{45}{3\sqrt{15}} = \frac{15}{\sqrt{15}} = \sqrt{15}$$

$y(C) = 8b_2 - a_2 x(C)$ $\qquad$ $y(B) = 8b_2 - a_2 x(B)$

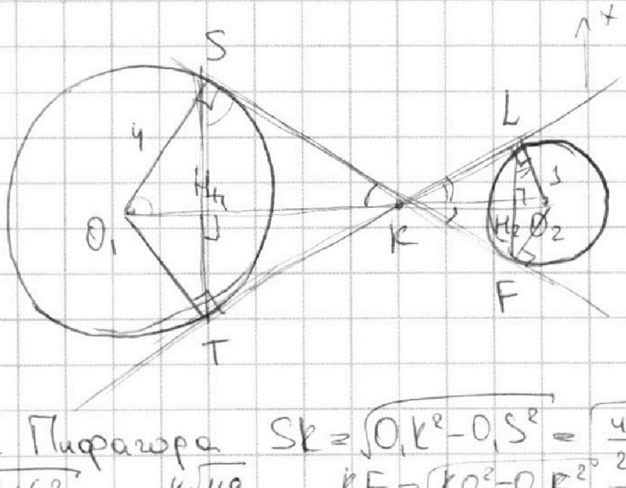
$11 = 8b_2 - a_2\sqrt{15}$ $\qquad$ $-\frac{1}{4} = 8b_2 - a_2 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4}$

$-$

$$11 + \frac{1}{4} = -\sqrt{15}a_2 + \frac{\sqrt{15}}{4}a_2$$

$$\frac{45}{4} = \left(\frac{\sqrt{15}}{4} - \sqrt{15}\right)a_2 = -\frac{3\sqrt{15}}{4}a_2$$

$$a_2 = -\frac{45}{3\sqrt{15}} = -\frac{15}{\sqrt{15}} = -\sqrt{15}$$



нужно найти OH_1 и O_2H_2.

$O_1S = 4$, $O_2F = 1$

$\triangle O_1SK \sim \triangle KFO_2 \Rightarrow$

$\frac{O_1S}{O_2F} = \frac{4}{1} = \frac{O_1K}{KO_2} \Rightarrow 4KO_2 = O_1K$

$KO_2 + KO_1 = O_1O_2 = 12 \Rightarrow$

$5KO_2 = 12$, $KO_2 = \frac{12}{5}$, $O_1K = \frac{48}{5}$

по т. Пифагора $SK = \sqrt{O_1K^2 - O_1S^2} = \sqrt{\frac{48^2}{25} - 4^2} = \sqrt{\frac{48^2 - 20^2}{25}} = \frac{\sqrt{28 \cdot 68}}{5} = \frac{4\sqrt{119}}{5}$, $KF = \sqrt{KO_2^2 - O_2F^2} = \sqrt{\frac{144}{25} - 1} = \frac{\sqrt{119}}{5}$

$\triangle O_1SH_1 \sim \triangle SH_1K \Rightarrow \frac{SH_1}{H_1K} = \frac{O_1H_1}{SH_1} = \frac{O_1S}{SK} = \frac{5}{\sqrt{119}} \Rightarrow \sqrt{119}SH_1 = 5H_1K$

$\sqrt{119}O_1H_1 = 5SH_1 \Rightarrow 119O_1H_1 = 25H_1K \Rightarrow H_1K = \frac{119}{25}O_1H$

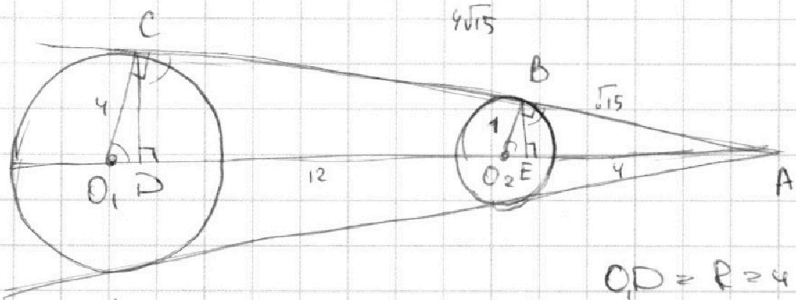
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [ ] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [x] 7 [ ]

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

получившаяся совокупность даёт график с двумя окр-тями $r=1$ и $R=4$. Точнее, области внутри них (включая их самих). Такое уравнение может иметь 2 решения, если прямая $y=8b-ax$ – общая касательная. Рассмотрим внешние касательные.



O_1O_2 – бис. получившегося угла. Нужно найти ~~O_1D и O~~ O_2D и O_2E.

$O_1D = R = 4$, $O_2B = r = 1$.

$\triangle AO_1C \sim \triangle AO_2B \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{O_2A}{O_1A} = \frac{O_2B}{O_1C} = \frac{1}{4}$. $O_1O_2 = 12 \Rightarrow$

$\frac{O_2A}{12+O_2A} = \frac{1}{4} \Rightarrow O_2A = 4$. По т. Пифагора для $\triangle O_2BA$ и $\triangle O_1CA$: $AB = \sqrt{16-1} = \sqrt{15}$, $AC = \sqrt{16^2-4^2} = \sqrt{240} = 4\sqrt{15}$

$\triangle O_2BE \sim \triangle EBA$: $\frac{BE}{EA} = \frac{O_2E}{BE} = \frac{O_2B}{BA} = \frac{1}{\sqrt{15}} \Rightarrow \sqrt{15}BE = EA$, $BE = \sqrt{15}O_2E \Rightarrow$

$\Rightarrow 15O_2E = EA \Rightarrow EA + O_2E = 16O_2E = 4 \Rightarrow O_2E = \frac{1}{4} \Rightarrow$

$y(B) = y(N) = -\frac{1}{4}$. $N, B \in$ окр. $x^2+y^2=1 \Rightarrow$

$x(B)^2 + \frac{1}{16} = 1 \Rightarrow x(B) = \frac{\sqrt{15}}{4}$, $x(N) = -\frac{\sqrt{15}}{4}$

$\triangle O_1CD \sim \triangle DCA \Rightarrow \frac{CD}{DA} = \frac{O_1D}{CD} = \frac{O_1C}{CA} = \frac{4}{4\sqrt{15}} = \frac{1}{\sqrt{15}} \Rightarrow$

$\sqrt{15}CD = DA$, $\sqrt{15}O_1D = CD \Rightarrow 15O_1D = DA$. $DA + O_1D = 16O_1D = O_1A = 16 \Rightarrow O_1D = 1$, $DA = 15 \Rightarrow y(C) = y(M) = 11$. $C, M \in$ окр. $x^2+(y-12)^2 = 16 \Rightarrow x(C)^2 + (11-12)^2 = 16$, $x(C)^2 = 15 \Rightarrow x(C) = \sqrt{15}$, $x(M) = -\sqrt{15}$

Значит, есть прямые $y = 8b_1 - a_1x$, сод. N и M
$y = 8b_2 - a_2x$, сод. C и B

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$OH_1 + H_1K = O_1K = \frac{48}{5} = O_1H + \frac{119}{25}O_1H_1 = \frac{144}{25}O_1H_1 . \quad O_1H_1 = \frac{5}{3} \Rightarrow$

$y(S) = y(T) = O_1O_2 - O_1H_1 = 12 - \frac{5}{3} = \frac{36-5}{3} = \frac{31}{3}$

Аналогично $\triangle KLH_2 \sim \triangle O_2LH_2 \Rightarrow \frac{LH_2}{H_2O_2} = \frac{KH_2}{LH_2} = \frac{KL}{LO_2} = \frac{KF}{LO_2} =$

$(KL = KF)$

$= \frac{\sqrt{119}}{5}$

$5LH_2 = \sqrt{119}\, H_2O_2 \qquad 5KH_2 = \sqrt{119}\, LH_2$

$25KH_2 = 119\, H_2O_2 \Rightarrow KH_2 = \frac{119}{25} H_2O_2$

$H_2O_2 + KH_2 = O_2K = \frac{12}{5} = \frac{119+25}{25} H_2O_2 = \frac{144}{25} H_2O_2 \Rightarrow H_2O_2 = \frac{5}{12} \Rightarrow$

$y(L) = y(F) = \frac{5}{25}$

$S, T \in \omega \quad x^2 + (y-12)^2 = 16 \Rightarrow \cancel{x(S)^2} =$

$x(S)^2 + \left(\frac{31}{3} - \frac{36}{3}\right)^2 = 16 \Rightarrow x(S) = \sqrt{16 - \frac{25}{9}} = 12$

$-\frac{5}{3}$

$x(T) = -12$

$L, F \in \quad x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow x(L) = \sqrt{1 - \frac{25}{225}} = -\frac{\sqrt{200}}{15} = \frac{10\sqrt{2}}{15}$

$x(F) = -\frac{10\sqrt{2}}{15}$

$S, F \in \quad y = 8b_3 - a_3x \Rightarrow y(S) = 8b_3 - a_3 x(S)$

$y(F) = 8b_3 - a_3 x(F)$

$\frac{31}{3} = 8b_3 - a_3 \cdot 12 \quad - \quad \frac{5}{25} = 8b_3 + a_3 \cdot \frac{10\sqrt{2}}{15}$

$\frac{5}{25} - \frac{31}{3} = a_3\left(\frac{10\sqrt{2}}{15} + 12\right)$

$\frac{15-775}{75} = \frac{700}{75} = \frac{10(\sqrt{2}+18)}{15} a_3 \Rightarrow a_3 = \frac{70}{3(\sqrt{2}+18)}$

Аналогично:

$y(L) = 8b_4 - a_4 x(L) \Rightarrow \frac{5}{25} = 8b_4 - a_4 \frac{10\sqrt{2}}{15} \Rightarrow \frac{700}{75} = -\left(\frac{10\sqrt{2}}{15} + 12\right) a_4 \Rightarrow a_4 = -\frac{70}{3(\sqrt{2}+18)}$

$y(T) = 8b_4 - a_4 x(T) \quad \frac{31}{3} = 8b_4 + 12a_4$

Ответ: $\pm \frac{70}{3(\sqrt{2}+18)}$; $\pm\sqrt{15}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

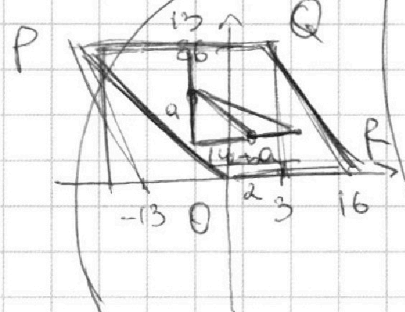
1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$19 \times 7 = 133$

$OP = \sqrt{13^2 + 26^2} =$



$a + b = 18x$

$a^2 - 7ab + b^2 = 18y$

$18x - 9ab = 18y$

$9ab \vdots 18 \Rightarrow ab \vdots 2$

$ab = 2k$

$\frac{a}{b} = \frac{2k}{b^2}$

$\frac{b}{a} = \frac{2k}{a^2}$

$19 \times 7 = 133$

$(2k, a^2, b^2) = 1$

$a + b = 9x$

$a^2 + b^2 + 2ab = 81x^2$

$a^2 + b^2 - 9ab = 9y$

$a^2 + b^2 + 2ab = 81x^2$

$a^2 + b^2 + 2ab - 9ab = 81x^2 - 9ab = 9y$ $\quad \frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}$ $\quad 81x^2 - 7ab$

$((9+n)k; b^2; a^2) = 1$

$a^2 + 4b^2 =$

$AB = a^2 + 14^2 - 28a + a^2 =$

$= \sqrt{2a^2 + 14^2 - 28a}$

$\frac{9+n}{t}$

$\frac{9t + r}{t} k = 9ab$

$9 \cdot \frac{r}{t} k$

$\frac{a^2 - 7ab + b^2}{a+b} = \frac{mx}{my}$

$\frac{(a+b)^2 - 9ab}{a+b} = \frac{mx}{my}$

$a + b - \frac{9ab}{a+b} = \frac{mx}{my}$

$a + b - \frac{mx}{my} = \frac{9ab}{a+b}$

$\frac{my(a+b) - mx}{my} = \frac{9ab}{a+b}$

$\frac{my}{m(ya + yb - x)} = \frac{1}{9b} + \frac{1}{9a}$

$a + b = (9+n)x = 9x + nx$

$a^2 + b^2 + 2ab = (81 + 18n + n^2)x^2$

$(81 + 18n + n^2)x^2 - 9ab = (9+n)y$

$81x^2 + 18nx^2 + n^2x^2 - 9ab = 9y + ny$

$81x^2 + 18nx^2 - 9ab + n^2x^2 - ny = 9y \Rightarrow n(nx^2 - y) \vdots 9$

$(9+n)^2x^2 - 9ab = (9+n)y$

$9ab \vdots 9+n$

$ab \vdots 9+n$

$ab = (9+n)k$

$\frac{a}{b} = \frac{(9+n)k}{b^2}$

$9ab \equiv 0$

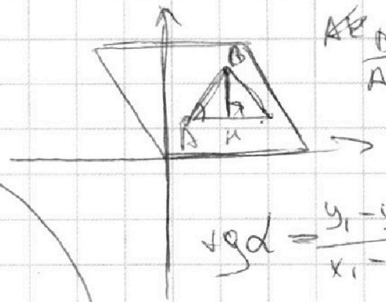
$9 + n \equiv 9ab \Rightarrow n \equiv 9(ab - 1)$

$-9 \equiv 9(ab-1) \Rightarrow -1 \equiv ab - 1 \Rightarrow ab \equiv 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\frac{BH}{AH} = tg\alpha$

$tg\alpha = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

$BH = AH\,tg\alpha$

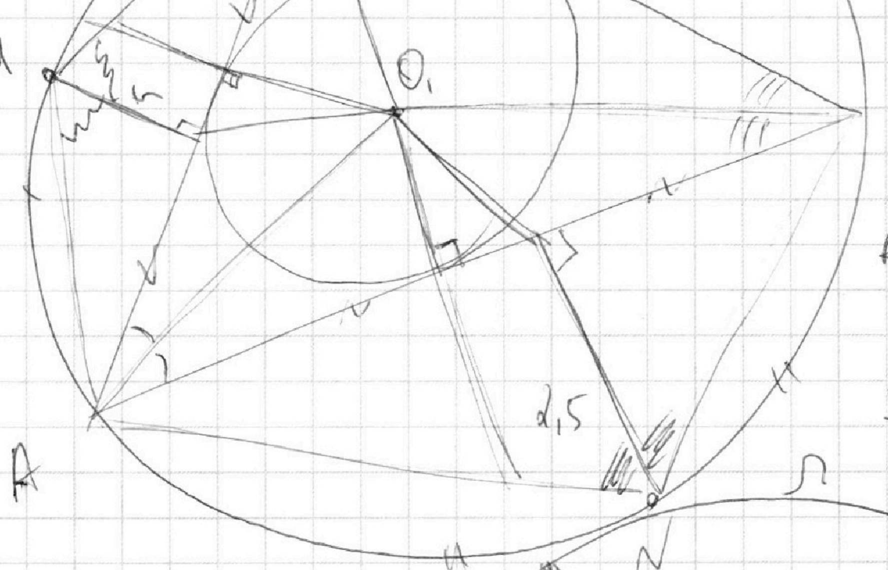
$AH(2 + tg\alpha)AH = 14$

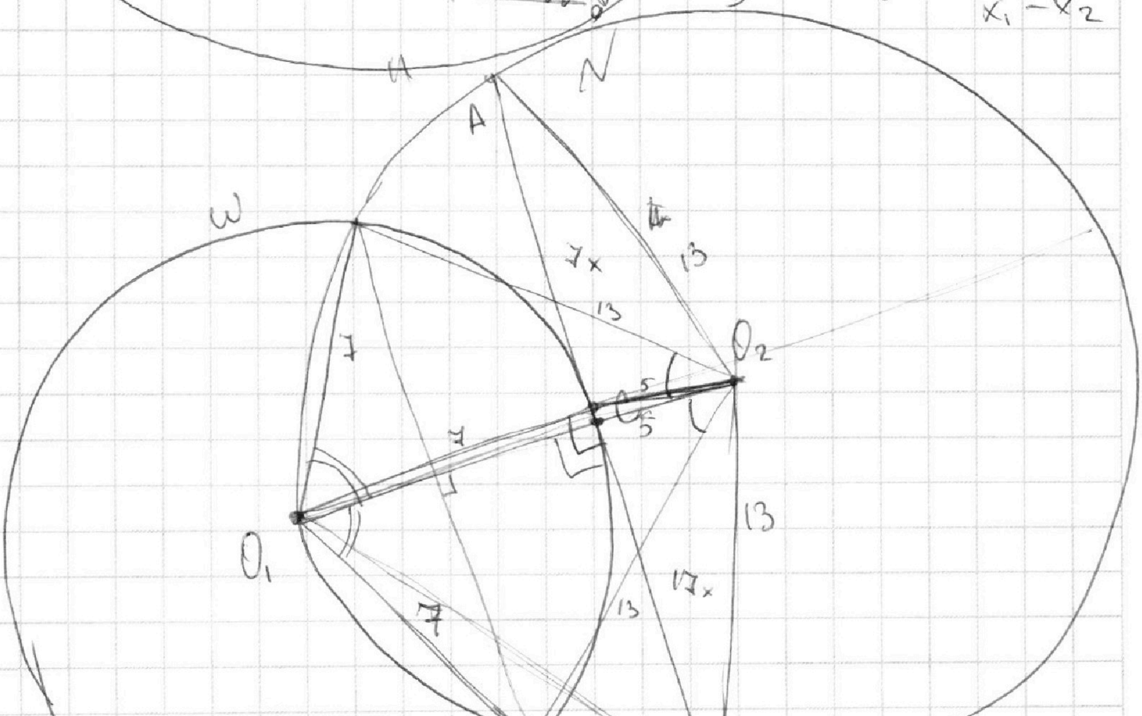
$AB: y_1 = kx_1 + b$

$y_2 = kx_2 + b$

$y_1 - y_2 = k(x_1 - x_2)$

$k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$



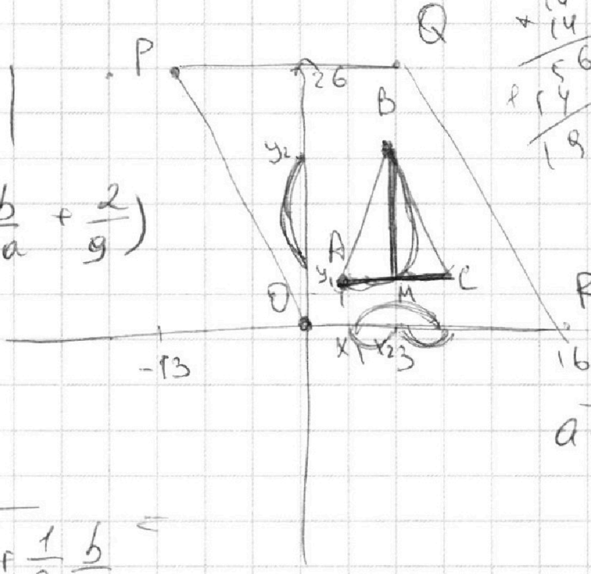


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$14 \cdot 14 = 56$, 196

$AC + BM = 14$

$2AM + BM = 14$

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2} = \frac{xm}{ym}$$

$$\frac{a+b}{9ab\left(\frac{a}{9b} + \frac{b}{9a} + \frac{2}{9}\right)}$$

$$= \frac{a+b}{(a+b)^2 - 9ab}$$

$4AM^2 + BM^2 + 4AMBM = 196$

$$\frac{1}{a+b - \frac{9ab}{a+b}}$$

$AB^2 + AM^2 + 4AMBM = 196$

$$\frac{\frac{1}{9b} + \frac{1}{9a}}{\frac{1}{9}\frac{a}{b} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}\frac{b}{a}} =$$

$$\frac{1}{a+b - \frac{1}{\frac{a+b}{9ab}}} =$$

$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$

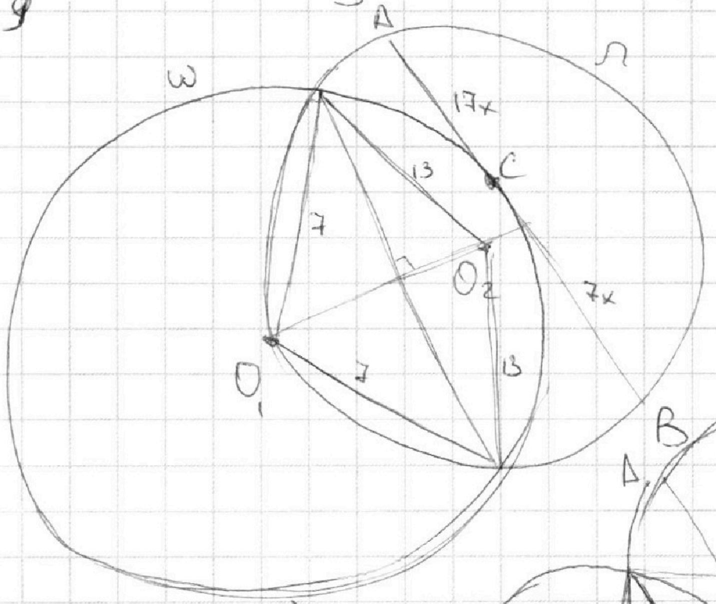
$2x_2 + y_2 = 14 + 2x_1 + y_1$

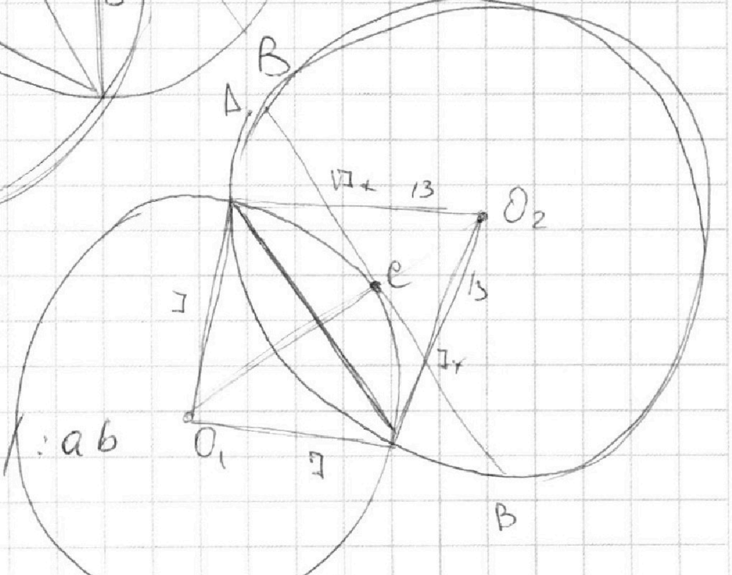
$$= \frac{a}{9b} + \frac{b}{9a} + \frac{2}{9}$$

$$= \frac{1}{a+b - \frac{1}{\frac{1}{9b} + \frac{1}{9a}}} =$$

$$\frac{a}{b}$$

$$= (a+b)\left(\frac{1}{9b} + \frac{1}{9a}\right) - 1$$





$(a+b)y = (a^2 - 7ab + b^2)x$

$ay + by = a^2x - 7abx + b^2x$

$a^2x + b^2x - 7abx - ay - by = 0 \;|: ab$

$$\frac{ax}{b} + \frac{bx}{a} - 7x - \frac{y}{b} - \frac{y}{a} = 0$$

$$\frac{ax - y}{b} + \frac{bx - y}{a} = 7x$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

3.

по св-ву п хорд $O_1D \cdot DT = AD \cdot DB$

$DC = (17-n)x \Rightarrow AD = AC - DC = 17x - 17x + nx = nx$

$BD = BC + CD = 7x + 17x - nx = (24-n)x$

$O_1O_2 = 13,\ O_1D = 7 \Rightarrow O_2D = 13 - 7 = 6 \Rightarrow DT = O_2D + O_2T =$

$= 6 + 13 = 19$

$O_1D \cdot DT = 7 \cdot 19 = nx \cdot (24-n)x = n(24-n)x^2$

$24n - n^2 = \frac{133}{x^2} \Rightarrow n^2 - 24n + \frac{133}{x^2} = 0$

$D = 24^2 - \frac{4 \cdot 133}{x^2}$

$n = \frac{24 \pm \frac{\sqrt{24^2x^2 - 4\cdot 133}}{x}}{2} = 12 \pm \frac{\sqrt{24^2x^2 - 4 \cdot 133}}{2x}$

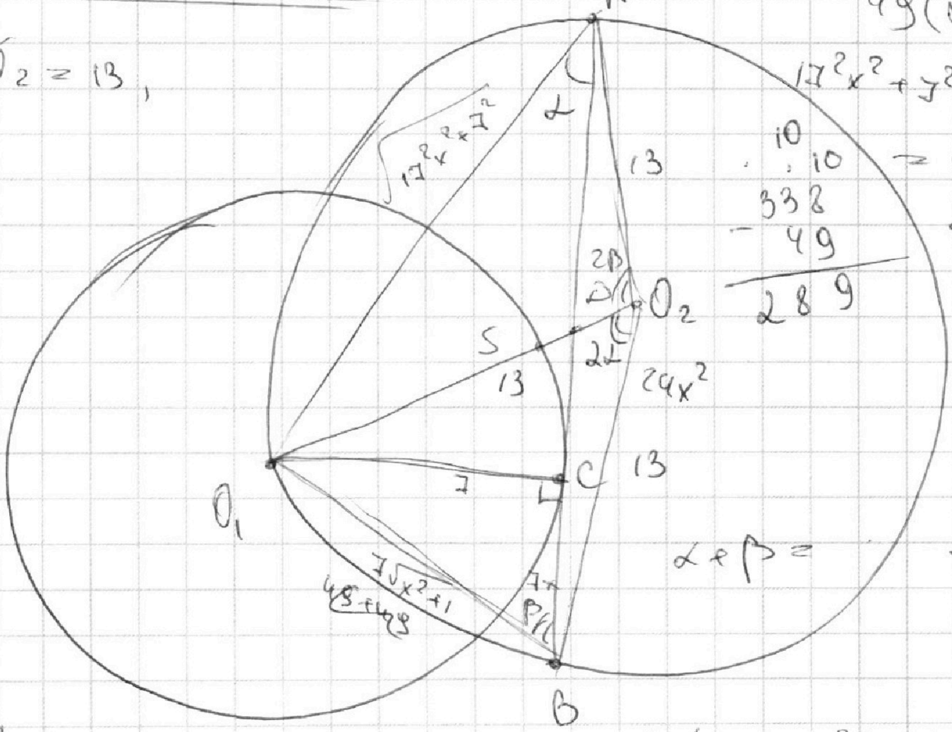
$338 + 289 = 627$

$169 \times 2 = 338$

$17 \times 17 = 119 + 17 = 289$

$49(x^2+1)$

$O_1O_2 = 13,$



$17^2x^2 + 7^2 + 7^2x^2 + 7^2 = 24^2x^2 + 2 \cdot 7^2$

$338 - 49 = 289$

$\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$\cos\beta =$

$13 \times 13 = 39 + 13 = 169$

$\alpha + \beta =$

$\cos 2\alpha =$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$46 \,|\, 2 \quad 46 : 2 = 23$

$68 \cdot 2 = 134$

$ab = 2^{15} 7^{4} x$

$bc = 2^{17} 7^{18} y$

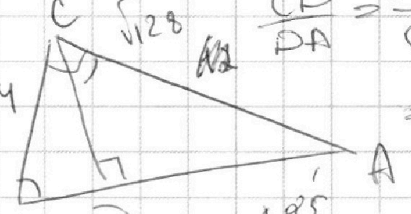
$ac = 2^{23} 7^{38} z$

$a^2 b^2 c^2 = 2^{45} 7^{68} xyz$

$2^{46} \cdot 7^{68}$

$128 = 2^7$

$\frac{CD}{DA} = \frac{O_1D}{CD} = \frac{4}{\sqrt{128}} = \frac{4}{2^3\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$



$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{}$

$17 \cdot 4 - 7 \cdot 4$

$2\sqrt{2}\,CD = DA$

$2\sqrt{2}\,O_1D = CD$

$8 O_1D = DA \Rightarrow 9 O_1D = 12$

$O_1D = \frac{4}{3}$

$DA = \frac{32}{3}$

$ax + y - 8b = 0$

$\frac{EB}{EA} = \frac{O_2E}{EB} = \frac{1}{\sqrt{15}}$

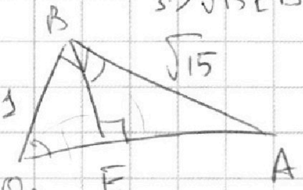
$\sqrt{15}\, O_2E = EB$

$\sqrt{15}\, EB = EA$

$(x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \le 0$

$(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-24y+144-16) \le 0$

$(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-24y-128) \le 0$



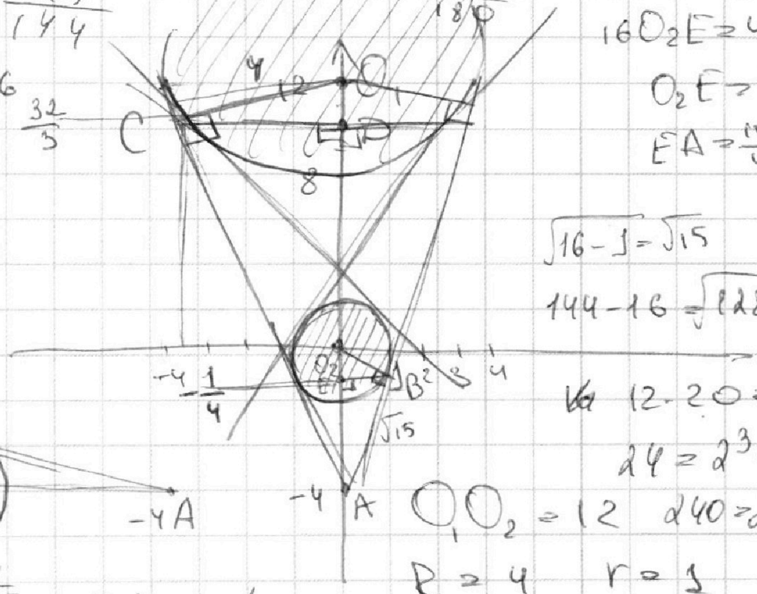
$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+y^2 \le 1 \\ x^2+(y-12)^2 \ge 16 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y^2 \ge 1 \\ x^2+(y-12)^2 \le 16 \end{cases} \end{array}\right.$

$EB^2 = 15 O_2E = EA$

$16 O_2E = 4$

$O_2E = \frac{1}{4}$

$EA = \frac{15}{4}$



$ax + y - 8b = 0$

$y = 8b - ax$

$\sqrt{16-1} = \sqrt{15}$

$144 - 16 = \sqrt{128}$

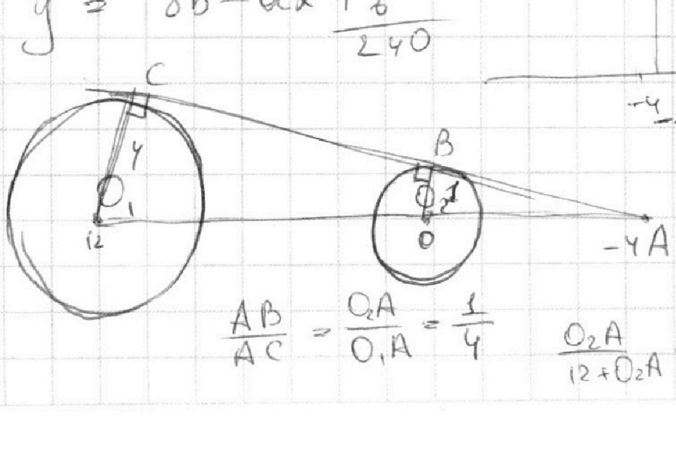
$12 \cdot 20 = 240$

$24 = 2^3 \cdot 3$

$240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$

$O_1O_2 = 12$

$R = 4 \quad r = 1$



$\frac{AB}{AC} = \frac{O_2A}{O_1A} = \frac{1}{4}$

$\frac{O_2A}{12+O_2A} = \frac{1}{4}$

$4O_2A = 12 + O_2A \Rightarrow O_2A = 4$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\sqrt{\underset{a}{3x^2-6x+2}} - \sqrt{\underset{b}{3x^2+3x+1}} = 1-9x$$

$D = 36-4\cdot3\cdot2 = 36-24 = 12$ $\quad D = 9-4\cdot3 =$

$x = \frac{6\pm\sqrt{12}}{6} = 1 \pm \frac{\sqrt{12}}{6}$

и

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a-b$$

$$\cancel{a\ \sqrt{a} = a-b+\sqrt{b}}$$

$$c-d = c^2-d^2$$

$$c-d = (c-d)(c+d)$$

$$(c-d)(1-c-d) = 0$$

$c = d$ $\quad 1 = c+d$

$$(3x^2-6x+2)(3x^2+3x+1) =$$

$$= 9x^4 - 18x^3 + 6x^2 + 3x^3 - 18x + \cancel{6x} + 3x^2 - \cancel{6x} + 2 =$$

$$= 9x^4 - 15x^3 + 9x^2 - 18x + 2$$

$$a = 1 + b - 2\sqrt{b}$$