



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 14



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $3^{14}7^{13}$, bc делится на $3^{19}7^{17}$, ac делится на $3^{23}7^{42}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-5x+6} - \sqrt{3x^2+x+1} = 5-6x.$$

4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC = 1$ и $BC = 25$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам

$$5x - y = 3z \quad \text{и} \quad \frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения $\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2}$.

6. [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 1 час раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от A к B , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 49 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 7 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 36 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между A и B .

7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA, AB, BC в точках D, E, F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC , проходящую через вершину C , в точке Y ; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω . Известно, что $EX = \sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD : DC$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab: 3^{14} \cdot 7^{13} \quad bc: 3^{19} \cdot 7^{17} \quad ac: 3^{23} \cdot 7^{42}$$

перемножим и получим $a^2 b^2 c^2: 3^{56} \cdot 7^{42} \Rightarrow abc: 3^{28} \cdot 7^{36}$

но заметим $ac: 7^{42} \Rightarrow abc$ минимум: $7^{42} \Rightarrow abc: 3^{28} \cdot 7^{42}$

пример $a = 3^9 \cdot 7^{13}$ $abc = 3^{28} \cdot 7^{42}$
 $b = 3^5 \cdot 7$
 $c = 3^{14} \cdot 7^{29}$

Ответ: $\min abc = 3^{28} \cdot 7^{42}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2

$\frac{a}{b}$ - несократимая $\Rightarrow \text{НОД}(a, b) = 1$

$$\text{НОД}(a, b) = 1 \Rightarrow a+b \text{ — } \text{НОД}(a+b; a) = 1$$
$$\text{НОД}(a+b; b) = 1 \Rightarrow \text{НОД}(a+b; ab) = 1$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 9ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 11ab}$$

$$\text{НОД}(a+b; ab) = 1 \Rightarrow \text{НОД}(a+b)^2; ab) = 1$$

$$m = \text{НОД}(a+b; \text{НОД}(a+b)^2; 11ab)$$

$$m \leq \text{НОД}(a+b)^2; 11ab), \text{ но т.к.}$$

$$\text{НОД}(a+b)^2; ab) = 1, \text{ то}$$

$$\text{НОД}(a+b)^2; 11ab) = \text{НОД}((a+b)^2; 11) =$$
$$= 1 \text{ либо } 11$$

$$m \leq 1 \text{ или } 11 \Rightarrow \text{макс } m = 11$$

Пример $a=5, b=6$

$$\frac{11}{11^2 - 11 \cdot 30} = \frac{1}{11 - 30}$$

Ответ: макс $m = 11$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x.$$

D <= 0 D <= 0

Если x — целой, то $5 - 6x$ — целое \Rightarrow и
разность корней, но не могут быть целыми как квадраты

Т.к. квадраты отличаются на $2k \pm 1$ — число

$$3x^2 - 5x + 6 = \left(\sqrt{3}x - \frac{5}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{11}{3}$$

неполучится

\Rightarrow только когда равны $3x^2 - 5x + 6 = 3x^2 + x + 1$

$$-6x + 5 = 0$$

$$x = \frac{5}{6}$$

\Rightarrow слева $0 = 5 - \frac{5}{6} \cdot 6 = 0$

верно

ответ: $x = \frac{5}{6}$

~~иначе~~

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AC + CB = \text{диаметр}$$

$$AC + CB = 2EB$$

$$BE = 13 = R$$

$$CE = AE - AC = 12$$

$$OC \perp HB \text{ т.к. } AB - \text{кас. к } \omega$$

$$\Rightarrow OC = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5 = r$$

KM - общая касательная

$$OK \perp KM$$

$OE \perp KM$ — центр окружности касательной.

$$OE = 5 \quad ME = 13 \Rightarrow \text{проведем } OH \perp ME$$

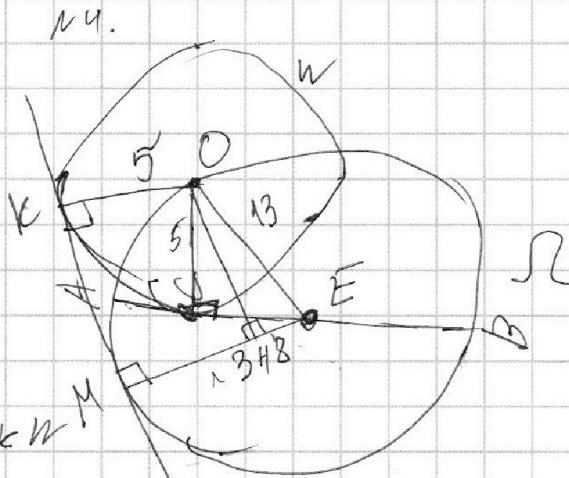
т.к. $ME > OE$, $\angle OKM = \angle MMK = 90^\circ$, то H лежит на $OKME$

тогда $OKMH$ - прямоугольник т.к. углы по $90^\circ \Rightarrow$

$$\text{и углы по } 90^\circ \Rightarrow MH = OK = 5 \Rightarrow EH = 13 - 5 = 8$$

$$\Rightarrow \text{по теореме Пифагора } OH = \sqrt{13^2 - 8^2} = \sqrt{105}$$

$$KM = OH = \sqrt{105} \quad \text{Ответ: общая касательная} = \sqrt{105}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$5x - y = 3z \quad (1)$ $N5$ $x, y, z \neq 0$

$\frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z} \quad (2)$

$$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{yz + 3z^2} = \frac{(5x - y)^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{9z^2 - z^2}{y^2 + 3z^2}$$

$$\frac{8z^2}{3z^2 + y^2}$$

Ответ: мин $\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = 2 \frac{8}{21}$

~~$x = \frac{3z + y}{5}$~~ подставим в (2)

$$\frac{40}{3z + y} = \frac{15}{z} - \frac{1}{y}$$

$$\frac{40}{3z + y} = \frac{15y - z}{zy} \Leftrightarrow 40zy = 45zy - 3z^2 + 15y^2 - zy$$

$$15y^2 + 4zy - 3z^2 = 0$$

$$D = 16z^2 + 180z^2 = (14z)^2$$

$$y_{1,2} = \frac{-4z \pm 14z}{30}$$

$$y_1 = \frac{z}{3} \quad y_2 = \frac{z}{9}$$

$$y_2 = -\frac{10z}{30} = -\frac{z}{3} \quad y_2^2 = \frac{z^2}{9}$$

$$\frac{8z^2}{3z^2 + y^2}$$

если y_1 то $\frac{8z^2}{3z^2 + \frac{1}{9}z^2} = \frac{8z^2}{\frac{28}{9}z^2}$

$$\frac{8 \cdot 9}{28} = \frac{18}{7} = \frac{54}{21}$$

если y_2 то $\frac{8z^2}{3z^2 + \frac{z^2}{9}} = \frac{8z^2}{\frac{28}{9}z^2}$

$$\frac{8 \cdot 9}{28} = \frac{50}{21}$$

$$\frac{50}{21} < \frac{54}{21} \Rightarrow \text{наименьшее значение} = \frac{50}{21} = 2 \frac{8}{21}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



u - скорость мотоциклиста
 v - скорость велосипедиста $\Rightarrow u > v$
 S - путь от А до В

$$\frac{S}{v} - \frac{S}{u} = 1 \quad uS = uS - vS = S = \frac{vu}{u-v}$$

$$\frac{S}{v+7} - \frac{S}{u+7} = 0,6 \quad S_u - S_v = 0,6vu + 29,4 + 4,2(v+u)$$

$$0,6vu = 29,4 + 4,2(u+v)$$

$$2vu = 147 + 21(u+v) = 2uS - 2vS = \frac{2vu^2}{u-v} - \frac{2v^2u}{u-v}$$

$$u \cdot \frac{S}{v} - v \cdot \frac{S}{u} = 4,9 \quad \text{подставим сюда } S = \frac{vu}{u-v}$$

$$\frac{u^2}{u-v} - \frac{v^2}{u-v} = 4,9 \quad \frac{(u-v)(v+u)}{u-v} = 4,9$$

$$u+v = 4,9 \quad 2uv = 147 + 4,9 \cdot 21 = 49 \cdot 24$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} v+u = 4,9 \\ u+v = 588 \end{cases} & \quad \begin{cases} u = 49-v \\ 49v - v^2 = 588 \end{cases} & \quad \begin{cases} v^2 - 49v + 588 = 0 \\ D = 4^2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$u = 28 \quad v = 21 \Rightarrow S = \frac{588}{7} = 84 \text{ км}$$

$$v_{1,2} = \frac{49 \pm 7}{2}$$

Проверка: $\frac{S}{u} = 3 \text{ ч}$ $\frac{S}{v} = 4 \text{ ч}$

$$v_1 = 28 \Rightarrow u_1 = 21$$

$4 - 3 = 1 \text{ ч}$ верно

$$v_2 = 21 \Rightarrow u_2 = 28$$

$$\frac{S}{u+7} = 2,4 \text{ ч} \quad \frac{S}{v+7} = 3 \text{ ч} \quad 3 - 2,4 = 0,6 \text{ ч}$$

последнее условие выполняется при $u+v=49$ у нас $21+28=49 \Rightarrow$ верно

, но $u > v \Rightarrow u = 28$
 $v = 21$

Ответ: путь от А до В = 84 км.



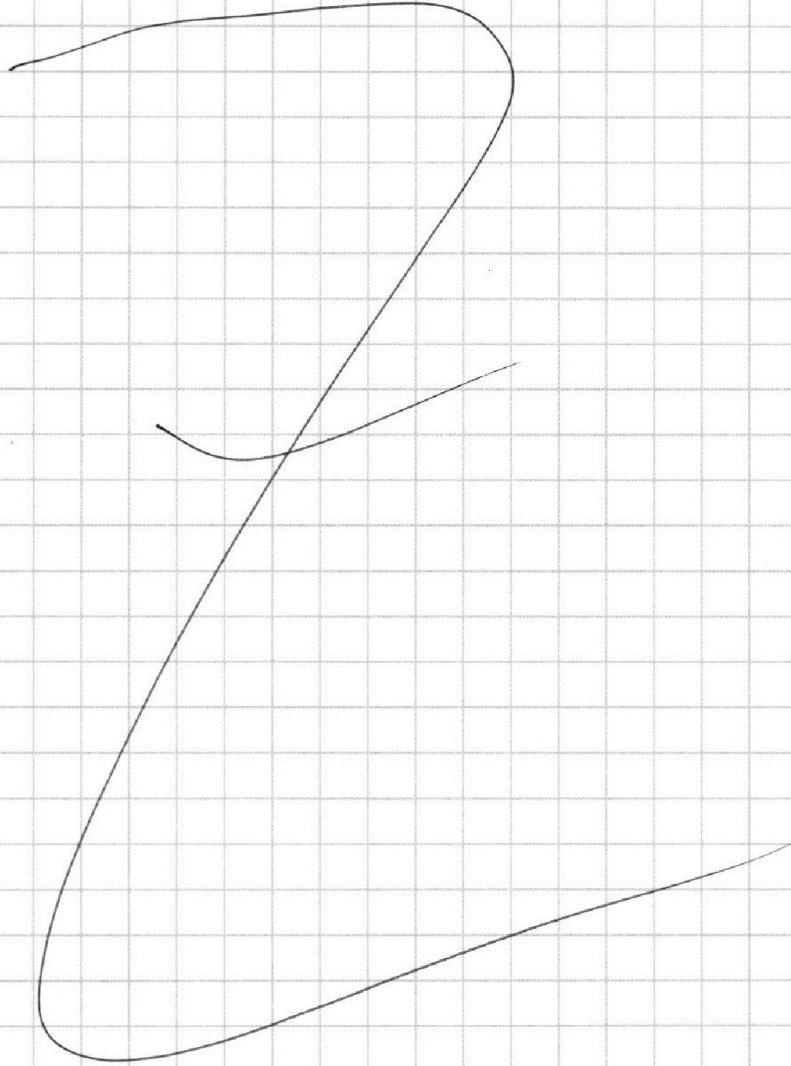
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





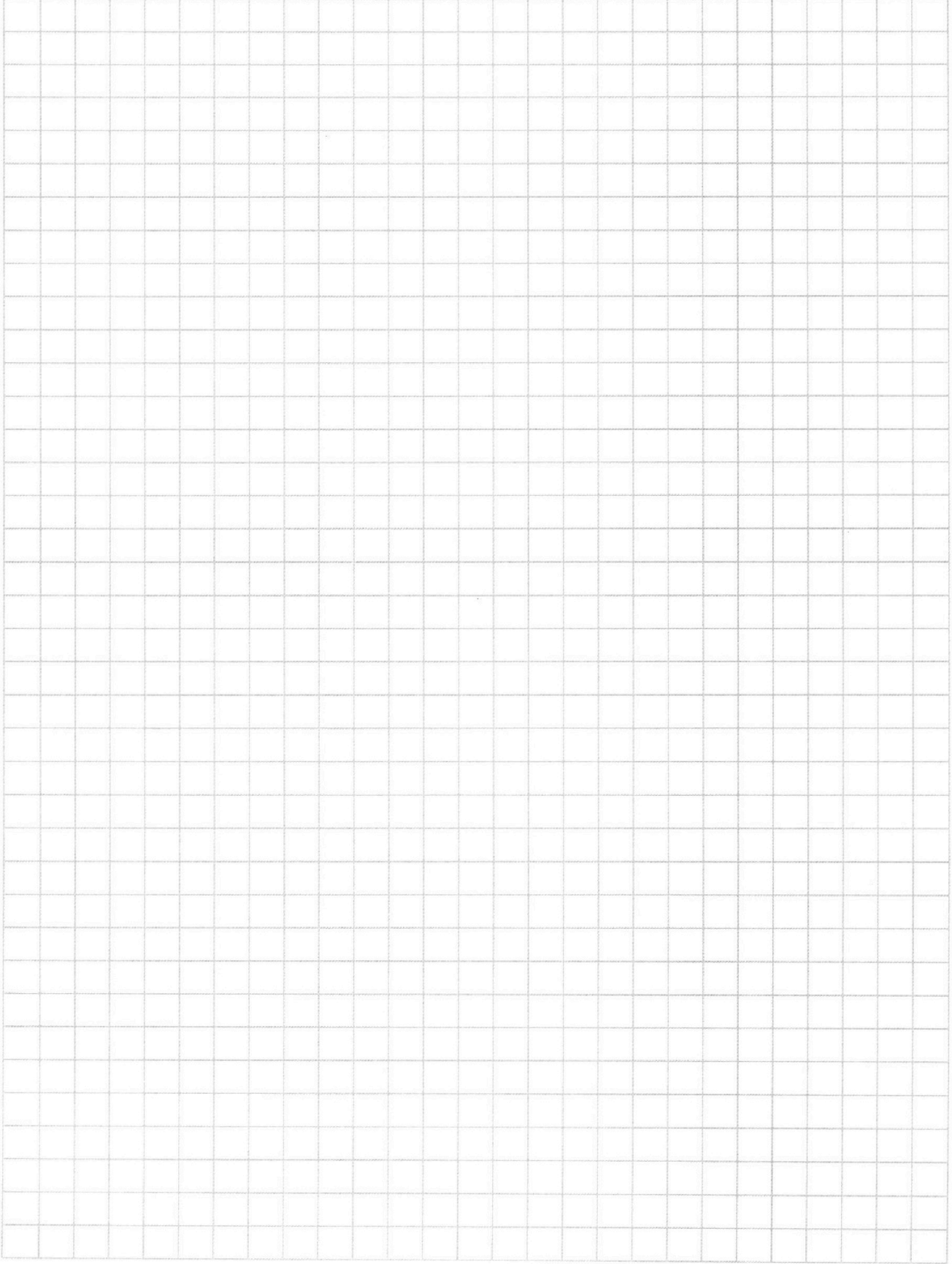
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

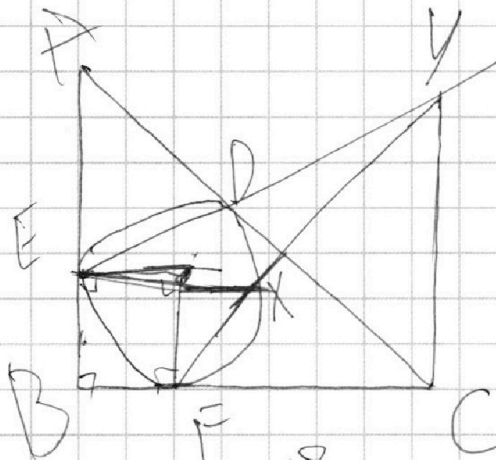
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

МФТИ



- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r}
 3x^2 - 5x + 2 \\
 \hline
 2 \\
 -3x^2 + x + 2 \\
 \hline
 2
 \end{array}$$

$$5 - 6x$$

$$\left(\sqrt{3}x - 2\sqrt{3} \right) \frac{5}{12}$$

$$3x^2 - 5x + 6 - 1 \quad 2 \quad 3x^2 - 2x + 4,5 \quad 5 - 6x$$

$$3x^2 + 4x - 9,5 \leq 0$$

$$x > \frac{5}{6} \quad \frac{6x^2 - 10x + 12}{3x^2 - 5x + 7} \quad \frac{35}{24}$$

$$\left(\sqrt{3}x - 2\sqrt{3} \right) + 3\frac{5}{12} \quad 6x^2 + 2x + 2$$

$$2 \frac{11}{12} \quad 35 \quad 2x^2 + 2x + 2 \quad \sqrt{3}x - 2\sqrt{3} \quad \frac{35}{24}$$

$$2 \frac{35}{19} \quad \frac{35}{24} \quad \sqrt{3}x - 2\sqrt{3} \quad \frac{35}{24}$$

$$2 \frac{35}{24} \quad \sqrt{3}x - 2\sqrt{3} \quad \frac{35}{24}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



u - скорость мотоциклиста $\Rightarrow u > v$
 v - скорость велосипедиста
 S - путь от А до В

$$\frac{S}{v} - \frac{S}{u} = 1 \quad vu = uS - vS \quad S = \frac{vu}{u-v}$$

$$\frac{S}{v+7} - \frac{S}{u+7} = 0,6 \quad S_u - S_v = 0,6vu + 29,4 + 4,2u + 4,2v$$

$$0,6vu = 29,4 + 4,2(u+v)$$

$$2vu = 147 + 21(u+v) = 2uS - 2vS = \frac{2vu^2}{u-v} - \frac{2v^2u}{u-v}$$

$$u - \frac{S}{v} - v - \frac{S}{u} = 49 \quad \text{подставим сюда } S = \frac{vu}{u-v}$$

$$\frac{u^2}{u-v} - \frac{v^2}{u-v} = 49 \quad \frac{(u-v)(u+v)}{u-v} = 49$$

$$u+v = 49 \quad 2vu = 147 + 49 \cdot 21 = 49 \cdot 24$$

$$vu = 49 \cdot 12 = 588$$

$$\begin{cases} u+v = 49 \\ u = 49-v \end{cases}$$

$$\begin{cases} uv = 588 \\ 49v - v^2 = 588 \end{cases} \quad v^2 - 49v + 588 = 0$$

$$u = 28, v = 21 \Rightarrow S = \frac{588}{7} = 84 \text{ км} \quad D = 49^2 - 49 \cdot 48 = 49 \cdot 7^2$$

проверка: $\frac{S}{u} = 3$ $\frac{S}{v} = 4$ $4-3=1 \checkmark$ $V_{1,2} = \frac{49 \pm 7}{2}$

$$\frac{S}{u+7} = 2,4 \quad \frac{S}{v+7} = 3 \quad 3-2,4 = 0,6 \checkmark \quad v_1 = 28 \Rightarrow u_1 = 21$$

или $v_2 = 21 \Rightarrow u_2 = 28$
но $u > v \Rightarrow u = 28$
 $v = 21$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

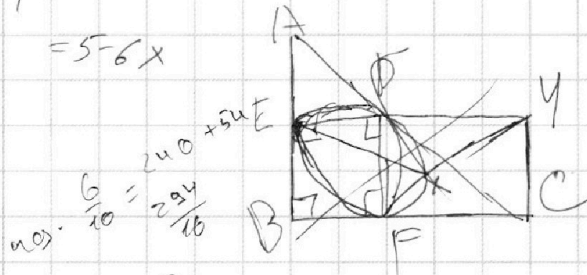
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x$$

$$\sqrt{3x} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$-5x + 6 - x - 1$$

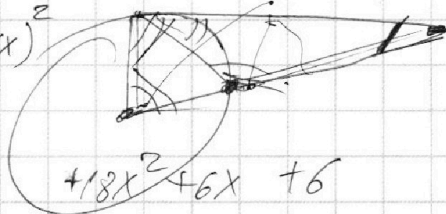
$$-6x + 5$$

49.12

$$EX = \sqrt{2}xy$$

$$0,4 \sqrt{u} = 29,4 + u, 2(u+v)$$

$$5 - 6x - 2 \cdot \sqrt{(3x^2 - 5x + 6)(3x^2 + x + 1)} = (5 - 6x)^2$$



$$9x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 15x^3 - 5x^2 - 5x + 18x^2 + 6x + 6$$

$$9x^4 - 12x^3 + 16x^2 + x + 6$$

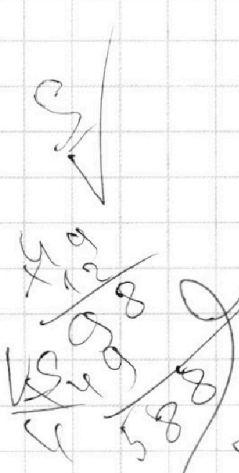
$$3x^2 =$$

$$\frac{84}{35} = \frac{12}{5} = \frac{24}{10}$$

$$\frac{294}{2} = 147$$

$$\frac{66}{66} = 10$$

$$S = v(t+1) = ut$$

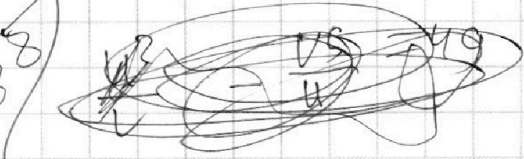


$$\frac{S}{u+7} - \frac{S}{u+7} = 0,6$$

$$\frac{S}{v} - \frac{S}{u} = 1$$

$$\frac{Su - Sv}{(u+7)(u+7)} = \frac{294}{1000}$$

$$\frac{Su}{vS} = \frac{u}{v}$$



$$u \text{ or } v u = u^3 - \frac{v^3}{u-v}$$

$$\frac{uS - vS}{vu} = 1 \quad S = \frac{vu}{u-v}$$

$$uS - vS = vu$$

$$Su - Sv = 0,6vu + 0,6 \cdot 49$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} ab &: 3^{14} \cdot 7^{13} \\ bc &: 3^9 \cdot 7^4 \\ ac &: 3^{23} \cdot 7^2 \end{aligned}$$

$$a = 7^{13}$$

$$c = 7$$

$$W = (4z)^2$$

$$15y^2 + 4zy - 3z^2 = 0$$

$$\frac{-4z \pm 14z}{30}$$

$$a^2 b c^2: 2^{56} \cdot 7^{72}$$

$$abc: 3^{28} \cdot 7^{36}$$

$$2^{42} \cdot 7^{28}$$

$$a = 3^8$$

$$b = 3^6$$

$$c = 3^{14}$$

$$y_1 = \frac{2}{3}y^2 = \frac{2^2}{3}$$

$$y_2 = -\frac{18z}{30} = -\frac{3}{5}z$$

$$y_2 = \frac{9}{25}z^2$$

$$2^{28} \cdot 7^{42}$$

$$\frac{8z^2}{84z^2} = \frac{200}{84} = \frac{50}{21}$$

$$a+b$$

$$(a+b)z = 14ab \rightarrow 16(a+b) = 11$$

$$5x - y = 3z$$

$$\frac{8y + x}{xy} = \frac{15}{z}$$

$$\frac{8z^2}{28z^2}$$

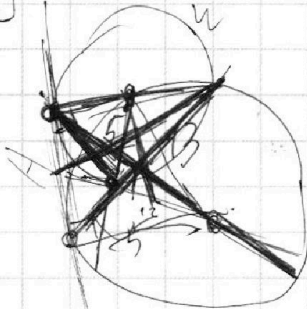
$$\frac{8 \cdot 9}{28} = \frac{18}{7} = \frac{54}{21}$$

$$(a+b; a) = 1 \quad (a+b; ab) = 1$$

$$\frac{25x^2 - y^2 - 2z^2}{y^2 + 3z^2}$$

$$\frac{10}{21}$$

$$45 + 9 = 34 \quad m = 11$$



$$8yz + xz = 15xy$$

$$AC = 1, BC = 25$$

$$\frac{14}{196}$$

$$\frac{8z^2}{y^2 + 3z^2}$$

$$x = \frac{3z + y}{5}$$

$$169$$

$$1.25 = 5.5$$

$$\frac{26}{2} = 13$$

$$162 \times 180 = 144$$

$$\frac{40}{3z+y} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}$$

$$\frac{40}{3z+y} = \frac{15y-2}{2y}$$

середины т. кубаметр.

$$\begin{aligned} 40zy &= 45zy - 3z^2 \\ +15y^2 - 2y & \\ \hline 15y^2 - 3z^2 + 42zy &= 0 \\ (2y + z)^2 - 4zy & \end{aligned}$$