МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 13

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $3^{11}7^{11}$, bc делится на $3^{18}7^{16}$, ac делится на $3^{21}7^{38}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-3x+4}-\sqrt{2x^2+x+3}=1-4x.$$

4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC=1$ и $BC=16$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω.

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам

$$3x+2y=z \quad \text{и} \quad \frac{3}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z}.$$

Найдите наибольшее возможное значение выражения $\dfrac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6y^2}$.

6. [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 2 часа раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от A к B, а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 96 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 6 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 1 час 15 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между A и B.

7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA, AB, BC в точках D, E, F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC, проходящую через вершину C, в точке Y; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω. Известно, что $EX=2\sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD:DC$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
X						

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Решение:

Оценка: Пусть $a = a_0\, 3^{\alpha_1} 7^{\alpha_2}$, $b = b_0\, 3^{\beta_1} 7^{\beta_2}$, $c = c_0\, 3^{\gamma_1} 7^{\gamma_2}$,
где $a_0, b_0, c_0 \in \mathbb{N} \setminus \{3;7\}$, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

По условию, $ab \;\vdots\; 3^{11} 7^{11} \Rightarrow a_0 b_0 \cdot 3^{\alpha_1+\beta_1} \cdot 7^{\alpha_2+\beta_2} \;\vdots\; 3^{11} 7^{11} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1+\beta_1 \geq 11 \\ \alpha_2+\beta_2 \geq 11 \end{cases}$

$bc \;\vdots\; 3^{18} 7^{16} \Rightarrow b_0 c_0\, 3^{\beta_1+\gamma_1} \cdot 7^{\gamma_2+\beta_2} \;\vdots\; 3^{18} 7^{16} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \beta_1+\gamma_1 \geq 18 \\ \beta_2+\gamma_2 \geq 16 \end{cases}$

$ac \;\vdots\; 3^{21} 7^{38} \Rightarrow a_0 c_0\, 3^{\alpha_1+\gamma_1} \cdot 7^{\alpha_2+\gamma_2} \;\vdots\; 3^{21} 7^{38} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1+\gamma_1 \geq 21 \\ \alpha_2+\gamma_2 \geq 38 \end{cases}$

Получим:

$$\begin{cases} \alpha_1+\beta_1 \geq 11 \quad (1) \\ \beta_1+\gamma_1 \geq 18 \quad (2) \\ \gamma_1+\alpha_1 \geq 21 \quad (3) \\ \alpha_2+\beta_2 \geq 11 \\ \beta_2+\gamma_2 \geq 16 \\ \gamma_2+\alpha_2 \geq 38 \end{cases} \xRightarrow{(1)+(2)+(3)} \begin{cases} 2(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1) \geq 50 \\ \alpha_2+\beta_2+\gamma_2 \geq \alpha_2+\gamma_2 \geq 38 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1+\beta_1+\gamma_1 \geq 25 \\ \alpha_2+\beta_2+\gamma_2 \geq 38 \end{cases}$$

$$abc = a_0 b_0 c_0 \cdot 3^{\alpha_1+\beta_1+\gamma_1} \cdot 7^{\alpha_2+\beta_2+\gamma_2} \geq 3^{25} \cdot 7^{38}$$

Пример: Пусть $a = 3^{7} \cdot 7^{19}$,
$b = 3^{4}\, 7^{0}$,
$c = 3^{14} \cdot 7^{19}$.

Тогда $ab = 3^{11} \cdot 7^{19} \;\vdots\; 3^{11} \cdot 7^{11}$, $bc = 3^{18} \cdot 7^{19} \;\vdots\; 3^{18} 7^{19}$,

$ac = 3^{21} 7^{38} \;\vdots\; 3^{21} 7^{38}$

$abc = 3^{25} \cdot 7^{38}$

Ответ: $3^{25} \cdot 7^{38}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Решение:

$\sqrt{2x^2-3x+4}-\sqrt{2x^2+x+3}=1-4x$

Пусть $f(x)=2x^2-3x+4$

$D=9-32=-23<0$. Значит, $f(x)$ не имеет корней.

Коэффициент при наибольшей степени $2>0$. Значит, $\forall x\in\mathbb{R}\ f(x)>0$

Пусть $g(x)=2x^2+x+3$

$D=1-24=-23<0$. Значит, $g(x)$ не имеет корней.

Коэфф. при x^2 равен $2>0$. Значит, $\forall x\in\mathbb{R}\ g(x)>0$

$\cancel{\sqrt{2x^2-3x+4}-\sqrt{2x^2+x+3}=1-4x \iff \sqrt{2x^2-3x+4+2x^2+x+3}}$

$\Downarrow$

$\cancel{2x^2-3x+4+2x^2+x+3-2\sqrt{(2x^2-3x+4)(2x^2+x+3)}=(1-4x)^2 \Rightarrow}$

$\cancel{\Rightarrow 4x^2-2x+7-1-16x^2+8x=2\sqrt{(2x^2-3x+4)(2x^2+x+3)}}$

Пусть $a=2x^2-3x+4$, $b=2x^2+x+3$

Тогда уравнение примет вид:

$\sqrt{a}-\sqrt{b}=a-b \iff (\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=\sqrt{a}-\sqrt{b} \iff$

$\iff \left[\begin{array}{l}\sqrt{a}+\sqrt{b}=1\\ \sqrt{a}=\sqrt{b}\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}a=b\\ \sqrt{a}+\sqrt{b}=1\end{array}\right.$

Вернёмся к x:

$\left[\begin{array}{l}\sqrt{2x^2-3x+4}+\sqrt{2x^2+x+3}=1 \quad (1)\\ 2x^2-3x+4=2x^2+x+3\end{array}\right.$

Решим (1)

$\sqrt{2x^2-3x+4}+\sqrt{2x^2+x+3}=1 \Rightarrow 2x^2-3x+4+2\sqrt{(2x^2-3x+4)(2x^2+x+3)}+$

$+2x^2+x+3=1 \Rightarrow 4x^2-2x-6=-2\sqrt{(2x^2-3x+4)(2x^2+x+3)}\ \Big|:(-2) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x+3-2x^2)^2=(2x^2-3x+4)(2x^2+x+3) \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2+9+4x^4+6x-4x^3-12x^2=4x^4+2x^3+6x^2-6x^3-3x^2-9x+$

$+8x^2+4x+12 \Rightarrow 4x^4-4x^3-11x^2+6x+9=4x^4-4x^3+11x^2-5x+12 \Rightarrow$

$\Rightarrow -11x^2+6x+9-11x^2+5x-12=0 \Rightarrow 22x^2-11x+3=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x\in\varnothing$ $\qquad D=121-264<0$

Вернёмся к совокупности:

$\left[\begin{array}{l}x\in\varnothing\\ -4x+1=0\end{array}\right. \Rightarrow x=\frac{1}{4}$

Проверка: $\sqrt{2\cdot\frac{1}{16}-\frac{3}{4}+4}-\sqrt{2\cdot\frac{1}{16}+\frac{1}{4}+3}=1-4\cdot\frac{1}{4} \iff$

$\iff \sqrt{\frac{1}{8}+3\frac{1}{4}}-\sqrt{\frac{1}{8}+3\frac{1}{4}}=0 \iff 0=0$ – верно

Ответ: $\frac{1}{4}$

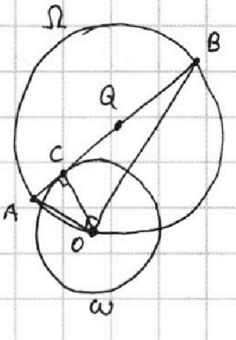
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Решение:



Пусть O - центр окр. ω, r - её радиус,
Q - центр окр. Ω, R - её радиус.

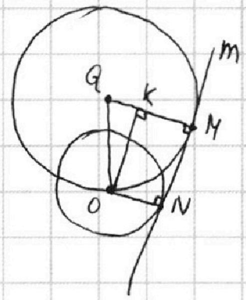
Проведём отрезки AO, CO и BO.
AB - диаметр окр. Ω, O ∈ Ω. Значит,
$\angle AOB = 90^\circ$ и $\triangle AOB$ - прямоугольный

AB касается ω, OC - радиус окр. ω =>
=> $OC \perp AB$.

Пусть $\angle ABO = \beta$. Тогда $\angle COB = 90^\circ - \beta$ => $\angle AOC = 90^\circ - \angle COB =$
$= 90^\circ - (90^\circ - \beta) = \beta = \angle ABO$

$\triangle CBO \sim \triangle COA$ по двум углам => $\frac{CB}{CO} = \frac{CO}{CA}$ => $r = CO = \sqrt{BC \cdot AC}$ =>
=> $r = \sqrt{1 \cdot 16} = 4$

AB - диаметр окр Ω => $AB = 2R$ => $R = \frac{AC + BC}{2} = \frac{1+16}{2} = \frac{17}{2} = 8\frac{1}{2}$



Пусть m - прямая, содержащая общую касательную к двум окружностям и окр. Ω касается m в точке M, а окр. ω касается m в точке N.
Значит, $QM \perp m$ и $ON \perp m$, как радиусы

Опустим перпендикуляр OK из точки O на QM
$K \in [QM]$, т.к. $R > r$.

$OK \perp KM$, $KM \perp m$, $ON \perp m$ => OKMN - прямоугольник =>
=> $MN = OK$

Рассмотрим прямоугольный треугольник QKO.
$QK = R - r$, $QO = R$, $OK = MN$.
По теореме Пифагора, $OK^2 = OQ^2 - QK^2$ => $MN^2 = R^2 - (R-r)^2 =$
$= (R - R + r)(R + R - r) = 2Rr - r^2$
$MN = \sqrt{2 \cdot \frac{17}{2} \cdot 4 - 4^2} = \sqrt{17 \cdot 4 - 16} = \sqrt{4 \cdot 13} = 2\sqrt{13}$

Общие касательные к двум данным окружностям равны.

Ответ: $2\sqrt{13}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Решение:

По условию, $x, y, z \in \mathbb{R}$ и $x \neq 0,\ y \neq 0,\ z \neq 0$.

$$\begin{cases} 3x+2y=z \\ \frac{3}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y=z \\ (3x+2y)\left(\frac{3}{x}+\frac{1}{y}\right)=z\cdot\frac{2}{z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y=z \\ 9+3\frac{x}{y}+6\frac{y}{x}+2=2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y=z \\ \frac{x}{y}+2\frac{y}{x}+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y=z \\ x^2+3xy+2y^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y=z \\ (x+2y)(x+y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-2y \\ -4y=z \end{cases} \quad ① \\ \begin{cases} x=-y \\ z=-y \end{cases} \quad ② \end{array}\right.$$

Разберем два случая:

① Пусть $\begin{cases} x=-2y \\ z=-4y \end{cases}$. Тогда $\frac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6y^2}=\frac{3\cdot4y^2-4y^2-4^2y^2}{4y^2-6y^2}=$

$=\frac{-16y^2+12y^2-4y^2}{-2y^2}=\frac{-8y^2}{-2y^2}=4$

② Пусть $\begin{cases} x=-y \\ z=-y \end{cases}$. Тогда $\frac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6y^2}=\frac{3y^2-4y^2-y^2}{y^2-6y^2}=$

$=\frac{-2y^2}{-5y^2}=\frac{2}{5}$

$\frac{2}{5}<4$. Значит наибольшие возможное значении выражения $\frac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6y^2}$ равно 4

Ответ: 4

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Решение:

Пусть расстояние между пунктами A и B равно S(км), $v_м$(км/ч) - скорость мотоциклиста, $v_в$(км/ч) - скорость велосипедиста

По условию,

$$\begin{cases} \frac{S}{v_в} - \frac{S}{v_м} = 2 \\ v_м \cdot \frac{S}{v_в} - v_в \cdot \frac{S}{v_м} = 96 \\ \frac{S}{v_в+6} - \frac{S}{v_м+6} = 1\frac{15}{60} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S\left(\frac{v_м - v_в}{v_м v_в}\right) = 2 \quad (1) \\ S\left(\frac{v_м^2 - v_в^2}{v_м v_в}\right) = 96 \quad (2) \\ S\left(\frac{v_м - v_в}{(v_в+6)(v_м+6)}\right) = \frac{5}{4} \quad (3) \end{cases} \xRightarrow[(1):(3)]{(2):(1)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S\frac{v_м - v_в}{v_м v_в} = 2 \\ \frac{(v_м - v_в)(v_м + v_в)}{v_м - v_в} = 48 \\ \frac{(v_в+6)(v_м+6)}{v_м v_в} = \frac{8}{5} \end{cases} \xRightarrow{\text{т.к. } v_м \neq v_в} \begin{cases} S = \frac{2 v_м v_в}{v_м - v_в} \\ v_м + v_в = 48 \\ \frac{v_м v_в + 6v_в + 6v_м + 36}{v_м v_в} = \frac{8}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S = \frac{2 v_м v_в}{v_м - v_в} \\ 1 + \frac{6\cdot 48 + 36}{v_м \cdot v_в} = \frac{8}{5} \quad (4) \\ v_м + v_в = 48 \end{cases}$$

Решим (4): $\frac{36 \cdot 9}{v_м \cdot v_в} = \frac{3}{5} \;\Big|:3 \Rightarrow \frac{36\cdot 3}{v_м \cdot v_в} = \frac{1}{5} \Rightarrow v_м \cdot v_в = 36 \cdot 3 \cdot 5$

Вернёмся к системе:

$$\begin{cases} S = \frac{2 v_м v_в}{v_м - v_в} \\ v_м + v_в = 48 \quad (5) \\ v_м v_в = 36 \cdot 15 \quad (6) \end{cases} \xRightarrow{(5)^2 - 4\cdot(6)} \begin{cases} S = \frac{2 v_м v_в}{v_м - v_в} \\ v_м v_в = 36 \cdot 15 \\ v_м^2 + 2v_м v_в + v_в^2 - 4v_м v_в = 48^2 - 4 \cdot 36 \cdot 15 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S = \frac{2 v_м v_в}{v_м - v_в} \\ (v_м - v_в)^2 = 36 \cdot 4 \\ v_м v_в = 36 \cdot 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S = \frac{2 v_м v_в}{v_м - v_в} \\ v_м - v_в = 12 \\ v_м v_в = 36 \cdot 15 \end{cases} \Rightarrow S = \frac{2 \cdot 36 \cdot 15}{12} \Rightarrow S = 90 \text{ (км)}$$

Ответ: 90 км

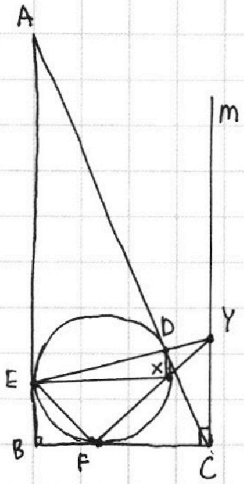
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Решение:



Пусть m - прямая такая, что $C \in m$ и $m \perp BC$

$\angle EAD = \angle DCY$, как накрест-лежащие при параллельных прямых AB и m и секущей AC

$\angle ADE = \angle CDY$, как вертикальные

$\triangle ADE \sim \triangle CDY$ по двум углам $\Rightarrow \dfrac{AD}{DC} = \dfrac{ED}{DY}$

$\angle DFX = \angle DEX$, т.к. вписанные и опираются на DX

$\angle EYF$ - общий для $\triangle FDY$ и $\triangle EXY$

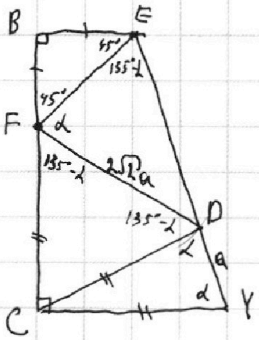
$\triangle FDY \sim \triangle EXY$ по двум углам $\Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{FD}{EX} = \dfrac{DY}{XY} \Rightarrow \dfrac{XY}{EX} = \dfrac{DY}{FD} \Rightarrow \dfrac{DY}{FD} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{XY}{EX}$ по усл.

$AE = AD$ как отрезки касательных к ω $\Rightarrow DC = CY$, т.к. $\triangle ADE \sim \triangle CDY$

$FC = CD$ как отр. касат. к $\omega \Rightarrow CF = CD = CY$.

$BF = BE$ как отр. касат. к ω



Пусть $DY = a$. Тогда $FD = 2\sqrt{2}a$ (по ранее доказанному)

$\triangle BFE$ - прямоуг. и равнобедр. $\Rightarrow \angle BFE = \angle BEF = 45°$

Пусть $\angle CDY = \alpha$. Тогда $\angle CYD = \alpha$ по признаку р/б $\triangle DCY$

$\angle DCY = 180° - 2\alpha \Rightarrow \angle FCD = 90° - 180° + 2\alpha = 2\alpha - 90° \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CFD = \angle CDF = \frac{1}{2}(180° - 2\alpha + 90°) = 135° - \alpha$

(признак р/б $\triangle FCD$)

$\angle EFD = 180° - 45° - 135° + \alpha = \alpha$

$\angle FED = \angle BED - 45° = (180° - \angle CYE) - 45°$, т.к. $BE \parallel CY$

$\angle FED = 135° - \alpha$

По теореме синусов, $\dfrac{ED}{\sin\alpha} = \dfrac{2\sqrt{2}a}{\sin(135°-\alpha)} = \dfrac{2\sqrt{2}a}{\sin(45°+\alpha)}$; - для $\triangle FED$ (1)

$\triangle CDY$: $\dfrac{a}{\sin\angle DCY} = \dfrac{CD}{\sin\angle CYD} \Rightarrow \dfrac{a}{\sin(180°-2\alpha)} = \dfrac{CD}{\sin\alpha} \Rightarrow \dfrac{a}{\sin 2\alpha} = \dfrac{CD}{\sin\alpha}$ (2)

$\triangle FCD$: $\dfrac{2\sqrt{2}a}{\sin(2\alpha-90°)} = \dfrac{CD}{\sin(135°-\alpha)} = \dfrac{CD}{\sin(45°+\alpha)}$ (3)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$(2) = \quad CD = a\dfrac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha}$

$(2) \to (3): \quad \cancel{\dfrac{2\sqrt{2}a}{\cos 2\alpha}} \quad \cancel{\dfrac{2\sqrt{2}a}{\cos(180^\circ-2\alpha)}} \cancel{=} \cancel{\dfrac{CD}{\sin(45^\circ+\alpha)}} \cancel{=} \cancel{\dfrac{a\sin\alpha}{\sin 2\alpha\cdot\sin(45^\circ+\alpha)}}$

$$\frac{2\sqrt{2}a}{\sin 2(\alpha-45^\circ)} = \frac{a\sin\alpha}{\sin 2\alpha\sin(45^\circ+\alpha)} \Rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{2\sin(\alpha-45)\cos(\alpha-45)} = \frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha\sin(45^\circ+\alpha)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\sin(45^\circ+\alpha)} = \frac{2\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sin\alpha\cos\alpha}{2\cdot\sin(\alpha-45^\circ)\cos(\alpha-45^\circ)}$$

Значит, $ED = 2\sqrt{2}a\cdot 2\sqrt{2}\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin(\alpha-45^\circ)\cos(\alpha-45^\circ)}$

$$\frac{AD}{DC} = \frac{ED}{DY} = 8$$

Ответ: 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$ab \vdots 3^{11}7^{11}$

$bc \vdots 3^{18}7^{16}$

$ac \vdots 3^{21}7^{38}$

$a = a' 3^{\alpha_1}7^{\alpha_2}$

$c = c' 3^{\gamma_1}7^{\gamma_2}$

$b = b' 3^{\beta_1}7^{\beta_2}$

$a'c' 3^{\alpha_1+\gamma_1} 7^{\alpha_2+\gamma_2} \vdots 3^{21}7^{38}$

$abc = a'c'b' 3^{\alpha_1+\beta_1+\gamma_1} \cdot 7^{\alpha_2+\beta_2+\gamma_2}$

$3^{25} \cdot 7^{33}$

$a = 3 \quad 7$

$b = 3 \quad 7$

$c = 3 \quad 7$

$\alpha_1 + \gamma_1 \geq 21$

$\alpha_2 + \gamma_2 \geq 38$

$\alpha_1 + \beta_1 \geq 11$

$\alpha_2 + \beta_2 \geq 11$

$\beta_1 + \gamma_1 \geq 18$

$\beta_2 + \gamma_2 \geq 26$

$2(\alpha_1 + \gamma_1 + \beta_1) \geq 50 \Rightarrow \alpha_1 + \gamma_1 + \beta_1 \geq 25$

$2(\alpha_2 + \gamma_2 + \beta_2) \geq 65 \quad \alpha_2 + \gamma_2 + \beta_2 \geq 33$

$38 + 11 + 16 = 49 + 16 = 65$

$\alpha_2 + \gamma_2 \geq 38$

$\alpha_2 + \gamma_2 + \beta_2 \geq 27$

$a^2 - 8ab + 16b^2 - 15b^2$

$(a-4b)^2 - 15b^2 \vdots m$

$a+b \vdots m$

$ab \vdots m$

$10ab \vdots m$

$a^2 - 8ab + b^2 \vdots m$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab - b^2$

$10ab \vdots m$

$\dfrac{a+b}{a^2-8ab+b^2}$

$a+b \vdots m \Rightarrow a^2 + ab \vdots m$

$a^2 - 8ab + b^2 \vdots m \quad ab + b^2 \vdots m$

$b^2 - 9ab \vdots m$

$b(b-9a) \vdots m$

$a(a-9b) \vdots m$

$a^2 - b^2 \vdots m$

$3x + 2y = z$

$\dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{2}{z} \Rightarrow 3yz + xz = 2xy$

$\dfrac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} = 3x^2 - 18y^2 z +$

$a^2 - 8ab + b^2$

$D/4 = 16b^2 - b^2 = 15b^2$

$a + b \vdots m$

$a^2 - 8ab + b^2 \vdots m$

$(a^2 - b)^2 - 6ab \vdots m$

$6ab \vdots m$

$10ab \vdots m$

$4ab \vdots m$

$2ab \vdots m$

$a = \dfrac{4b \pm b\sqrt{15}}{}$

$\frac{17}{2} \cdot 4$

$(a, b) = 1$

$a+b \vdots m$

$a+b \vdots m$

$a^2 - 8ab + b^2 \vdots m$

$a^2 - b^2 \vdots m$

~~a+b~~

$a^2 + b^2 - 8ab -$

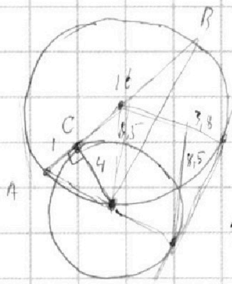
$- 4a + 4b$

$\cancel{(a-8-b)^2 = a^2 + b^2}$

$(2a - 2b + 1)^2 = a^2 + b^2 - 8ab + 4a - 4b$

$2a - 2b + 1 \vdots m$

$\sqrt{7{,}5 \cdot 4}$

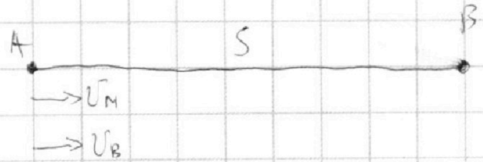


$6 \cdot 6 \cdot 8 = 36 \cdot 8$

$36 \cdot 9$

$\dfrac{2 \cdot 36 \cdot 15}{12} = 15 \cdot 6$

$v_M + v_B = \dfrac{1}{48}$



$-\dfrac{S}{v_M} + \dfrac{S}{v_B} = 2\tau$

$S\left(\dfrac{v_B - v_a}{v_M v_B}\right) = 2\tau$

$-\dfrac{S}{v_M} v_B + \dfrac{S}{v_B} v_M = 96$

$6^2 \cdot 8^2 = 36 \cdot 64 - 4 \cdot 36 \cdot 15 =$

$= 36(64 - 60)$

$S\left(\dfrac{v_M}{v_B} - \dfrac{v_B}{v_M}\right) = 96 \quad S\left(\dfrac{(v_M - v_B)(v_M + v_B)}{v_M v_B}\right) = 96$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1 $a,b,c \in \mathbb{N}$

№2 $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$, некрат.

№3 под корнем ≥ 0, замена, множители

№4

№5 $x,y,z \in \mathbb{R}$, $x,y,z \neq 0$, $x^2-6y^2 \neq 0$

$\sqrt{2x^2-3x+4} - \sqrt{2x^2+x+3} = 1-4x$

$D = 9-24 \cdot 4 < 0$

$2(x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}-\frac{9}{16})+4 = 2(x^2-\frac{3}{4})^2 - 1\frac{1}{8}+4$

$2(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}-\frac{1}{16})$

$4x^2-2x+7-2\sqrt{4x^4-4x^3+11x^2-5x+12} = 1+16x^2-8x$

$6x-12x^2+6 = 2\sqrt{4x^4-4x^3+11x^2-5x+12}$

~~$36x^2+144x^4+36-144x^3+72x-144x^2$~~

$6(-2x^2+x+1) = 2\sqrt{\ldots}$

$3(x-2x^2+1) = \sqrt{\ldots}$

$9(x^2+4x^4+1-4x^3+2x-4x^2) = 4x^4-4x^3+11x^2-5x+12$

$36x^4-36x^3-27x^2+18x+9 = 4x^4-4x^3+11x^2-5x+12$

$32x^4-32x^3-38x^2+23x-3=0$

	32	-32	-38	23	-3
3	32	64	154		
$\frac{1}{2}$	32	-16	-46	-46/-12	
$-\frac{1}{2}$	32	-48	-14	30	
$\frac{1}{4}$	32	-24	-50		
$-\frac{1}{4}$	32	-40	-28	30	

96-32
192-38
-32+16

$(2x^2-3x+4)(2x^2+x+3) =$

$= 4x^4+2x^3+6x^2-6x^3-3x^2-9x+$

$+8x^2+4x+12 =$

$= 4x^4-4x^3+11x^2-5x+12$

$\sqrt{2x^2-3x+4} - \sqrt{2x^2+x+3} = 1-4x$

$2x^2-8x+3x+4 \quad 2x^2-8x+9x+3$

$11x^2-8x+1$

$22 \cdot 3 \cdot 4 = 11 \cdot 2 \cdot 12$

$66 \cdot 4 = 264$

$ab : 3^{11}7^{11}$

$bc : 3^{18}7^{16}$

$ac : 3^{21}7^{38}$

$\frac{b}{c} = \frac{x}{z} \frac{1}{3^{10}7^{12}}$

$ab = x\, 3^{11}7^{11}$

$bc = y\, 3^{18}7^{16}$

$ac = z\, 3^{21}7^{28}$

$b^2 = \frac{x}{z} y \frac{3^8}{7}$

$a = 3^{20}$

$b = 7$

$c = 3^{18}$

$a^2 + 2ab + b^2$

$a = 3^{3}7^{19}$

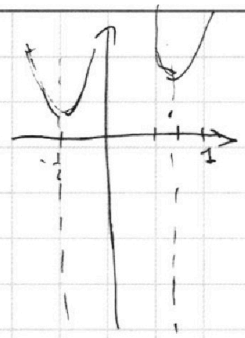
$b = 3^{8}7^{0}$

$c = 3^{18}7^{16}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
X	X	X	X	X	X	X

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+3\frac{7}{8}$

$2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+2\frac{7}{8}$

$a=2x^2-3x+4$

$b=2x^2+x+3$

$a-b=1-4x$

$4x^2-2x+7-1=-2\sqrt{ab}$

$a+b-1+2\sqrt{ab}=0$

$4ab=1+a^2+b^2-2a-2b+2ab$

$a^2+b^2+1-2a-2b+2ab=4ab$

$a^2-2a+1+b^2-2b+1-2ab-1$

$a^2+b^2-2ab+1-2(a+b)$

$(a-b)^2-2(a+b)+1=0$

$-2a-2b-2ab=2b(a+1)-2a-2+3$

$a+b-2\sqrt{ab}=a-b$

$2b=2\sqrt{ab}$

$b=\sqrt{ab}$

$\sqrt{a}+\sqrt{b}=1$

$4x^2-2x+\cancel{7}-8=$

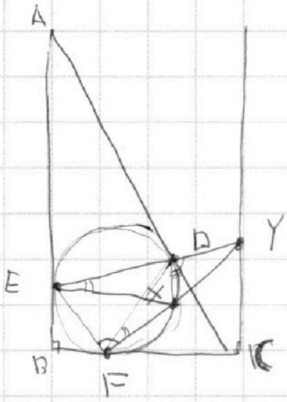
$2x^2-x+3=-\sqrt{ab}$

$4x^4+x^2+9-4x^3-12x^2-6x=4x^4-4x^3+11x^2-5x+12$

$22x^2+x+3=0$

$D=1-$

$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2}$



$\frac{XY}{EY}=\frac{YD}{YF}$

$a+b\,\vdots\,m$

$a^2-8ab+16b^2-15b^2=(a-4b)^2-15b^2\,\vdots\,m$

$a^2-b^2\,\vdots\,m$

$15a^2-15b^2\,\vdots\,m$

$16a^2-8ab+16b^2$

$8(4a^2-2ab+4b^2)\,\vdots\,m$

$8($

НОД $(a^2-8ab+b^2,\ a+b)$

$(a^2-8ab+b^2,\ a+b)=(a^2-8ab+b^2,$

$a^2+ab)=(b^2-9ab,\ a^2+ab)=$

$=(\cancel{-10a}\ \cancel{-10ab})\ (a+b,\ +10ab)$

$(a^2-8ab+b^2,\ a+b)=(b^2-9ab,\ a+b)=$

$(10ab,\ a+b)$ 10

$(a,b)=1$

38, 3 14

$38-28=10$

14

$10(a(1-b)-(1-b))\underset{m}{\equiv}-10$

$10(a-1)(b-1)\underset{m}{\equiv}10$

$10((a-1)(b-1)-1)\underset{m}{\equiv}0$

$a+b\underset{m}{\equiv}10ab\underset{m}{\equiv}0$

$10a+10b-10ab\underset{m}{\equiv}0$

$10a+10b-10ab-10\underset{m}{\equiv}-10$ $\cancel{a+b-10ab\underset{m}{\equiv}0}$

$10a(1-b)-10$

$10ab-10a-10b=10a(b-1)-10b+10\underset{m}{\equiv}10$

$a+b-10ab\underset{m}{\equiv}0$

$(a-1)(b-1)\equiv$ $\cancel{(10a-10)}$

$a(1-10b)$

$10(a-1)(b-1)\underset{m}{\equiv}10$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
X	X	X	X	X	X	X

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$3x+2y=z$

$\frac{3}{x}+\frac{1}{y}=\frac{9}{z}$

$9+2+\frac{3x}{y}+\frac{6y}{x}=9$

$\frac{x}{y}+\frac{2y}{x}=-3$

$x^2+2y^2=-3xy$

$x^2+3xy+2y^2=0$

$D=9-8=1$

$(x-2y)(x-y)=0$

$\sin(135-\alpha)$ 90

$\sin 2(\alpha-45^\circ)$

$\underline{3x^2-4y^2-z^2}$

$(a+b,\ +10ab)=(a+b,\ 10((a-1)(b-1)-1))$

$(a,b)=1$

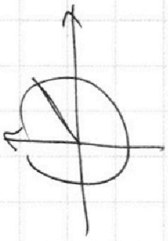
$10ab-10a-10b=10a(b-1)-10b+10-10$

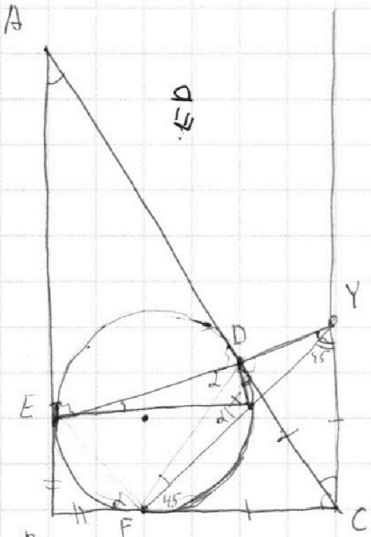
$10(a-1)(b-1)-10$

$10((a-1)(b-1)-1)\ \vdots\ m$

$10(a-1)(b-1)-1=m$

9 270 180 $90^\circ-2\alpha+90^\circ$ $180^\circ-2\alpha+90^\circ$ $90^\circ-2\alpha+90^\circ$





$\frac{2\sqrt{2}}{\sin(45+\alpha)}=\frac{x}{\sin\alpha}$

$\frac{a}{\sin 2\alpha}=\frac{b}{\sin\alpha}=$

$\frac{b}{\sin 45+\alpha}=\frac{2\sqrt{2}a}{\sin 2\alpha}$

$\frac{2\sqrt{2}}{a\sin\alpha}=\frac{\sin 1}{\sin(45+\alpha)}$

$\frac{ED}{\sin\alpha}=\frac{2\sqrt{2}a}{\sin(45+\alpha)}$

$\cos(180^\circ-2\alpha)$

$-\cos 2\alpha$

ED

$\frac{DY}{FY}=\frac{XY}{EY}$

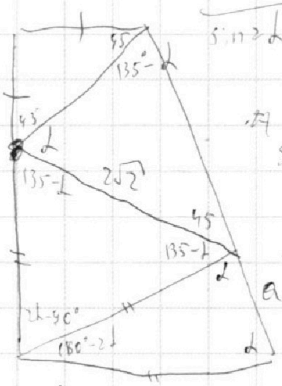
$DY+ED$

$\frac{AD}{DC}=\frac{ED}{DY}$

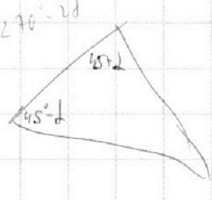
$\frac{EX}{FD}$ $\frac{EY}{XY}$

$\frac{EX}{FD}=\frac{XY}{DY}$

$\frac{FD}{DY}=2\sqrt{2}$



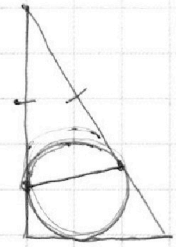
180° $270^\circ-2\alpha$



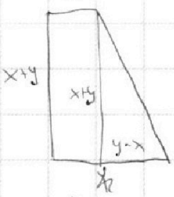
180° 45 $135^\circ-\alpha$

$\frac{CD}{\sin(45^\circ+\alpha)}=\frac{2\sqrt{2}a}{\sin(2\alpha-90^\circ)}$

$\frac{CD}{\sin\alpha}=\frac{a}{\sin 2\alpha}$

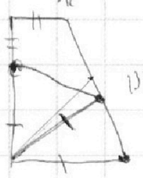


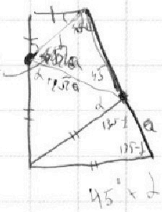
$\frac{YD}{YE}$



$x^2+y^2+x^2+y^2$

$2x^2+2y^2$





$180^\circ-2\alpha$

$90^\circ-180^\circ+2\alpha$

$2\alpha-90^\circ$

$180^\circ-$

$270^\circ-2\alpha$

$135-\alpha$

$\frac{a}{\sin 2\alpha}=\frac{CD}{\sin\alpha}=\frac{2\sqrt{2}a\sin(45+\alpha)}{\cos 2\alpha\sin\alpha}$

$\frac{CD}{\sin(45^\circ+\alpha)}=\frac{2\sqrt{2}a}{\cos 2\alpha}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ