

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



✓ 1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её десятый член равен $\sqrt{(25x + 34)(3x + 2)}$, двенадцатый член равен $2 - x$, а восемнадцатый член равен $\sqrt{\frac{25x + 34}{(3x + 2)^3}}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z}, \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $7 : 20$, считая от вершины C .

✓ 5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 500×120 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрасенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a < b$,
- число $b - a$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a^2 + b = 1000$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 4. Площади её боковых граней равны 6, 6 и 5. Найдите объём призмы.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1.

Пусть десятой знак равенства. Тогда двенадцатый - $k^2 y$,
восьмидесятым - $k^8 y$.

$$\frac{k^8 y}{y} = k^8 = \frac{\sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}}{\sqrt{(25x+34)(3x+2)}} = \frac{1}{\sqrt{(3x+2)^4}} = \frac{1}{(3x+2)^2}; \quad (\text{если } y \neq 0)$$

$$k^4 = \frac{1}{|3x+2|}$$

$$k^2 = \frac{1}{\sqrt{|3x+2|}}$$

Рассмотрим два случая:

1) $3x+2 > 0$. Тогда $25x+34 \geq 0$, иначе $\sqrt{(25x+34)(3x+2)} \notin \mathbb{R}$.

Пусть $25x+34 = 0$. Тогда $y = 0$, и последовательность

(начиная с 10-го знака) нулевая. Но тогда $2-x=0 \Rightarrow x=2$,

но $25 \cdot 2 + 34 \neq 0$, следовательно, $25x+34 \neq 0$

$$\begin{array}{l|l} 3x+2 > 0 \Rightarrow x > -\frac{2}{3} & \Rightarrow x > \frac{-2}{3} \\ 25x+34 > 0 \Rightarrow x > -\frac{34}{25} & \end{array}$$

Тогда $k^2 = \frac{1}{\sqrt{3x+2}}$;

$$y k^2 = 2-x = \frac{1}{\sqrt{3x+2}} = \sqrt{25x+34}$$

$$x^2 - 4x + 4 = 25x + 34$$

$$x^2 - 29x - 30 = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x_1 = -1$ ~~$< -\frac{2}{25}$~~ , тогда $k^2 = \frac{1}{\sqrt{-31}}$ следовательно, $x_1 = -1$ не подходит
 $x_2 = 30$ ~~$> -\frac{2}{25}$~~ , тогда $k^2 = \frac{1}{\sqrt{30+2}} = \frac{1}{\sqrt{32}}$;
 ~~$y = \frac{(-34-25x) \pm \sqrt{(-34-25x)^2 - 4 \cdot (-34) \cdot (-2)}}{2 \cdot (-2)}$~~
 ~~$k^2 y = \frac{28 \cdot \sqrt{92} \pm \sqrt{784+32}}{2 \cdot \sqrt{92}} = 28 \cdot \sqrt{92}$~~
 ~~$k^2 y = 28 \cdot \sqrt{92} \pm \sqrt{784+32} = 28 \cdot \sqrt{92}$~~
 ~~$k^2 y =$~~

2) $3x+2 < 0$, тогда $25x+34 < 0$

$x < -\frac{2}{3}$; $x < -\frac{34}{25} \Rightarrow x < -\frac{34}{25}$

Тогда $k^2 = \frac{1}{\sqrt{-3x-2}}$;

$y = \sqrt{(-34-25x) \cdot (-3x-2)}$;

$k^2 y = \sqrt{-34-25x} = 2-x$

$-34-25x = x^2 - 4x + 4$

$x^2 + 21x + 38 = 0$

$x_1 = -2 < -\frac{34}{25}$; тогда $k^2 = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$

$x_2 = -19 < -\frac{34}{25}$; тогда $k^2 = \frac{1}{\sqrt{55}}$

Ответ: $-19; -2; 30$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2.

Рассмотрим выражение $\sqrt{400-z^2}$. Его максимум $=20$, при $z=0$.

Рассмотрим выражение $|y+2|+2|y-18|$. При раскрытии модулей может получиться 3 случая:

1) $y \leq -2$, тогда оба модуля раскрываются со знаком "-":

$$-y-2 + -2y+36 = -3y+34 - \text{убывающая функция}$$

2) $y \geq 18$, тогда оба модуля - со знаком "+"

$$y+2 + 2y-36 = 3y-34 - \text{возрастающая функция}$$

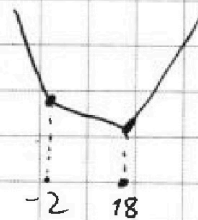
3) $-2 \leq y \leq 18$, тогда модули имеют разные знаки

$$y+2 - 2y + 36 = -y + 38 - \text{убывающая функция}$$

Тогда общая функция имеет вид:

Минимум функции $-y = 18$;

$$|18+2| + 2|18-18| = 20.$$



Тогда в уравнении $|y+2|+2|y-18| = \sqrt{400-z^2}$ максимум

имеет минимум, также равный максимуму правой. Тогда

у нас единственное решение $y = 18, z = 0$. Подставим их

в второе уравнение:

$$\sqrt{x+8} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{18-3x-x^2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$$(\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7)^2 = 4(-x^2 - 3x + 18)$$~~

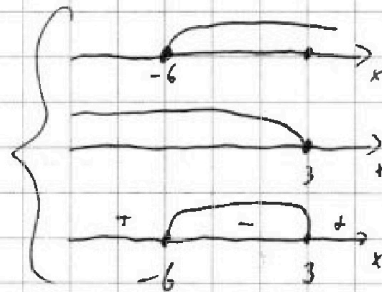
~~$$x+6 + 3-x + 49 - 2\sqrt{x+6}\sqrt{3-x} + 14\sqrt{x+6} - 14\sqrt{3-x} = -4x^2 - 12x + 72$$~~

~~$$\sqrt{x+6} - 2\sqrt{(x+6)(3-x)} - \sqrt{3-x} + 7 = 0$$~~

~~$$\sqrt{x+6} \cdot (1 - \sqrt{3-x}) - \sqrt{3-x} (1 + \sqrt{x+6}) + 7 = 0$$~~

$$\begin{cases} x+6 \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \\ -x^2-3x+18 \geq 0 \end{cases} \begin{array}{l} \text{условия} \\ \text{существования} \\ \text{кв. корней} \end{array}$$

$$\begin{cases} x \geq -6 \\ x \leq 3 \\ x^2 + 3x - 18 \leq 0 \\ (x-3)(x+6) \leq 0 \end{cases}$$



$$x \in [-6; 3]$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

н.с.

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1$$

$$\begin{aligned} \cos 3x &= \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = \cos^2 x \cdot \cos x - \sin^2 x \cos x - 2\sin^2 x \cos x \cdot \sin x = \\ &= \cos^3 x - 3\sin^2 x \cos x = \cos^3 x - 3(1 - \cos^2 x)\cos x = \\ &= 4\cos^3 x - 3\cos x \end{aligned}$$

$$p(4\cos^3 x - 3\cos x) + 6(2\cos^2 x - 1) + 3(p+4)\cos x + 10 = 0;$$

Пусть $t = \cos x$

$$4pt^3 - 3pt + 12t^2 - 6 + 3pt + 12t + 10 = 0$$

$$4pt^3 + 12t^2 + 12t + 4 = 0$$

если $p=0$, то у $3t^2 + 3t + 1 = 0$ нет решений, т.к.

$$D = 9 - 4 \cdot 3 = 9 - 12 < 0$$

$$pt^3 + 3t^2 + 3t + 1 = 0; \quad \text{Пусть } f(t) = pt^3 + 3t^2 + 3t + 1$$

Подставим $t=0$. Тогда $f(0) = 1 \Rightarrow 0$ - не корень.

Рассмотрим $g(t) = t^3 + 3t^2 + 3t + p$.

$$g'(t) = 3t^2 + 6t + 3 = 3(t^2 + 2t + 1) = 3(t+1)^2 \geq 0 \Rightarrow g(t) \uparrow$$

Тогда у $g(t)$ может быть только 1 корень, а следовательно, у $f(t)$ тоже, т.к. их корни являются обратными друг к другу.

Т.к. $t = \cos x$, у $f(t)$ корень должен быть в $[-1; 1]$; следовательно,

у $g(t)$ он будет лежать в $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

Разберём 2 случая

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1) g(0) > 0;$$

$$g(0) = p \Rightarrow p > 0;$$

корень $g(t)$ слева от нуля; если он левее -1 , то

$$g(-1) \geq 0$$

$$-1 + 3 - 3 + p \geq 0$$

$$p \geq 1;$$

$$\text{т.о.}, \quad p \geq 1$$

$$2) g(0) < 0$$

$$g(0) = p \Rightarrow p < 0$$

корень $g(t)$ справа от нуля; если он правее 1 , то

$$g(1) \leq 0$$

$$1 + 3 + 3 + p \leq 0$$

$$p \leq -7$$

$$\text{т.о.}, \text{ получаем } p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

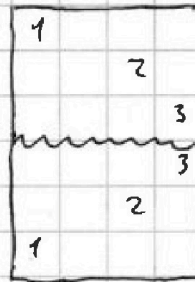
СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5.

- 1) Посчитаем кол-во способов закрасить 8 клеток ~~так~~ симметрично относительно горизонтальной средней линии

Поскольку треугольник четный, средняя линия проходит по границе клеток, следовательно, никакая клетка не может быть симметрична сама себе. Тогда каждой клетке из верхней половины соответствует клетка из нижней (и наоборот), следовательно, любые 4 клетки, расположенные симметрично, однозначно определяют набор из 4 клеток в верхней половине. Тогда кол-во способов - $C_{\frac{5}{2}}^4$, где 5 - площадь треугольника



- 2) Теперь посчитаем кол-во способов, симметричных относительно вертикальной средней линии. Аналогичными рассуждениями получим $C_{\frac{4}{2}}^4$

- 3) Перейдем к центральной симметрии. Треугольник всё ещё четный, следовательно, центральной клетки нет. Тогда каждой клетке из верхней половины соответствует одна клетка из нижней (и наоборот), или опять приходим

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

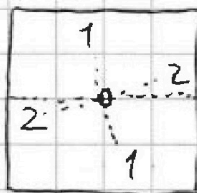


1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

к ответу $C_{\frac{5}{2}}^4$.



4) Посчитаем кол-во способов получить

углу несколько симметрий.

Во-первых, получим симметрию

относительно обеих средних

линий. Тогда одной клетке

в левой верхней четверти

соответствует по одной

точке в остальных четвертях. При этом заметим,

что точки в противоположных четвертях расположены

симметрично относительно центра. Аналогично, если

мы построим множество клеток, симметричные одной средней

линии и центру, оно будет симметрично и для второй средней

линии. Тогда все множества клеток имеют вид следующие

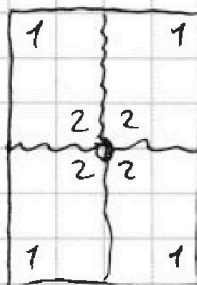
представленные на в виде кругов Эйлера. Кол-во способов

получить все 3 симметрии - $C_{\frac{5}{4}}^2$, тогда получим



хотя бы одну, кол-во способов - $3C_{\frac{5}{2}}^4 - 2C_{\frac{5}{4}}^2 = 3C_{30000}^4 - 2C_{15000}^2$

Ответ: $3C_{30000}^4 - 2C_{15000}^2$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $(a-c)(b-c) = p^2$. Тогда возьмем варианты

$$(a-c) = (b-c) = \pm p; \quad (a-c) = \pm 1, b-c = \pm p^2, \quad a-c = \pm p^2, b-c = \pm 1$$

Но тогда $a=b \Rightarrow a-b \equiv 3$,
что противоречит условию

В этих вариантах $a < b \Rightarrow a-c < b-c$,

следовательно, берем знаки - это

$$1) a-c=1, b-c=p^2 \quad (\text{т.к. } -1 > -p^2)$$

$$2) a-c=-p^2, b-c=-1 \quad (\text{т.к. } p^2 > 1)$$

Рассмотрим случаи по отдельности.

$$1) a-c=1, b-c=p^2.$$

$$\text{Тогда } (b-c) - (a-c) = b-a = p^2 - 1.$$

Рассмотрим остаток $\text{mod } 3$. Тогда $p^2 \in \{0; 1\}$.

Если $p^2 \equiv 1 \pmod{3}$, то $p^2 - 1 \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow b-a \equiv 0 \pmod{3}$ или $b-a \equiv 3$, что противоречит условию.

$$\text{Тогда } p^2 \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow p^2 \equiv 3 \Rightarrow p=3.$$

$$a-c=1 \Rightarrow a=c+1$$

$$b-c=9 \Rightarrow b=c+9$$

$$a^2 + b = 1000;$$

$$(c+1)^2 + c+9 = 1000$$

$$c^2 + 2c + c = 990$$

$$c^2 + 3c - 990 = 0$$

$$c_1 = 30 \Rightarrow a = 31, b = 39, c = 30$$

$$c_2 = -33 \Rightarrow a = -32, b = -24, c = -33$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2) a-c = -p^2, b-c = -1$$

Рассмотрим остатки mod 3.

$$(b-c) - (a-c) = b-a = -1 + p^2 = p^2 - 1; \text{ по кривизне, из рассуждений}$$

в случае (1) получаем $p=3$.

$$a-c = -9 \quad b-c = -1$$

$$a = c-9, \quad b = c-1$$

$$a^2 + b = 1000$$

$$(c-9)^2 + c-1 = 1000$$

$$c^2 - 18c + 81 + c - 1 = 1000$$

$$c^2 - 17c - 920 = 0$$

$$c_1 = -23 \Rightarrow a = -32, b = -24, c = -23$$

$$c_2 = 40 \Rightarrow a = 31, b = 39, c = 40$$

$$\text{Ответ: } (31; 39; 40); (-32; -24; -23);$$

$$(-32; -24; -23); (31; 39; 40)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 2 = 2\sqrt{4-3x-x^2+z}$$

$$|y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}$$

1) $y \geq 18$

$$y+2 + 2y-36 = \sqrt{\quad}$$

$$3y-34 = \sqrt{\quad}$$

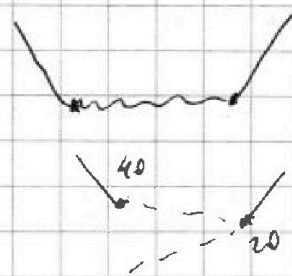
$$(3y-34)^2 = (400-z)(400+z)$$

$$9y^2 - 6 \cdot 34y + 34^2 = 400 - z^2$$

$$9y^2 - 6 \cdot 34y + 756 + z^2 = 0$$

$$3^2 y^2 - 2 \cdot 3 \cdot 34y$$

34²
34
136
102
1156
400
256



$$(\sqrt{x+6} + 1)(1 - \sqrt{3-x}) - \sqrt{3-x}(1 + \sqrt{x+6}) + 2 - (1 - \sqrt{3-x}) = 0$$

$$(\sqrt{x+6} + 1)(1 - 2\sqrt{3-x}) - (1 - \sqrt{3-x}) = -2 \quad x+6 + 14\sqrt{x+6} + 49 = (3-x)(4x+24 + 4\sqrt{x+6})$$

$$(1 + \sqrt{x+6})(2\sqrt{3-x} - 1) - (\sqrt{3-x} - 1) = 2 \quad t = 1.5$$

$$-t + 1.5 \quad x + 14\sqrt{x+6} + 65 =$$

$$\sqrt{x+6} + 2 = \sqrt{3-x}(1 + 2\sqrt{x+6}) = \sqrt{3-x} + 2\sqrt{3-x}\sqrt{x+6}$$

$$\sqrt{x+6}(1 + k\sqrt{3-x}) + \sqrt{3-x}(-1 - (2+k)\sqrt{x+6}) + 2 = (2x+28 + 17\sqrt{x+6}) - 4x^2 - 29$$

$$\sqrt{x+6}(1 + k\sqrt{3-x}) - \sqrt{3-x}(1 + 2+k) \quad 4x^2 + 14x + 2\sqrt{x+6} - 25 = 0$$

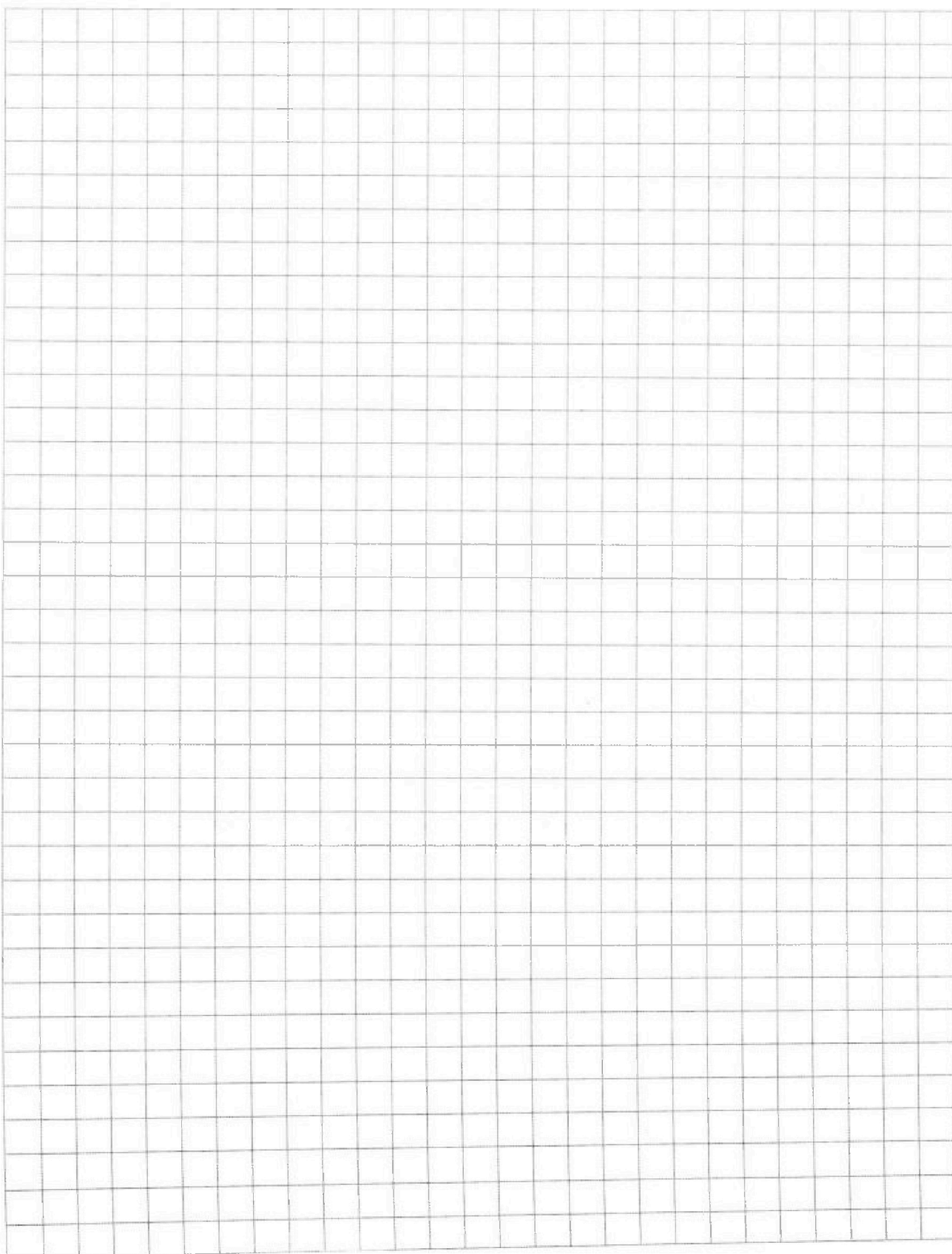


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$3x+2 \neq 0$$

$$b^3 = \sqrt{\frac{1}{(3x+2)^4}}$$

$$(25x+34)(3x+2)$$

$$b^3 = \frac{1}{(3x+2)^2}$$

$$92 =$$

$$\left(x + \frac{34}{25}\right) \left(x + \frac{2}{3}\right) \cdot 25$$

$$b^4 = \frac{1}{|3x+2|}$$

$$= 46 \cdot 2$$

$$= 23 \cdot 4$$

$$b^2 = \frac{1}{\sqrt{|3x+2|}}$$

$$784 = 4 \cdot 2^2$$

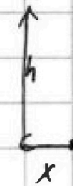
$$196 = 2^2$$

$$49 = 7$$

$$7 = 7$$

$$1$$

$$= 2^4 \cdot 7^2$$



$$\sqrt{(25x+34)(3x+2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{|3x+2|}} = 2-x$$

$$\sqrt{|25x+34|} = 2-x$$

$$|25x+34| =$$

$$|3-x-27| \geq 0$$

$$z^2 \leq 400$$

$$z^2 \leq 3-x$$

$$-20 \leq z \leq 20 \quad 1)$$

$$x \geq -6$$

1	3
2	
2	
1	3

 $C_{\frac{5}{2}}^k$

1	1
1	1

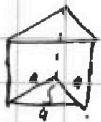
$$3 \cdot C_{\frac{5}{2}}^k - 2 \cdot C_{\frac{5}{2}}^k$$

2)

1	1
2	2
3	3

 $C_{\frac{5}{2}}^k$

1	1
1	1



3)

1	3
2	2
3	1

 $C_{\frac{5}{2}}^k$

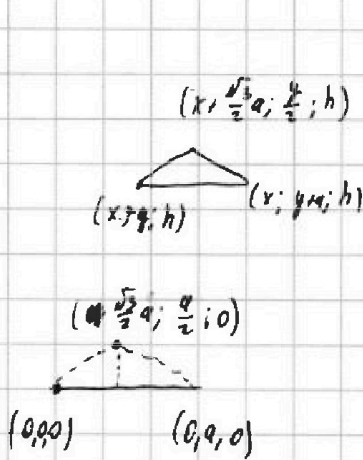



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

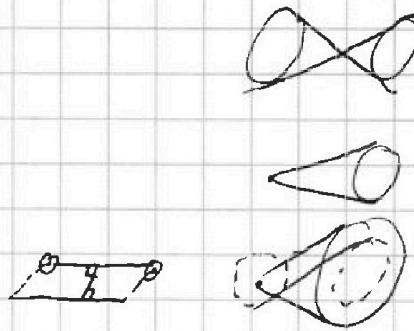


$$S = a^2 \cdot \sin 60^\circ \cdot \frac{1}{2} = a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 4$$

$$a^2 = \frac{16}{\sqrt{3}}$$

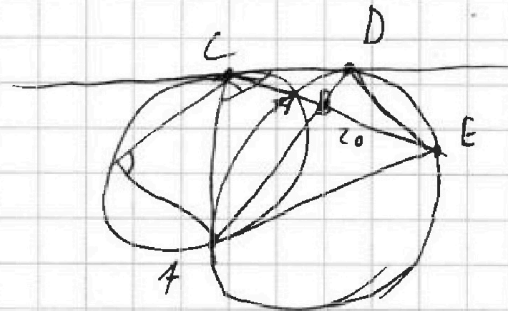
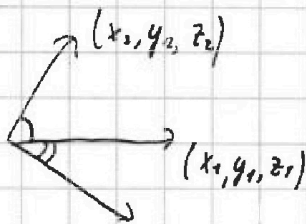
$$\begin{array}{r} \times 32 \\ 32 \\ \hline 64 \\ \hline 96 \\ \hline 1024 \end{array}$$

$a \neq c, b \neq c$

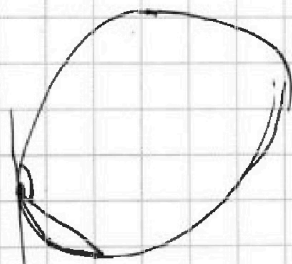


$$ab - c(a+b) + c^2$$

$$a(b-c) + c(b+c)$$



$$\begin{aligned} a-c &= 1 & b-c &= a^2 \\ c &= a-1 & b &= a^2 + a - 1 \\ a &= a-1 \end{aligned}$$



$$a^2 + b = 1$$

$$a=0, b=1$$

$$a=1, b=0$$

$$a=2, a^2=1, b=0$$

$$a^2 + a + b^2 - 1 = 1000$$

$$a^2 + a + b^2 = 1001$$

$$a^2 + a > 0$$

$$a(a+1) > 0$$

$$a(a+1) < 0, \text{ если } a \in (-1, 0)$$

1 939

2 936

3

$$b = 1000 - a^2 \quad (a < 0)$$

$$b^2 = 1000(a-1)^2 = 1000 - a^2 + 2a - 1$$

$$\leftarrow 1000 - a^2 - 1$$

$$\begin{array}{r} 131^2 = \\ 31 \\ \hline 93 \\ \hline 961 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ \times 32 \\ \hline 64 \\ \hline 96 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(a-c)(b-c) = p^2$$

$$b-a \neq 0$$

$$b \neq a$$

$$b-c \neq a-c$$

Зафиксируем p, c

~~2 3 4 5 6~~

1) $a = c + p^2, b = c + p^2$

3 5 7 9 11 13 15

$$(c+1)^2 + b = 1000$$

17 19 21 23

$$c^2 + 2c + 1 + c + p^2 = 1000$$

$$c^2 + 3c + 1$$

$$c^2 + 3c + p^2 = 999$$

$$c^2 = -\frac{3c}{2} - 1,5$$

1: ~~1000~~ $+p=1001 : 11$

43
23
129
86
989

2: ~~999~~ $p=999 : 3$

~~28~~

~~989~~ $p=13$

919 | 23
32 | 43
69
29

1: ~~995~~ $p=995 : 5$

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19

2: ~~989~~ $p=989 = 23 \cdot 43$

23, 29, 31

3: $c^2 + 3c = 995$

2) $a = c - p^2, b = c - 1$

$$p^2(p^2 - 2c) + c^2 + c = 999 = 3^3 \cdot 37$$

$$(c - p^2)^2 + c - 1 = 1000$$

$$p^4 - 2cp^2 + c^2 + c = 999$$

$$c^2 - 2cp^2 + p^4 + c = 999$$

$$p^4 \equiv 999 \pmod{c}$$

$$p^4 - 2cp^2$$

$$c = 3k+2$$

x	x^2	x^4
0	0	0
1	1	1
2	4	16
3	9	81
4	16	256



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \cos 3x &= \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = & \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 \\ & & \sin^2 x &= 1 - \cos^2 x \\ & & & \\ & = (\cos^2 x - \sin^2 x) \cos x - 2 \sin x \cos x \sin x = \\ & = \overset{\cos x}{\cos^3 x} - \overset{\cos x}{\sin^2 x} - 2 \sin^2 x \cos x = \cos^3 x - 3(1 - \cos^2 x) \cos x = \\ & = \boxed{4\cos^3 x - 3\cos x} \end{aligned}$$

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0 \quad \begin{aligned} & a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0, \quad x_0 \\ & a_0 \left(\frac{1}{x}\right)^n + a_1 \left(\frac{1}{x}\right)^{n-1} + \dots + a_n = 0 \end{aligned}$$

$$p(4\cos^3 x - 3\cos x) + 6(2\cos^2 x - 1) + 3(p+4)\cos x + 10 = 0$$

$$4pt^3 - 3pt + 12t^2 - 6 + 3pt + 12t + 10 = 0 \quad t = \cos x$$

$$4pt^3 + 12t^2 + 12t + 4 = 0 \quad \begin{array}{r} 920 \quad 4 \quad 2 \quad 5 \\ 92 \quad 2 \\ 23 \quad 23 \\ 1 \end{array} \quad 23-40$$

$$pt^3 + 3t^2 + 3t + 1 = 0$$

$$3pt^2 + 6t + 1 = 0$$

$$pt^2 + 2t + 1 = 0$$

$$D = 4 - 4p \quad D \geq 0 \Rightarrow \text{или } p \leq 1, \text{ но } D > 0 \Rightarrow 2 \text{ корня экв.}$$

$$p \cdot \frac{1}{p^2} + 3 \cdot \frac{1}{p^2} +$$

$$t^3 + 3t^2 + 3t + p = 0$$

$$3t^2 + 6t + 3 = 0$$

$$t^2 + 2t + 1 = 0$$

$$(t+1)^2 = 0$$

$$(p-t+1)t^2 + (2t+1)$$

$$t_1 t_2 t_3 = -\frac{1}{p}$$

$$t_1 + t_2 + t_3 = -\frac{3}{p} \quad [-1; 1] \text{ - не более}$$

$$f(0) = p \quad 1) p > 0 \quad 1 + 3 + 3 + p \leq 0$$

$$f(-1) \geq 0 \quad \boxed{p \leq -7}$$

$$-1 + 3 - 3 + p \geq 0$$

$$\boxed{p \geq -1}$$

$$2) p < 0 \quad f(1) \leq 0$$