



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 13



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $3^{11}7^{11}$, bc делится на $3^{18}7^{16}$, ac делится на $3^{21}7^{38}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-3x+4}-\sqrt{2x^2+x+3}=1-4x.$$

4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC=1$ и $BC=16$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам

$$3x+2y=z \quad \text{и} \quad \frac{3}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z}.$$

Найдите наибольшее возможное значение выражения $\frac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6y^2}$.

6. [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 2 часа раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от A к B , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 96 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 6 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 1 час 15 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между A и B .

7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA, AB, BC в точках D, E, F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC , проходящую через вершину C , в точке Y ; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω . Известно, что $EX=2\sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD:DC$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1

Пусть k - наибольшая степень тройки, на которую делится a , l - наибольшая степень тройки, на которую делится b , m - наибольшая степень тройки, на которую делится c ($a = 3^k \cdot k_1$, $b = 3^l \cdot l_1$, $c = 3^m \cdot m_1$, где $k_1, l_1, m_1 \in \mathbb{N}$ и $k_1 \not\equiv 0 \pmod{3}$, $l_1 \not\equiv 0 \pmod{3}$, $m_1 \not\equiv 0 \pmod{3}$)

Если ab делится на 3^n , то $k+l \geq n$, если bc делится на 3^n то $l+m \geq n$, если ac делится на 3^n , то $k+m \geq n$

Вставим систему неравенств

$$\begin{cases} k+l \geq 11 \\ l+m \geq 18 \\ k+m \geq 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k+l+m \geq 50 \\ l+m \geq 18 \\ k+m \geq 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k+l+m \geq 25 \\ l+m \geq 18 \\ k+m \geq 21 \end{cases}$$

Выводим, что так как $k+l+m \geq 25$, то наименьшая степень тройки, на которую делится число abc равно 25

Выводим, что так как число ac делится на 4^{38} , то число abc тоже будет делиться на 4^{38}

Выводим, так как $abc : 3^{25}$ и $abc : 4^{38}$ и $\text{НОД}(3, 4) = 1$, то наименьшее значение abc равно $3^{25} \cdot 4^{38}$

Пример для $abc = 3^{25} \cdot 4^{38}$

$$a = 4^{11} \cdot 3^7, \quad b = 3^1, \quad c = 4^{24} \cdot 3^{14} \quad \text{тогда}$$
$$ab = 4^{11} \cdot 3^{11}, \quad bc = 4^{24} \cdot 3^{15}, \quad ac = 4^{35} \cdot 3^{21}$$
$$abc = 3^{25} \cdot 4^{38}$$

Ответ: наименьшее значение abc равно $3^{25} \cdot 4^{38}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

МФТИ

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть m - наибольшее натуральное число такое, что делитель и знаменатель дроби $\frac{a+b}{a^2 - 2ab + b^2}$ можно сократить на m , то есть $a+b : m$ и $a^2 - 2ab + b^2 : m$

$$a+b : m \Leftrightarrow (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 : m$$

$$\begin{cases} a^2 + 2ab + b^2 : m \\ a^2 - 2ab + b^2 : m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2ab + b^2 : m \\ 10ab : m \end{cases}$$

Получается, что $a+b : m$ и $10ab : m$

Пусть p - ^{наименьший} простой делитель числа m (p может быть равен m) (если $m=1$, то $p=1$)

$10ab : m \Leftrightarrow 10ab : p$, так как p простой и $10ab : p$, то верно следующие:

$$\begin{cases} 10 : p \\ a : p \\ b : p \end{cases}$$

~~Итак, мы имеем~~

$$a+b : m \Leftrightarrow a+b : p$$

~~Сумма, что есть $a : p$ и $b : p$~~

Рассмотрю три случая \otimes

1. $a : p$

$$\begin{cases} a : p \\ ab : p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a : p \\ b : p \end{cases}$$

но так как $\text{НОД}(a,b)=1$ (так как дроби $\frac{a}{b}$ несократимы),
если $a : p$ и $b : p$ и $\text{НОД}(a,b)=1$, то $p=1 \Rightarrow m=1$

2. $b : p$

$$\begin{cases} b : p \\ a+b : p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a : p \\ b : p \end{cases}$$

но так как $\text{НОД}(a,b)=1$, если $a : p$ и $b : p$ и $\text{НОД}(a,b)=1$,
то $p=1 \Rightarrow m=1$

3. $10 : p$

$$10 : p \Leftrightarrow \begin{cases} p=1 \\ p=2 \\ p=5 \end{cases}$$

Сумму, что получается если верно все простые делители числа $m \Rightarrow$ если $m > 1$, то $m = 2^k \cdot 5^l$, где $k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Рассмотрю, что (то есть для любого простого p , делителя числа m , верно, что $10 : p \Rightarrow \begin{cases} p=2 \\ p=5 \end{cases}$)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2 (предположим)

$$m = 2^k \cdot 5^l, \text{ предположим, что } k \leq 1, l \leq 1$$

Предположим, что $k > 1$ или $l > 1$, тогда $m: 2^2$ или $m: 5^2$,
так как $10 \nmid ab: m$, то или $m: 2^2$ или $m: 5^2$, то

$$ab: 2 \text{ или } ab: 5 \text{ (так как } 10 = 2 \cdot 5) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a: 2 \text{ или } b: 2) \text{ или } (a: 5 \text{ или } b: 5) \Rightarrow \text{так как } 10 \nmid ab$$

~~предположим, что $k > 1$ и $l > 1$, тогда $m: 2^2 \cdot 5^2$, то $ab: 2 \cdot 5 = 10$, так как $10 \mid ab$, то $m: 10$, так как $10 \nmid ab$, то $m: 1$~~

~~или $k > 1$ и $l = 1$, тогда $m: 2^2 \cdot 5$, то $ab: 2 \cdot 5 = 10$, так как $10 \mid ab$, то $m: 10$, так как $10 \nmid ab$, то $m: 1$~~

~~или $k = 1$ и $l > 1$, тогда $m: 2 \cdot 5^2$, то $ab: 2 \cdot 5 = 10$, так как $10 \mid ab$, то $m: 10$, так как $10 \nmid ab$, то $m: 1$~~

~~или $k > 1$ и $l = 0$, тогда $m: 2^2$, то $ab: 2$, так как $2 \nmid ab$, то $m: 1$~~

или $m: 5$, то $a: 5$ или $b: 5$ \oplus , так как $a \cdot b: m$,

то то как 4-й случай получится, что $(a: 2 \text{ и } b: 2)$

или $(a: 5 \text{ и } b: 5)$, но $\text{НОД}(a, b) = 1 = 1$ противоречие \Rightarrow

$$\Rightarrow k \leq 1 \text{ и } l \leq 1 \Rightarrow \text{максимальное } m \text{ равно } 2 \cdot 5 = 10$$

пример для $m = 10$

$$a = 5, b = 2$$

$$a^2 - 8ab + b^2 = 5^2 - 8 \cdot 5 \cdot 2 + 2^2 = 25 - 80 + 4 = -51$$

$$= 5^2 + 2^2 - 8 \cdot 3 \cdot 2 = 25 + 4 - 48 = 29 - 48 = -19$$

уравнение $a^2 - 8ab + b^2 = \frac{10}{110}$ можно сократить на $10 = m$

\oplus случай, когда a или b равны нулю противоречит условию числа m мы уже рассмотрели

Ответ: при $m = 10$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



5

$$\sqrt{2x^2-3x+4} - \sqrt{2x^2+x+3} = 1-4x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2x^2-3x+4) + (2x^2+x+3) - 2\sqrt{(2x^2-3x+4)(2x^2+x+3)} = 1+6x^2-8x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (4x^2-2x+7) - (1+6x^2-8x) = 2\sqrt{(2x^2-3x+4)(2x^2+x+3)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x^2+6x+6 = 2\sqrt{(2x^2-3x+4)(2x^2+x+3)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x^2+3x+3 = \sqrt{(2x^2-3x+4)(2x^2+x+3)} *$$

$$* (2x^2-3x+4)(2x^2+x+3) = 4x^4-6x^3+8x^2+2x^3-3x^2+4x+6x^2-9x+12 =$$
$$= 4x^4-4x^3+11x^2-5x+12$$

$$\cancel{-2x^2+x+7 = \sqrt{4x^4-4x^3+11x^2-5x+12} \Rightarrow 4x^4+x^2+1-4x^3+2x-4x^2 =}$$

$$\cancel{= 4x^4-4x^3+11x^2-5x+12 \Rightarrow -5x^2+2x+1 = 11x^2-5x+12 \Rightarrow}$$

$$\Rightarrow 11x^2-4x+11 = 0$$

$$-6x^2+3x+3 = \sqrt{4x^4-4x^3+11x^2-5x+12} \Rightarrow 36x^4+9x^2+9-36x^3-36x^2+18x =$$
$$= 36x^4-36x^3-27x^2+18x+9 = 4x^4-4x^3+11x^2-5x+12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 32x^4-32x^3-36x^2+23x-3 = 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

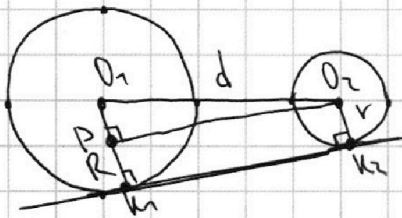
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

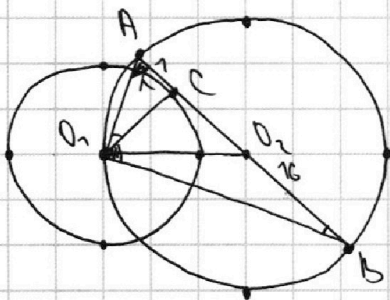


4



найти формулу для длины
общей внешней касательной
двух окружностей

пусть O_1, O_2 - центры данных окружностей, d - расстояние
между центрами, R и r - радиусы этих окружностей,
проведем перпендикуляр O_1P к O_2k_2 , тогда $PO_2k_2k_1$ -
прямоугольник $\Rightarrow PO_2 = k_1k_2$, $PO_2^2 = O_1O_2^2 - O_1P^2 =$
 $= d^2 - (R-r)^2$ (по ТП теорема Пифагора)



Дано:

$$AC = 1$$

$$BC = 16$$

Найти:

длину общей
касательной

Решение:

~~Пусть $\angle A O_1 B = 90^\circ$, так как~~
~~AB - диаметр, $\angle O_1 C A = 90^\circ$, так как~~
~~AB - касательная, C - точка касания,~~
 пусть $\angle B A O_1 = \alpha$ тогда $\angle A O_1 C = 90 - \alpha$,
 $\angle C O_1 B = \alpha$, $\angle C B O_1 = 90 - \alpha$
 ~~$\sin 90 - \alpha = \frac{O_1 A}{A B} = \frac{A C}{O_1 A} \Rightarrow O_1 A^2 = A B \cdot A C =$~~
 $= 1 \cdot (1 + 16) = 17$
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{O_1 C}{A C} = \operatorname{ctg} 90 - \alpha = \frac{O_1 B}{O_1 C} \Rightarrow$
 $\Rightarrow O_1 C^2 = A C \cdot C B = 1 \cdot 16 = 16$
 $\sin \alpha = \frac{O_1 B}{A B} = \frac{B C}{O_1 B} \Rightarrow O_1 B^2 = A B \cdot B C =$
 $= 16 \cdot (1 + 16) = 16 \cdot 17 = 272$

найдем, что $O_1 O_2$ - медиана $\triangle O_1 A B$ (т.к. AB - диаметр, и
 O_2 - центр) $\Rightarrow O_1 O_2 = \frac{A B}{2}$ (по теореме о медиане прямо \triangle) $\Rightarrow O_1 O_2^2 = \frac{A B^2}{4} =$
 $= \frac{17}{4}$

Найдем, что радиус ω равен $O_1 C = 4$, радиус Ω
 равен $\frac{A B}{2} = \frac{17}{2}$, расстояние между центрами $O_1 O_2$ равно $\frac{17}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



4 (продолжение)

длина общей касательной равна

$$\sqrt{\frac{172}{4} - \left(\frac{17}{2} - 4\right)^2} = \sqrt{\frac{172}{4} - \left(\frac{9}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{172 - 81}{4}} =$$
$$= \sqrt{\frac{(17-9)(17+9)}{4}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 26}{4}} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

Ответ: длина общей касательной равна $2\sqrt{13}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5

по условию $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$

$$\begin{cases} 3x+2y=z \\ \frac{3}{x}+\frac{2}{y}=\frac{z}{z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y=z \\ 3yz+2xz=2xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y=z \\ z=\frac{2xy}{3y+x} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3y+x \neq 0 \\ 3x+2y=\frac{2xy}{3y+x} \\ 3x+2y=z \end{cases}$$

$$3x+2y=\frac{2xy}{3y+x} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y+x \neq 0 \\ (3y+x)(3x+2y)=2xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y+x \neq 0 \\ 3x^2+6y^2+9xy=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3y+x \neq 0 \\ x^2+2y^2+3xy=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y+x=0 \\ (x+2y)(x+y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x+2y=0 \end{cases}$$

$$3x+2y=z \Leftrightarrow z^2 = 9x^2 + 4y^2 + 12xy$$

$$\frac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6y^2} = \frac{3x^2-4y^2-(9x^2+4y^2+12xy)}{x^2-6y^2} = \frac{-6x^2-8y^2-12xy}{x^2-6y^2}$$

расширяю оба вычитателя

1. $x+y=0$

$$x+y=0 \Leftrightarrow y=-x$$

$$\frac{-6x^2-8y^2-12xy}{x^2-6y^2} = \frac{-6x^2-8(-x)^2-12x(-x)}{x^2-6(-x)^2} = \frac{-6x^2-8x^2+12x^2}{x^2-6x^2} = \frac{-2x^2}{-5x^2} = \frac{2}{5}$$

2. $x+2y=0 \Leftrightarrow x=-2y$

$$\frac{-6x^2-8y^2-12xy}{x^2-6y^2} = \frac{-6(-2y)^2-8y^2-12(-2y)y}{(-2y)^2-6y^2} = \frac{-24y^2-8y^2+24y^2}{4y^2-6y^2} =$$

$$= \frac{-8y^2}{-2y^2} = 4$$

$4 > \frac{2}{5} \Rightarrow$ наибольшее значение $\frac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6y^2}$ равно 4

пример

$$y=1, x=-2, z=-4, 3x+2y=-6+2=-4=z, \frac{3}{x}+\frac{2}{y}=\frac{3}{-2}+1=-\frac{1}{2}=\frac{z}{z}$$

$$\frac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6y^2} = \frac{12-4-16}{4-6} = \frac{-8}{-2} = 4$$

Ответ: ~~5~~ 4

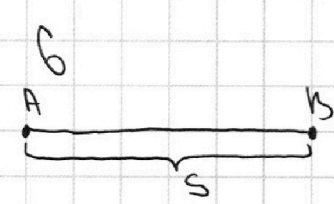
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



пусть v_1 - скорость ~~мотоциклета~~ ^{велосипеда}
 v_2 - скорость мотоциклета,
 S - расстояние между A и B

время t_1 , которое потребуется велосипеду на путь от A до B равно $\frac{S}{v_1}$, и мотоциклет $\frac{S}{v_2}$ составило систему уравнений по условию

$$\begin{cases} v_1 = 2 + v_2 & (1) \\ v_1 v_2 + 96 = v_2 v_1 & (2) \\ \frac{S}{v_1 + 6} = \frac{S}{4} + \frac{S}{v_2 + 6} & (3) \end{cases}$$

(1): $v_1 = 2 + v_2 \Rightarrow S v_2 = 2 v_1 v_2 + S v_1 \Rightarrow 2 v_1 v_2 = S v_2 - S v_1 \quad (5)$
 (3): $\frac{S}{v_1 + 6} = \frac{S}{4} + \frac{S}{v_2 + 6} \Rightarrow S(v_2 + 6) = \frac{S}{4}(v_1 + 6)(v_2 + 6) + S(v_1 + 6) \Rightarrow$
 $\Rightarrow S v_2 + 6S = S v_1 + 6S + \frac{S}{4}(v_2 + 6)(v_1 + 6) \Rightarrow$
 $\Rightarrow S v_2 = S v_1 + \frac{S}{4}(v_2 + 6)(v_1 + 6) \quad (4)$

~~WAAAAAAAAA~~
 (4) - (1): $0 = \frac{S}{4}(v_2 + 6)(v_1 + 6) - 2 v_1 v_2 \Rightarrow 2 v_1 v_2 = \frac{S}{4}(v_2 + 6)(v_1 + 6) \Rightarrow$
 $\Rightarrow 8 v_1 v_2 = S(v_1 + 6)(v_2 + 6) \Rightarrow 3 v_1 v_2 = 180 + 30 v_1 + 30 v_2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 4 v_1 v_2 = 60 + 10 v_1 + 10 v_2 \quad (6)$

(2): $v_1 v_2 + 96 = v_2 v_1 \Rightarrow S v_1^2 + 96 v_1 v_2 = S v_2^2 \Rightarrow 96 v_1 v_2 = S v_2^2 - S v_1^2 \quad (6)$

(5): $\frac{96 v_1 v_2}{2 v_1 v_2} = \frac{S(v_2 - v_1)(v_2 + v_1)}{S(v_2 - v_1)} \Rightarrow 48 = v_2 + v_1 \Rightarrow v_1 = 48 - v_2 \quad (7)$

подставляем (7) в (6): $v_2(48 - v_2) = 60 + 10(v_1 + v_2) = 60 + 10 \cdot 48 = 540 \Rightarrow$
 $\Rightarrow v_2^2 - 48 v_2 + 540 = 0 \Rightarrow \begin{cases} v_2 = 30 \\ v_2 = 18 \end{cases} \text{ (по теореме Виета)}$

так как $v_1 < v_2$, то $v_1 = 18$ (км/ч), $v_2 = 30$ (км/ч)

(5): $2 v_1 v_2 = S(v_2 - v_1)$ км $v_1 = 18, v_2 = 30$, то
 $S = \frac{2 v_1 v_2}{v_2 - v_1} = \frac{2 \cdot 18 \cdot 30}{30 - 18} = \frac{2 \cdot 18 \cdot 30}{12} = 90$ (км)

Искомое расстояние между A и B равно 90 км

Ответ: 90 км

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$32 - 32 - 36 + 23 - 3 \quad 20 \cdot 36 = 62$$

$$32 + 32 - 36 + 23 - 3$$

$$64 - 62$$

$$32 - 32 - 36 \quad 23 - 3$$

$$-2 \quad 32 \quad 32 \quad 28$$

$$322 = 64 \quad 64 - 36 = 28$$

$$64$$

$$28$$

$$3122$$

$$23 - 312 =$$

$$32 - 32 - 36 \quad 23$$

$$-2 \quad 32 \quad -36 \quad 156$$

$$-64 \quad + 90 \cdot 2 = 156$$

$$192 - 36 = 156 \quad = 156$$

$$156$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{2x^2-3x+4} - \sqrt{2x^2+x+3} = 1-4x \quad (*)$$

$$2x^2-3x+4 + 2x^2+x+3 - 2\sqrt{(2x^2-3x+4)(2x^2+x+3)} = 1+16x^2-8x$$

$$4x^2-2x+7 - 2\sqrt{(2x^2-3x+4)(2x^2+x+3)} = 1+16x^2-8x$$

$$2\sqrt{(2x^2-3x+4)(2x^2+x+3)} = -4x+6x+6 - 4x^2+3x+3$$

$$\begin{aligned} (2x^2-3x+4)(2x^2+x+3) &= \frac{3}{8}x^2 - \frac{6}{8}x + \frac{43}{8} \\ &= 4x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 12x^3 - 3x^2 + 4x + 8x^2 - 9x - 12 = \\ &= 4x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 5x - 12 \end{aligned}$$

$$\sqrt{4x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 5x - 12} = 16x^4 + 9x^2 + 9 - 24x^3 - 24x^2 + 18x$$

$$4x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 5x - 12 = 16x^4 + 9x^2 + 9 - 24x^3 - 24x^2 + 18x$$

$$12x^4 - 20x^3 - 16x^2 + 23x - 12 = 0$$

$$12x^4 - 20x^3 - 16x^2 + 23x - 12 = 0$$

$$12 - 20 - 26 + 23 + 12$$

$$\sqrt{2x^2-3x+4} + \sqrt{2x^2+x+3} = (4x^2-2x+4) - 1+16x^2-8x$$

$$(-2x^2+x+1)^2 = 4x^4+x^2+1-4x^3-4x^2+2x$$

$$-2(x+\frac{1}{4})^2$$

$$632 = 3^3 \cdot 9 \cdot 36 = 24^3$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



v_1 - ~~скорость~~ скорость лоскутка
 v_2 - скорость метизушки
 t_1 - время лоскутка, t_2 - время метизушки.

$$\frac{S}{v_1} = \frac{S}{v_2} + t_1 \quad 1,25$$

$$t_1 = 2t_2$$

$$v_1 \cdot t_1 + 9G = v_2 \cdot t_2 \quad \frac{S}{4} (v_1 v_2 + 6v_1 + 6v_2 + 3G)$$

$$\frac{S}{v_1 + G} = \frac{S}{v_2 + G} + 1,25 \quad \frac{5G^2}{42}$$

$$Sv_2 = Sv_1 + 2v_1 v_2$$

$$Sv_2 + 6S = Sv_1 + 6S + 1,25(v_1 + G)(v_2 + G) =$$

$$\Rightarrow Sv_2 = Sv_1 + 45 + \frac{5}{4}v_1 v_2 + \frac{15}{2}v_1 + \frac{15}{2}v_2$$

$$2v_1 v_2 = 45 + \frac{5}{4}v_1 v_2 + \frac{15}{2}v_1 + \frac{15}{2}v_2$$

$$\frac{3}{4}v_1 v_2 = 45 +$$

$$3v_1 v_2 = 180 + 30v_1 + 30v_2$$

$$v_1 v_2 = 60 + 10v_1 + 10v_2$$

$$Sv_2 = Sv_1 + 2v_1 v_2$$

$$\frac{S}{v_1} \cdot v_2 + 9G = \frac{S}{v_2} \cdot v_1$$

$$Sv_1 + 9Gv_1 v_2 = Sv_2$$

$$\frac{S}{v_1} \cdot v_2 = 9G + \frac{S}{v_2} \cdot v_1$$

$$Sv_2^2 = 9G^2 v_1 + Sv_1^2$$

$$Sv_2^2 - Sv_1^2 = 9Gv_1 v_2$$

$$Sv_2 - Sv_1 = 2v_1 v_2$$

$$\frac{S}{v_2 + G} = \frac{S}{v_1 + G}$$

$$v_1(48 - v_1) = 60 + 10(v_1) + 10(48 - v_1)$$

$$48v_1 - v_1^2 = 60 + 10v_1 + 480 - 10v_1$$

$$540 =$$

$$v_1^2 - 48v_1 + 540 = 0$$

$$\begin{array}{r} 540 : 4 = 135 \\ - 52 \cdot 4 = 135 \\ \hline 20 \quad 48 \\ \quad 240 \end{array}$$

$$\frac{v_2 - v_1^2}{v_2 - v_1} = 48$$

$$v_2 \cdot v_1 = 48$$

$$v_1^2 - 12v_1 + 135 = 0$$

$$\begin{array}{r} 135 \\ - 12 \cdot 5 = 135 \\ \hline 5 \quad 24 \cdot 5 \quad 45 \cdot 3 \\ \quad 135 \quad 15 \cdot 9 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{S}{v_1 + 6} = \frac{S}{v_2 + 6} + \frac{5}{4}$$

$$\frac{1136}{190}$$

$$\frac{S}{v_1} = \frac{S}{v_2} + 2$$

$$S(v_2 + 6) = S(v_1 + 6) + \frac{5}{4}(v_1 + 6)(v_2 + 6)$$

$$Sv_2 + 6S = Sv_1 + 6S + \frac{5}{4}(v_1 + 6)(v_2 + 6) \quad | \cdot 4$$

$$4Sv_2 + 24S = 4Sv_1 + 24S + 5(v_1 + 6)(v_2 + 6)$$

$$4Sv_2 - 4Sv_1 = 5(v_1 + 6)(v_2 + 6)$$

$$4S(v_2 - v_1) = 5(v_1v_2 + 6v_1 + 6v_2 + 36)$$

$$3Sv_1v_2 = 180 + 30v_1 + 30v_2 \Leftrightarrow \boxed{v_1v_2 = 60 + 10v_1 + 10v_2}$$

$$\frac{S}{v_1} \cdot v_2 + 9S = v_2 \cdot \frac{S}{v_1}$$

$$48 \cdot 2 = 48 \quad v_2 = 48$$

$$Sv_1^2 + 9Sv_1v_2 = Sv_1^2$$

$$\frac{v_2 - v_1 + v_2 + v_1}{v_2 - v_1}$$

$$9Sv_1v_2 = Sv_1^2 - Sv_1^2$$

$$2v_1v_2 = Sv_2 - Sv_1$$

$$54 \cdot 2 = 27$$

$$48v_1v_2 = v_2 + v_1$$

$$480 + 60 =$$

$$\boxed{v_1 = 48 - v_2}$$

$$540 = 10 \cdot 2 \cdot 27$$

$$4 \cdot 5 \cdot 27$$

$$v_2(48 - v_2) = 60 + 10 \cdot 48$$

$$v_2^2 - 48v_2 + 540 = 0$$

$$3216 = \frac{1540}{2760}$$

$$\frac{36}{2} =$$

$$2v_1v_2 = Sv_2 - Sv_1$$

$$60$$

$$\boxed{18, 30}$$

$$\frac{48 - 12}{2} =$$

$$\frac{90}{24} = \frac{90}{36} + \frac{5}{4}$$

$$2 \cdot 18 \cdot 30 = 5 \cdot 30 - 5 \cdot 18$$

$$50 + 30 = \boxed{90}$$

$$\frac{60}{30} = 21$$

$$4 \cdot 20 : 9$$

$$5 \cdot 8 = 18 \cdot 30$$

$$18 \cdot 5 =$$

$$\frac{45}{12} = \frac{30}{12} + \frac{15}{12}$$

$$\frac{24}{9} = 2 + \frac{40}{9}$$

$$2v_1v_2 = Sv_2 - Sv_1$$

$$4 \cdot 18 = 10 \cdot 2 \cdot 18$$

$$10 \cdot 9$$

$$40$$

$$\frac{40}{18} = 5 \cdot \frac{80}{18} = 2 + \frac{80}{30 + 14}$$

$$\frac{40}{9} = \frac{18 + 24}{9}$$

$$S(30 - 18) = 50$$

$$S \cdot 12 = 2 \cdot 18 \cdot 30$$

$$S \cdot 4 = 2 \cdot 18 \cdot 10$$

$$S = 18 \cdot 5 =$$

$$\frac{136}{30}$$

$$3 \cdot 18 + 46 = 5 \cdot 30 - 30 - 80 = 2 \cdot 18 \cdot 30 + 60 \cdot 18$$

$$150 = 96 + 54$$

$$60 \cdot 12 = 2 \cdot 18 \cdot 30$$

$$80 \quad 2 \cdot 18 \cdot 30$$

$$\frac{1080}{18}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1^2 + k^2 = 16^2 + m^2$$

$$k^2 + m^2 = 14^2$$

$$k^2 - 1^2 = m^2 - 16^2$$

$$k^2 + 16^2 - 1^2 = m^2$$

$$m^2 = 255 + 14 = 269$$

$$2k^2 + 255 = 269$$

$$2k^2 = 14$$

$$k = \sqrt{14}$$

$$\frac{14}{2} - \frac{1}{2} = \frac{13}{2}$$

$$\frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'} \quad a^2 = a'c'$$

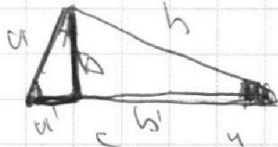
$$\frac{h}{a'} = \frac{b'}{b}$$

$$\frac{a'}{h} = \frac{b}{b'}$$

$$\frac{a'}{h} = \frac{b}{b'}$$

$$\frac{a'}{h} = \frac{b}{b'}$$

$$\frac{a'}{h} = \frac{b}{b'}$$



$$\begin{array}{r} \sqrt{16} \\ \sqrt{14} \\ \hline \sqrt{17} \\ \sqrt{16} \\ \hline \sqrt{21} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{14} \\ \sqrt{14} \\ \hline \sqrt{14} \\ \sqrt{14} \\ \hline \sqrt{28} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{21} \\ \sqrt{21} \\ \hline \sqrt{42} \\ \sqrt{34} \\ \hline \sqrt{76} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{52} \\ \sqrt{28} \\ \hline \sqrt{28} \end{array}$$

$$3x + 2y = z$$

$$x \neq 0$$

$$y \neq 0$$

$$z = 0$$

$$3zy + xz = 2xy$$

$$z = \frac{2xy}{3y+x}$$

$$-2y$$

$$-3y+x$$

$$z^2 = 9x^2 + 4y^2 + 12xy$$

$$3x^2 - 4y^2 - 9x^2 - 4y^2 - 12xy = \frac{-6x^2 - 8y^2 - 12xy}{x^2 - 6y^2} (x+y)(x+2y)$$

$$\frac{2xy}{3y+x} = 3x+2y$$

$$2xy = (3x+2y)(3y+x) = 6y^2 + 3x^2 + 11xy$$

$$6y^2 + 3x^2 + 9xy = 0$$

$$x^2 + 2y^2 + 3xy = 0$$

$$y = 1 \quad x = -2$$

$$z = -6 + 2 = -4$$

$$-\frac{3}{2} + 1 = -\frac{1}{2}$$

$$(x+y)(x+2y) = 0$$

$$\begin{array}{l} x = -y \\ x = -2y \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -6-4 \\ \sqrt{25} \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned}
 a &= 4 \cdot 5 \cdot 21 \\
 c &= 4 \cdot 5 \cdot 21 \\
 b &= 4 \cdot 5 \cdot 21
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a &= 4 \cdot 5 \\
 c &= 4 \cdot 5 \\
 b &= 58
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a|b &= 11 & a|c &= 21 \\
 c|b &= 18 \\
 a|b|c &= 21 \\
 a &= 11 - b \\
 c &= 18 - b \\
 2a - b &= 21 \\
 b &= 8 \\
 a|b|c &= 25 \\
 a|b &= 11 \\
 c &= 14
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a|b &: m \\
 a^2 - 2ab + b^2 &: m \\
 (a+b)^2 &: m \\
 a^2 + 2ab + b^2 &: m \\
 10ab &: m
 \end{aligned}$$

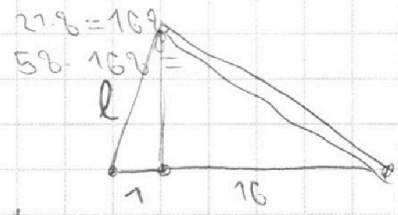
$$\begin{aligned}
 m &= 10 \\
 10ab &: m \\
 a|b &: m \\
 10|5(a+b) &= m \\
 a^2 + 2ab + b^2 &: m \\
 10 \cdot m & \\
 a &: m \\
 b &: m
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a &: m \\
 b &: m & 10ab \\
 10 &= m \\
 a+b & \\
 43 &
 \end{aligned}$$

$$10: p \quad p=2, \quad p=5$$

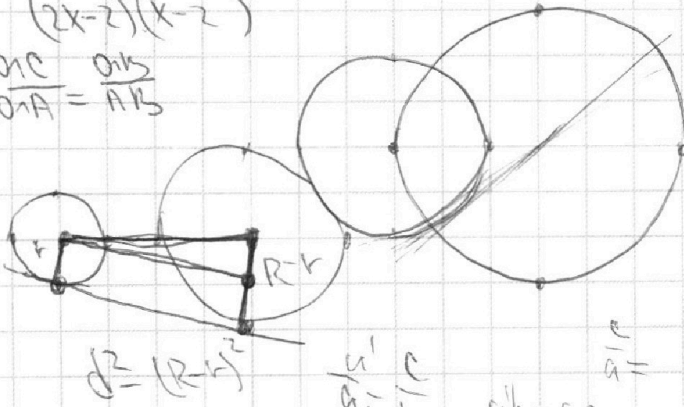
$$\frac{AC}{a|c}$$

$$\begin{aligned}
 9+4g &= 16 \\
 21g & \\
 16g &
 \end{aligned}$$



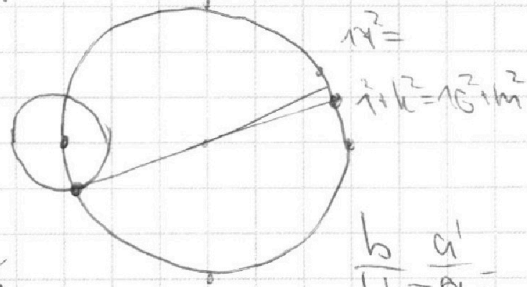
$$\begin{aligned}
 \sqrt{2x^2 - 3x + 4} \\
 (2x-2)(x-2)
 \end{aligned}$$

$$\frac{a|c}{a|a} = \frac{a|b}{a|b}$$



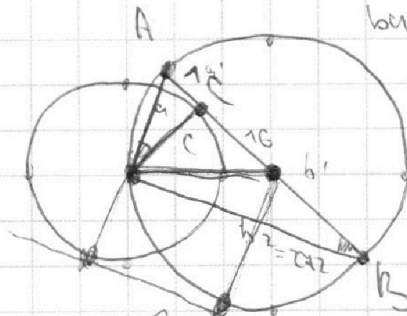
$$d^2 = (R-r)^2$$

$$\begin{aligned}
 \frac{a'}{a} &= \frac{c}{b} \\
 ab &= ac \\
 \sin \alpha &= \cos \beta \cdot h
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 r^2 & \\
 r+k &= 16^2 + m^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{b}{b} &= \frac{a'}{a} \\
 ba &= a'b' \\
 \frac{c}{b} &=
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 a' &= \\
 \sin \alpha &= \cos \beta
 \end{aligned}$$



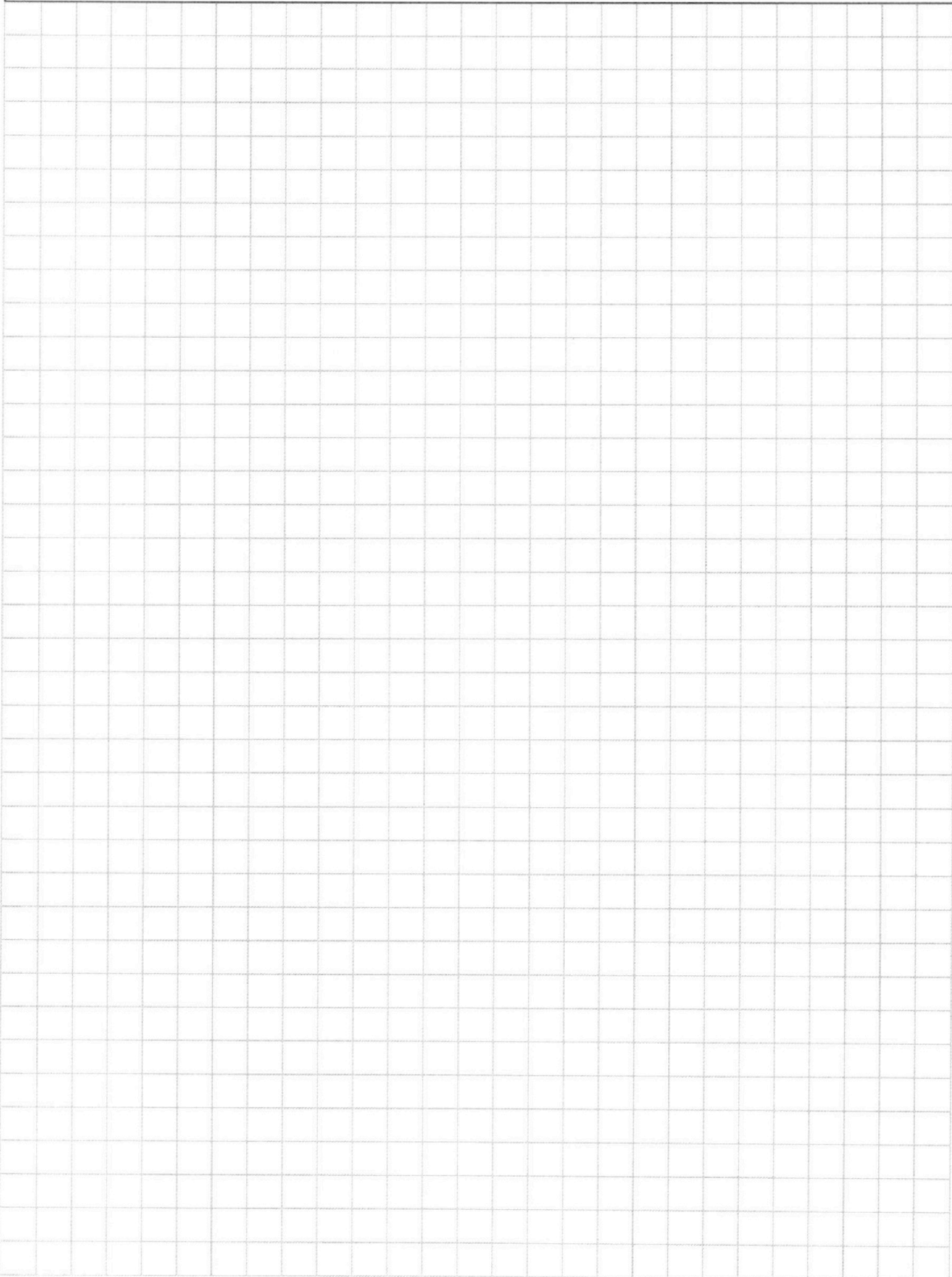
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

