МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7

1. [3 балла] Четвёртый член арифметической прогрессии равен $6-9x$, шестой член равен $(x^2-2x)^2$, а десятый равен $9x^2$. Найдите x.

2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $3y+6x$ при условии

$$\begin{cases} |x-2y| \leqslant 2 \\ |2x-y| \leqslant 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n$ и $B = m^2n + 2mn^2 + 9mn$ равно $11p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q – простые числа.

4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC, проходящая через середину M его стороны BC, пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC, если $AC = 6$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.

5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2}, \\ x^3 + 3x - \sqrt{2y} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 10×10 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q. Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC, проведённой из вершины B. Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N. Найдите длины сторон AC и BC, если $AB = 4$, $AN = 5$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

4-й	$6-9x$
6-й	$(x^2-2x)^2$
10-й	$9x^2$

x - ?

5-й член прогрессии равен $\dfrac{6-9x+(x^2-2x)^2}{2} =$

$= \dfrac{6-9x+x^4-4x^3+4x^2}{2} = \dfrac{x^4-4x^3+4x^2-9x+6}{2}$

Пусть прогрессия имеет вид $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \ldots, x_{10}, \ldots$

Тогда $x_4 = x_1+3d$ $\qquad x_{10} = x_1+9d$

$x_5 = x_1+4d$

$x_6 = x_1+5d$

$x_6 - x_5 = d$

$d = (x^2-2x)^2 - \dfrac{x^4-4x^3+4x^2-9x+6}{2} = \dfrac{2(x^4-4x^3+4x^2)-x^4+4x^3-4x^2+9x-6}{2} =$

$= \dfrac{2x^4-8x^3+8x^2-x^4+4x^3-4x^2+9x-6}{2} =$

$= \dfrac{x^4-4x^3+4x^2+9x-6}{2}$

$x_4 = x_1+3d$

$6-9x = x_1 + \frac{3}{2}(x^4-4x^3+4x^2+9x-6) \quad |\cdot 2$

$12-18x = 2x_1+3x^4-12x^3+12x^2+27x-18$

$2x_1 = -3x^4+12x^3-12x^2-45x+30$

$x_1 = \dfrac{-3x^4+12x^3-12x^2-45x+30}{2}$

$9x^2 = x_1+9d = \dfrac{-3x^4+12x^3-12x^2-45x+30}{2} + \dfrac{9(x^4-4x^3+4x^2+9x-6)}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$18x^2 = -3x^4 + 12x^3 - 12x^2 - 45x + 30 + 9x^4 - 36x^3 + 36x^2 + 81x - 54$$

$$6x^4 - 24x^3 + 6x^2 + 36x - 24 = 0 \quad |:6$$

$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 = 0$$

Схема Горнера:

	1	-4	1	6	-4
1	1	-3	-2	4	0

$$(x-1)(x^3 - 3x^2 - 2x + 4) = 0$$

Схема Горнера:

	1	-3	-2	4
1	1	-2	-4	0

$$(x-1)^2(x^2 - 2x - 4) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{2 + \sqrt{4+16}}{2} \\ x = \dfrac{2 - \sqrt{4+16}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{2 + \sqrt{20}}{2} \\ x = \dfrac{2 - \sqrt{20}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 1 + \sqrt{5} \\ x = 1 - \sqrt{5} \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in \{1,\ 1+\sqrt{5},\ 1-\sqrt{5}\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$3y+6x$ max ?

$\begin{cases} |x-2y|\le 2 \\ |2x-y|\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1)\ x-2y\le 2 \\ (2)\ x-2y\ge -2 \\ (3)\ 2x-y\le 1 \\ (4)\ 2x-y\ge -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1)\ x\le 2y+2 \\ (2)\ x\ge 2y-2 \\ (3)\ y\ge 2x-1 \\ (4)\ y\le 2x+1 \end{cases}$ $\begin{cases} x\le 2(y+1) \\ x\ge 2(y-1) \\ x\le \frac{1}{2}(y+1) \\ x\ge \frac{1}{2}(y-1) \end{cases}$

$\begin{cases} (1)\ x-2y\le 2 \\ (2)\ 2y-x\le 2 \\ (3)\ 2x-y\le 1 \\ (4)\ y-2x\le 1 \end{cases}$

$3y+6x=3(y+2x)$

Тогда достаточно найти максимальное значение выражения $y+2x$

~~(1)+(2)...~~

$(2)+(3):\ 2y-x+2x-y\le 3$

$x+y\le 3$

Из (4): $y\le 2x+1$

$3x+1\le 3$

$3x\le 2$

$x\le \frac{2}{3} \Rightarrow y\le \frac{7}{3}$

$3(y+2x)\le 3\left(\frac{7}{3}+\frac{4}{3}\right)=11$

Значение $3y+6x=11$ достигается при $x=\frac{2}{3}, y=\frac{7}{3}$.

Проверим, возможно ли такое:

$\left|\frac{2}{3}-\frac{14}{3}\right|\le 2 \Leftrightarrow \left|-\frac{12}{3}\right|\le 2$ — н. в.

т.к. $2(y-1)\ge \frac{1}{2}(y-1)$

$2y-2\ge \frac{1}{2}y-\frac{1}{2}$

$\frac{3}{2}y\ge \frac{3}{2} \Leftrightarrow y\ge 1$, тогда $x\ge 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

1 сл. $2(y+1) \leq \frac{1}{2}(y+1)$

$2y+2 \leq \frac{1}{2}y+\frac{1}{2}$

$\frac{3}{2}y \leq -\frac{3}{2}$

$y \leq -1$

$x \leq 0$

$3y+6x \leq -3$

2 сл. $2(y+1) \geqslant \frac{1}{2}(y+1)$

$2y+2 \geqslant \frac{1}{2}y+\frac{1}{2}$

1 сл. $\begin{cases} x \leq \frac{1}{2}(y+1) \\ x \geqslant \frac{1}{2}(y-1) \\ \frac{1}{2}(y+1) \leq 2(y+1) \\ \frac{1}{2}(y-1) \geqslant 2(y-1) \end{cases}$

$\begin{cases} x \in \left[\frac{1}{2}(y-1); \frac{1}{2}(y+1)\right] \\ \frac{1}{2}y+\frac{1}{2} \leq 2y+2 \\ \frac{1}{2}y-\frac{1}{2} \geqslant 2y-2 \end{cases}$

$\begin{cases} x \in \left[\frac{1}{2}(y-1); \frac{1}{2}(y+1)\right] \\ y \geqslant -1 \\ y \leq 1 \end{cases}$

$\begin{cases} x \in [-1; 1] \\ y \in [-1; 1] \end{cases}$

$3y+6x \leq 9$

$=$ при $x=1, y=1$

2 сл. $\begin{cases} x \leq 2(y+1) \\ x \geqslant 2(y-1) \\ 2(y+1) \leq \frac{1}{2}(y+1) \\ 2(y-1) \geqslant \frac{1}{2}(y-1) \end{cases}$

$\begin{cases} x \in [2(y-1); 2(y+1)] \\ 2y+2 \leq \frac{1}{2}y+\frac{1}{2} \\ 2y-2 \geqslant \frac{1}{2}y-\frac{1}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} x \in [2(y-1); 2(y+1)] \\ y \leq -1 \\ y \geqslant 1 \end{cases}$ — такое невозможно

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

3 сл. $\begin{cases} x \leq \frac{1}{2}(y+1) \\ x \geq 2(y-1) \\ \frac{1}{2}(y+1) \leq 2(y+1) \\ 2(y-1) \geq \frac{1}{2}(y-1) \end{cases}$

$\cancel{x \in [\frac{1}{2}(y+1); 2(y-1)]}$

$\begin{cases} x \in [2(y-1); \frac{1}{2}(y+1)] \\ \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \leq 2y+2 \\ 2y-2 \geq \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} x \in [2(y-1); \frac{1}{2}(y+1)] \\ y \geq -1 \\ y \geq 1 \end{cases}$

$\begin{cases} x \in [2(y-1); \frac{1}{2}(y+1)] \\ y \geq 1 \end{cases}$

Тогда $x \geq 0$

$\begin{cases} x \leq \frac{1}{2}(y+1) \\ y \geq 1 \end{cases}$

$\begin{cases} |\frac{1}{2}y + \frac{1}{2} - 2y| \leq 2 \xrightarrow{y \geq 1} |-\frac{3}{2}y + \frac{1}{2}| \leq 2 \rightarrow \begin{cases} -\frac{3}{2}y \leq \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2}y \geq -\frac{5}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y \geq 1 \\ y \leq \frac{5}{3} \end{cases} \\ |y+1-y| \leq 1 \rightarrow |1| \leq 1 - в \ \forall y \end{cases}$

$x \leq \frac{1}{2}(\frac{5}{3}+1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$

$3y + 6x \leq 5 + 8 = 13$

$3y + 6x \leq 13$ $\ominus$ при $y = \frac{5}{3}$, $x = \frac{4}{3}$

4 сл. $\begin{cases} x \leq 2(y+1) \\ x \geq \frac{1}{2}(y-1) \\ 2(y+1) \leq \frac{1}{2}(y+1) \\ \frac{1}{2}(y-1) \geq 2(y-1) \end{cases}$

$\begin{cases} x \in [\frac{1}{2}(y-1); 2(y+1)] \\ 2y+2 \leq \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} \geq 2y - 2 \end{cases}$

$\begin{cases} x \in [\frac{1}{2}(y-1); 2(y+1)] \\ y \leq -1 \\ y \leq 1 \end{cases}$

$\begin{cases} x \in [\frac{1}{2}(y-1); 2(y+1)] \\ y \leq -1 \end{cases}$

Тогда $x \leq 0$

Тут очевидно, что $3y+6x$ не будет max. в этом случае

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Проверим, возможно ли ⊖:

$$\left|\frac{4}{3} - 2\cdot\frac{5}{3}\right| \leq 2$$

$$\left|\frac{4}{3} - \frac{10}{3}\right| = \left|-\frac{6}{3}\right| = |-2| \leq 2 - в.$$

$$\left|\frac{8}{3} - \frac{5}{3}\right| \leq 1$$

$$\left|\frac{3}{3}\right| = |1| \leq 1 - в.$$

Итак, наибольшее значение выражения $3y+6x$ равно 13

Ответ: 13

$m, n \in \mathbb{N}$, $p, q \in \mathbb{P}$

$A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n$

$B = m^2n + 2mn^2 + 9mn$

$A = (m+2n)^2 - 7(m+2n) = (m+2n)(m+2n-7)$

$B = mn(m+2n+9)$

1сл. $A = 11p^2$, $B = 75q^2$

$$\begin{cases}(m+2n)(m+2n-7) = 11p^2 \\ mn(m+2n+9) = 75q^2\end{cases}$$

$$\begin{cases}(m+2n)(m+2n-7) = 11 \cdot p \cdot p \\ mn(m+2n+9) = 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot q \cdot q\end{cases}$$

~~Возможны следующие случаи:~~

Рассмотрим первое уравнение:

$(m+2n)(m+2n-7) = 11 \cdot p \cdot p$

Тогда возможны варианты:

1. $m+2n = 11$, $m+2n-7 = p^2$
2. $m+2n = p$, $m+2n-7 = 11p$
3. $m+2n = 11p$, $m+2n-7 = p$
4. $m+2n = 11p^2$, $m+2n-7 = 1$
5. $m+2n = 1$, $m+2n-7 = 11p^2$

4. $m+2n = 8$
$11p^2 = 8$ – невозм., т.к. $p \in \mathbb{P}$ и НОД$(8, 11) = 1$

5. $m+2n = 1$
$-6 = 11p^2$ – невозм, т.к. $11 > 0$, $p^2 > 0$

1. $m+2n = 11 \Rightarrow p^2 = 4 \Rightarrow p = 2$ – возм.
2. $m+2n = p \Rightarrow p - 7 = 11p \Rightarrow 10p = -7 \Rightarrow p < 0$ – не подх.
3. $m+2n = 11p \Rightarrow 11p - 7 = p \Rightarrow 12p = 7 \Rightarrow p = \frac{7}{12}$ – не подх.

Итак, для первого уравнения возможен только случай, когда $m+2n = 11$ и $p = 2$

Рассмотрим второе уравнение:

$mn(m+2n+9) = 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot q \cdot q$

Учтём, что $m+2n = 11$:

$mn \cdot 20 = 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot q \cdot q \Rightarrow 4mn = 5 \cdot 3 \cdot q \cdot q$

т.к. $3, 5, q$ – простые $\Rightarrow q \cdot q = 4 \Rightarrow q = 2$

Тогда $mn = 3 \cdot 5 \Rightarrow$ возможны варианты: $m = 3, n = 5$
$m = 5, n = 3$

Проверим: $3 + 2 \cdot 5 = 13 \neq 11$ – не подх.
$5 + 2 \cdot 3 = 5 + 6 = 11$ – подх.

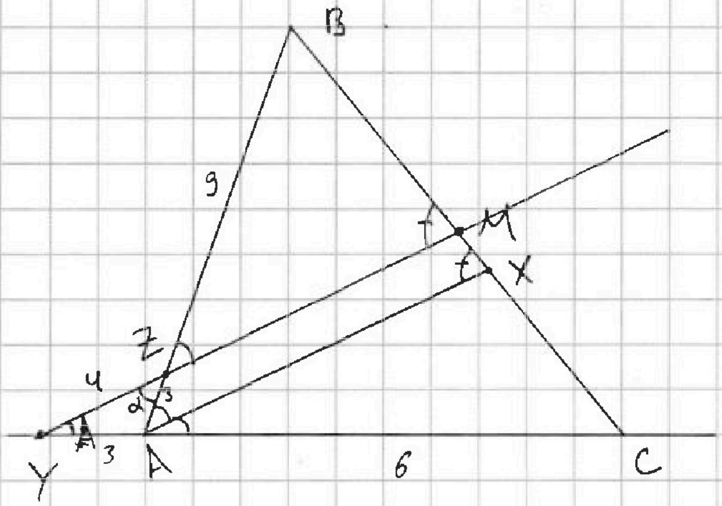
Итак, пара $(5; 3)$ подходит

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



M - сер. BC

AX - бисс-са

$AC = 6$

$AZ = 3$

$YZ = 4$

BC - ?

$(ZM)\parallel(AX) \Rightarrow \triangle ZBM \sim \triangle ABX$ по 2-м углам $\Rightarrow \frac{AB}{ZB} = \frac{XB}{MB} = \frac{AX}{ZM}$

~~△XCA ~ △MCY~~

$(ZM)\parallel(AX) \Rightarrow \angle MYC = \angle XAC = \angle BAX = \angle BZM = \angle YZA \Rightarrow \triangle YAZ$ - р/б $\Rightarrow$

$\Rightarrow YA = AZ = 3$

По Т. Менелая для $\triangle CBA$, прямой (YM):

$$\frac{CM}{MB} \cdot \frac{BZ}{ZA} \cdot \frac{AY}{YC} = 1$$

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{BZ}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{9} = 1$$

$$BZ = 9$$

$(ZM)\parallel(AX) \Rightarrow \triangle CXA \sim \triangle CMY$ по 2-м углам $\Rightarrow \frac{CX}{CM} = \frac{CA}{CY} = \frac{XA}{YM}$

Т. косинусов для $\triangle YAZ$ (пусть $\angle YZA = \alpha$)

$$\cancel{9} = 16 + \cancel{9} - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos\alpha$$

$$24\cos\alpha = 16$$

$$\cos\alpha = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$$

Т. косинусов для $\triangle ABC$:

$$BC^2 = 12^2 + 6^2 - 2 \cdot 12 \cdot 6 \cdot \cos 2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$BC^2 = 144 + 36 - 144\left(2 \cdot \frac{4}{9} - 1\right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$BC^2 = 180 - \frac{144 \cdot 8}{9} + 144 = 180 + \frac{144}{9} = \frac{180 \cdot 9 + 144}{9} = \frac{1620 + 144}{9} =$$

$$= \frac{1764}{9} = 196$$

$180 \cdot 9 = 1620$

$1764 : 9 = 196$

$14 \cdot 14 = 196$

$$BC = \sqrt{196} = 14$$

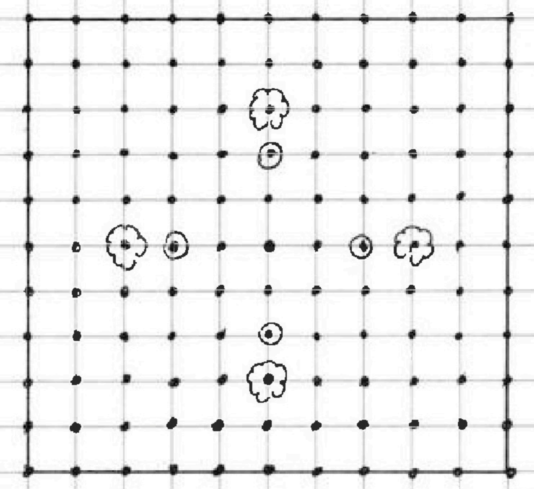
Ответ: $BC = 14$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



Всего узлов: $11\cdot 11 = 121$

Кол-во способов выбрать 2 узла из 121: C_{121}^2

Но раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, по условию считаются одинаковыми => таким способом мы учитываем ~~раскраски~~ одинаковые раскраски ~~по не~~ по несколько раз. Тогда нам теперь необходимо найти, сколько раз мы учитываем одну и ту же раскраску.

На рисунке вот так ⊙ и вот так ✿ отмечены узлы, которые получаются друг из друга поворотом (мы выбрали 1 пару и нарисовали для неё, для др. пар будет аналогично)

~~Заметим, что~~

У нас получилось 4 таких пары узлов, т.е. каждую раскраску мы учитываем 4 раза.

Тогда всего способов перекрасить 2 узла в белый цвет $\frac{C_{121}^2}{4} = \frac{121!}{2!\cdot 119!\cdot 4} = \frac{120\cdot 121}{8} = 15\cdot 121 = 1815$

$$\begin{array}{r} \times\ 121 \\ 15 \\ \hline +\ 605 \\ 121\ \ \\ \hline 1815 \end{array}$$

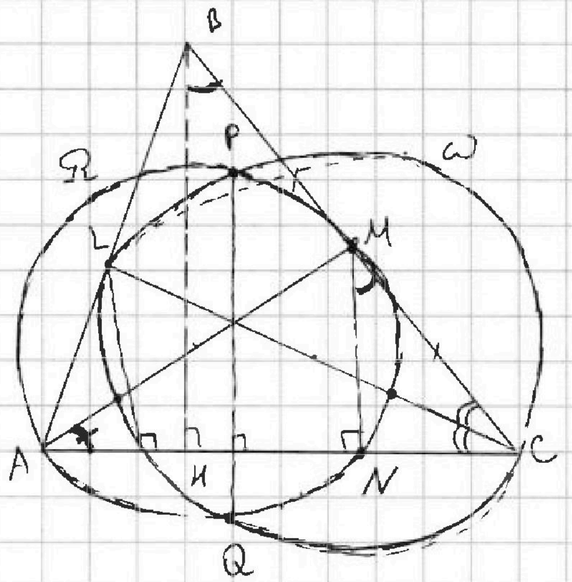
Ответ: 1815 способов

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



AC, BC – ?
AB = 4
AN = 5
M – сер. BC
CL – бис-са

AM – диам. Ω, N ∈ Ω => ∠ANM = 90°
MN – ср. лин. в △ CBH (H – осн. выс., пров. из т. B)
△CNM ~ △CHB ~~к коэф~~, т. к. MN – ср. лин

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

2 сл. $A = 75q^2$, $B = 11p^2$

$$\begin{cases} (m+2n)(m+2n-7) = 75q^2 \\ mn(m+2n+9) = 11p^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (m+2n)(m+2n-7) = 3\cdot 5\cdot 5\cdot q\cdot q \\ mn(m+2n+9) = 11\cdot p\cdot p \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение:

$(m+2n)(m+2n-7) = 3\cdot 5\cdot 5\cdot q\cdot q$

Возможны варианты:

$m+2n = 1 \Rightarrow -6 = 75q^2$ — невозм.

$m+2n = 5 \Rightarrow -2 = 15q^2$ — невозм.

$m+2n = 3 \Rightarrow -4 = 25q^2$ — невозм.

$m+2n = 15 \Rightarrow 8 = 5q^2$ — невозм.

$m+2n = 25 \Rightarrow 18 = 3q^2 \Rightarrow 6 = q^2$ — невозм.

$m+2n = 75 \Rightarrow 68 = q^2$ — невозм.

$m+2n = 3q \Rightarrow 3q - 7 = 25q \Rightarrow 22q = -7$ — невозм.

$m+2n = 5q \Rightarrow 5q - 7 = 15q \Rightarrow 10q = -7$ — невозм.

$m+2n = 15q \Rightarrow 15q - 7 = 5q \Rightarrow 10q = 7$ — невозм.

$m+2n = 25q \Rightarrow 25q - 7 = 3q \Rightarrow 22q = 7$ — невозм.

$m+2n = 75q \Rightarrow 75q - 7 = q \Rightarrow 74q = 7$ — невозм.

$m+2n = q \Rightarrow q - 7 = 75q \Rightarrow 74q = -7$ — невозм.

$m+2n = q^2 \Rightarrow q^2 - 7 = 75 \Rightarrow q^2 = 82$ — невозм.

$m+2n = 3q^2 \Rightarrow 3q^2 - 7 = 25 \Rightarrow 3q^2 = 32$ — невозм.

$m+2n = 5q^2 \Rightarrow 5q^2 - 7 = 15 \Rightarrow 5q^2 = 22$ — невозм.

$m+2n = 15q^2 \Rightarrow 15q^2 - 7 = 5 \Rightarrow 15q^2 = 12$ — невозм.

$m+2n = 25q^2 \Rightarrow 25q^2 - 7 = 3 \Rightarrow 25q^2 = 10$ — невозм.

$m+2n = 75q^2 \Rightarrow 75q^2 - 7 = 1 \Rightarrow 75q^2 = 8$ — невозм.

Возможных вариантов не нашлось, ~~но на всякий случай рассмотрим второе уравнение~~

~~$mn(m+2n+9) = 11\,p\,p$~~

Тут ~~возможны варианты:~~

$m = n = p \Rightarrow 3p + 9 = 11 \Rightarrow 3p = 2$ — невозм.

$m = 11,\ n = p \Rightarrow 11 + 2p + 9 = p \Rightarrow p = -20$ — невозм.

$m = p,\ n = 11 \Rightarrow p + 22 + 9 = p \Rightarrow 31 = 0$ — невозм.

$m = 11p,\ n = p \Rightarrow 13p + 9 = 1 \Rightarrow 13p = -8$ — невозм.

$m = p,\ n = 11p \Rightarrow 23p + 9 = 1 \Rightarrow 23p = -8$ — невозм.

$m = 11p^2,\ n = 1 \Rightarrow 11p^2 + 11 = 1 \Rightarrow 11p^2 = -10$ — невозм.

$n = 11p^2,\ m = 1 \Rightarrow 22p^2 + 10 = 1 \Rightarrow 22p^2 = -9$ — невозм.

Итак, во 2 сл. не существует подходящих пар (m, n)

Ответ: $(5; 3)$