



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 7



1. [3 балла] Четвёртый член арифметической прогрессии равен $6 - 9x$, шестой член равен $(x^2 - 2x)^2$, а десятый равен $9x^2$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $3y + 6x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 2y| \leq 2 \\ |2x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n$ и $B = m^2n + 2mn^2 + 9mn$ равно $11p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q — простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 6$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2}, \\ x^3 + 3x - \sqrt{2y} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 10×10 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 4$, $AN = 5$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{l} 4-\bar{u} \quad 6-9x \\ 6-\bar{u} \quad (x^2-2x)^2 \\ 10-\bar{u} \quad 9x^2 \\ x-? \end{array}$$

$$5-\bar{u} \text{ член прогрессии равен } \frac{6-9x+(x^2-2x)^2}{2} =$$

$$= \frac{6-9x+x^4-4x^3+4x^2}{2} = \frac{x^4-4x^3+4x^2-9x+6}{2}$$

Пусть прогрессия имеет вид $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \dots, x_{10}, \dots$

Тогда $x_4 = x_1 + 3d$ $x_{10} = x_1 + 9d$

$$x_5 = x_1 + 4d$$

$$x_6 = x_1 + 5d$$

$$x_6 - x_5 = d$$

$$d = (x^2 - 2x)^2 - \frac{x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 9x + 6}{2} = \frac{2(x^4 - 4x^3 + 4x^2) - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 9x - 6}{2}$$

$$= \frac{2x^4 - 8x^3 + 8x^2 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 9x - 6}{2} =$$

$$= \frac{x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 9x - 6}{2}$$

$$x_4 = x_1 + 3d$$

$$6 - 9x = x_1 + \frac{3}{2}(x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 9x - 6) \quad | \cdot 2$$

$$12 - 18x = 2x_1 + 3x^4 - 12x^3 + 12x^2 + 27x - 18$$

$$2x_1 = -3x^4 + 12x^3 - 12x^2 - 45x + 30$$

$$x_1 = \frac{-3x^4 + 12x^3 - 12x^2 - 45x + 30}{2}$$

$$9x^2 = x_1 + 9d = \frac{-3x^4 + 12x^3 - 12x^2 - 45x + 30}{2} + \frac{9(x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 9x - 6)}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$18x^2 = -3x^4 + 12x^3 - 12x^2 - 45x + 30 + 9x^4 - 36x^3 + 36x^2 + 81x - 54$$

$$6x^4 - 24x^3 + 6x^2 + 36x - 24 = 0 \quad | :6$$

$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4 = 0$$

Схема Горнера:

1	-4	1	6	-4	
1	1	-3	-2	4	0

$$(x-1)(x^3 - 3x^2 - 2x + 4) = 0$$

Схема Горнера:

1	-3	-2	4	
1	1	-2	-4	0

$$(x-1)^2(x^2 - 2x - 4) = 0$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{2 + \sqrt{4+16}}{2} \\ x = \frac{2 - \sqrt{4+16}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{2 + \sqrt{20}}{2} \\ x = \frac{2 - \sqrt{20}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 1 + \sqrt{5} \\ x = 1 - \sqrt{5} \end{cases}$$

Ответ: $x \in \{1, 1 + \sqrt{5}, 1 - \sqrt{5}\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3y + 6x \quad \max?$$

$$\begin{cases} |x - 2y| \leq 2 \\ |2x - y| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{matrix} \begin{cases} x - 2y \leq 2 \\ x - 2y \geq -2 \\ 2x - y \leq 1 \\ 2x - y \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{matrix} \begin{cases} x \leq 2y + 2 \\ x \geq 2y - 2 \\ y \geq 2x - 1 \\ y \leq 2x + 1 \end{cases} \begin{cases} x \leq 2(y + 1) \\ x \geq 2(y - 1) \\ x \leq \frac{1}{2}(y + 1) \\ x \geq \frac{1}{2}(y - 1) \end{cases}$$

$$\begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{matrix} \begin{cases} x - 2y \leq 2 \\ 2y - x \leq 2 \\ 2x - y \leq 1 \\ y - 2x \leq 1 \end{cases}$$

$$3y + 6x = 3(y + 2x)$$

Тогда достаточно найти максимальное значение выражения $y + 2x$

~~(1) + (3):~~

~~$$(2) + (3): \begin{cases} 2y - x + 2x - y \leq 3 \\ x + y \leq 3 \end{cases}$$~~

~~$$\text{из (4): } \begin{cases} y \leq 2x + 1 \\ 3x + 1 \leq 3 \\ 3x \leq 2 \\ x \leq \frac{2}{3} \Rightarrow y \leq \frac{7}{3} \end{cases}$$~~

~~$$3(y + 2x) \leq 3\left(\frac{7}{3} + \frac{4}{3}\right) = 11$$~~

Значение $3y + 6x = 11$ достигается при $x = \frac{2}{3}, y = \frac{7}{3}$.
Проверим, возможно ли такое:

$$\left| \frac{2}{3} - \frac{14}{3} \right| \leq 2 \Leftrightarrow \left| -\frac{12}{3} \right| \leq 2 \quad \text{н.в.}$$

~~$$\text{или } 2(y - 1) \geq \frac{1}{2}(y - 1)$$~~

~~$$2y - 2 \geq \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$$~~

~~$$\frac{3}{2}y \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow y \geq 1, \text{ тогда } x \geq 0$$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1 сл. ~~$2(y+1) \leq \frac{1}{2}(y+1)$~~
 ~~$2y+2 \leq \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$~~
 ~~$\frac{3}{2}y \leq -\frac{3}{2}$~~
 ~~$y \leq -1$~~
 $x \leq 0$
 $3y+6x \leq -3$

2 сл. ~~$2(y+1) \geq \frac{1}{2}(y+1)$~~
 ~~$2y+2 \geq \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$~~

1 сл. $\begin{cases} x \leq \frac{1}{2}(y+1) \\ x \geq \frac{1}{2}(y-1) \\ \frac{1}{2}(y+1) \leq 2(y+1) \\ \frac{1}{2}(y-1) \geq 2(y-1) \end{cases}$

$\begin{cases} x \in [\frac{1}{2}(y-1); \frac{1}{2}(y+1)] \\ \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \leq 2y+2 \\ \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} \geq 2y-2 \end{cases}$

$\begin{cases} x \in [\frac{1}{2}(y-1); \frac{1}{2}(y+1)] \\ y \geq -1 \\ y \leq 1 \end{cases}$

$\begin{cases} x \in [-1; 1] \\ y \in [-1; 1] \\ 3y+6x \leq 9 \end{cases}$
 при $x=1, y=1$

2 сл. $\begin{cases} x \leq 2(y+1) \\ x \geq 2(y-1) \\ 2(y+1) \leq \frac{1}{2}(y+1) \\ 2(y-1) \geq \frac{1}{2}(y-1) \end{cases}$

$\begin{cases} x \in [2(y-1); 2(y+1)] \\ 2y+2 \leq \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \\ 2y-2 \geq \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} x \in [2(y-1); 2(y+1)] \\ y \leq -1 \\ y \geq 1 \end{cases}$ \rightarrow такое неравенство



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3 \text{ сл. } \begin{cases} x \leq \frac{1}{2}(y+1) \\ x \geq 2(y-1) \\ \frac{1}{2}(y+1) \leq 2(y+1) \\ 2(y-1) \geq \frac{1}{2}(y-1) \end{cases}$$

~~$$x \in \left[\frac{1}{2}(y+1); 2(y-1) \right]$$~~

$$\begin{cases} x \in [2(y-1); \frac{1}{2}(y+1)] \\ \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \leq 2y + 2 \\ 2y - 2 \geq \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in [2(y-1); \frac{1}{2}(y+1)] \\ y \geq -1 \\ y > 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in [2(y-1); \frac{1}{2}(y+1)] \\ y \geq 1 \end{cases}$$

Тогда $x \geq 0$

$$\begin{cases} x \leq \frac{1}{2}(y+1) \\ y > 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left| \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} - 2y \right| \leq 2 \xrightarrow{y > 1} \left| -\frac{3}{2}y + \frac{1}{2} \right| \leq 2 \rightarrow \begin{cases} -\frac{3}{2}y \leq \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2}y \geq -\frac{5}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y \geq 1 \\ y \leq \frac{5}{3} \end{cases} \\ |y+1-y| \leq 1 \rightarrow |1| \leq 1 - \forall y \end{cases}$$

$$3y + 6x \leq 5 + 8 = 13$$

$$3y + 6x \leq 13 \Leftrightarrow \text{при } y = \frac{5}{3}, x = \frac{4}{3}$$

$$4 \text{ сл. } \begin{cases} x \leq 2(y+1) \\ x \geq \frac{1}{2}(y-1) \\ 2(y+1) \leq \frac{1}{2}(y+1) \\ \frac{1}{2}(y-1) \geq 2(y-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in \left[\frac{1}{2}(y-1); 2(y+1) \right] \\ 2y + 2 \leq \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} \geq 2y - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in \left[\frac{1}{2}(y-1); 2(y+1) \right] \\ y \leq -1 \\ y \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in \left[\frac{1}{2}(y-1); 2(y+1) \right] \\ y \leq -1 \end{cases}$$

Тогда $x \leq 0$

Тут очевидно, что $3y + 6x$ не будет max. в этой ситуации

$$\begin{cases} -\frac{3}{2}y \leq \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2}y \geq -\frac{5}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y \geq 1 \\ y \leq \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$x \leq \frac{1}{2} \left(\frac{5}{3} + 1 \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Проверим, возможно ли \ominus :

$$\left| \frac{4}{3} - 2 \cdot \frac{5}{3} \right| \leq 2$$

$$\left| \frac{4}{3} - \frac{10}{3} \right| = \left| -\frac{6}{3} \right| = |-2| \leq 2 - \text{в.}$$

$$\left| \frac{8}{3} - \frac{5}{3} \right| \leq 1$$

$$\left| \frac{3}{3} \right| = |1| \leq 1 - \text{в.}$$

Итак, наибольшее значение выражения $3y + 6x$ равно 13

Ответ: 13



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$m, n \in \mathbb{N}, p, q \in \mathbb{P}$$

$$A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n$$

$$B = m^2n + 2mn^2 + 9mn$$

$$A = (m+2n)^2 - 7(m+2n) = (m+2n)(m+2n-7)$$

$$B = mn(m+2n+9)$$

$$\text{т.к. } A = 11p^2, B = 75q^2$$

$$4. m+2n=8$$

$$11p^2 = 8 - \text{невозм., т.к. } p \in \mathbb{P}$$

$$\text{и } \text{НОД}(8, 11) = 1$$

$$5. m+2n=1$$

$$-6 = 11p^2 - \text{невозм., т.к. } 11 > 0, p^2 > 0$$

$$\begin{cases} (m+2n)(m+2n-7) = 11p^2 \\ mn(m+2n+9) = 75q^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (m+2n)(m+2n-7) = 11 \cdot p \cdot p \\ mn(m+2n+9) = 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot q \cdot q \end{cases}$$

$$\text{Возможны следующие случаи:}$$

Рассмотрим первое уравнение

$$(m+2n)(m+2n-7) = 11 \cdot p \cdot p \quad \begin{cases} m+2n=1, m+2n-7=11p^2 \\ \text{или } m+2n=11p^2, m+2n-7=1 \end{cases}$$

$$\text{Тогда возможны варианты: } 1. m+2n=11, m+2n-7=p^2$$

$$2. m+2n=p, m+2n-7=11p$$

$$3. m+2n=11p, m+2n-7=p$$

$$1. m+2n=11 \Rightarrow p^2=4 \Rightarrow p=2 - \text{возм.}$$

$$2. m+2n=p \Rightarrow p-7=11p \Rightarrow 10p=-7 \Rightarrow p < 0 - \text{не подг.}$$

$$3. m+2n=11p \Rightarrow 11p-7=p \Rightarrow 10p=7 \Rightarrow p=\frac{7}{10} - \text{не подг.}$$

Итак, для первого уравнения возможен только случай, когда $m+2n=11$ и $p=2$

Рассмотрим второе уравнение:

$$mn(m+2n+9) = 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot q \cdot q$$

$$\text{Учитывая, что } m+2n=11:$$

$$mn \cdot 20 = 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot q \cdot q \Rightarrow 4mn = 5 \cdot 3 \cdot q \cdot q$$

$$\text{Т.к. } 3, 5, q - \text{простые} \Rightarrow q \cdot q = 4 \Rightarrow q = 2$$

$$\text{Тогда } mn = 3 \cdot 5 \Rightarrow \text{возможны варианты: } m=3, n=5$$

$$m=5, n=3$$

$$\text{Проверим: } 3+2 \cdot 5 = 13 \neq 11 - \text{не подг.}$$

$$5+2 \cdot 3 = 5+6 = 11 - \text{подг.}$$

Итак, пара $(5; 3)$ подходит

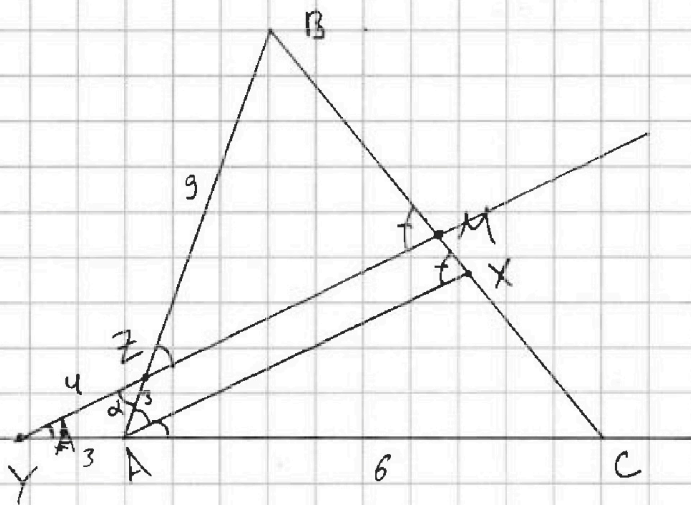
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



M - сеп. BC
AX - бисс-са
AC = 6
AZ = 3
YZ = 4
BC = ?

$$(ZM) \parallel (AX) \Rightarrow \triangle ZBM \sim \triangle ABX \text{ по 2-м углам} \Rightarrow \frac{AB}{ZB} = \frac{XB}{MB} = \frac{AX}{ZM}$$

$$\triangle XCA \sim \triangle MZY$$

$$(ZM) \parallel (AX) \Rightarrow \angle MYC = \angle XAC = \angle BAX = \angle BZM = \angle YZA \Rightarrow \triangle YAZ - \text{прямоугольный} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow YA = AZ = 3$$

По Т. Менелая для $\triangle CBA$, прямой (YM) :

$$\frac{CM}{MB} \cdot \frac{BZ}{ZA} \cdot \frac{AY}{YC} = 1$$

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{BZ}{3} \cdot \frac{3}{3} = 1$$

$$BZ = 3$$

$$(ZM) \parallel (AX) \Rightarrow \triangle CXA \sim \triangle CMY \text{ по 2-м углам} \Rightarrow \frac{CX}{CM} = \frac{CA}{CY} = \frac{XA}{YM}$$

Т. косинусов для $\triangle YAZ$ (используем $\angle YZA = \alpha$)

$$4^2 = 16 + 9 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos \alpha$$

$$24 \cos \alpha = 16$$

$$\cos \alpha = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$$

Т. косинусов для $\triangle ABC$:

$$BC^2 = 12^2 + 6^2 - 2 \cdot 12 \cdot 6 \cdot \cos 2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = 2\cos^2 \alpha - 1$$

$$BC^2 = 144 + 36 - 144 \left(2 \cdot \frac{4}{9} - 1 \right)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$BC^2 = 180 - \frac{144 \cdot 8}{9} + 144 = 180 + \frac{144}{9} = \frac{180 \cdot 9 + 144}{9} = \frac{1620 + 144}{9} = \frac{1764}{9} = 196$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \times 180 \\ \times 9 \\ \hline 1620 \end{array}$$

$$BC = \sqrt{\frac{1764}{9}} = \frac{\sqrt{1764}}{3}$$

$$\begin{array}{r} 1620 \sqrt{18} \\ \underline{18} \\ 72 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1764 \overline{) 9} \\ \underline{9} \\ 86 \\ \underline{81} \\ 54 \\ \underline{54} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 16 \\ \times 16 \\ \hline 48 \\ 48 \\ \hline 258 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 14 \\ \times 14 \\ \hline 56 \\ 14 \\ \hline 196 \end{array}$$

$$BC = \sqrt{196} = 14$$

Ответ: $BC = 14$

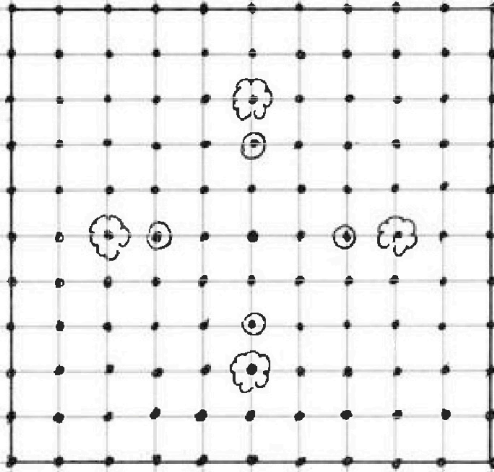
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Всего узлов: $11 \cdot 11 = 121$

Кол-во способов выбрать 2 узла из 121: C_{121}^2

Но раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, по условию считаются одинаковыми \Rightarrow таким способом мы учитываем раскраски

одинаковые раскраски ~~но~~

по несколько раз. Тогда нам теперь необходимо найти, сколько раз мы учитываем одну и ту же раскраску. И вот так

На рисунке вот так отмечены узлы, которые получают друг из друга поворотом (мы выбрали 1 пару и рисуем для неё; для др. пар будет аналогично)

Заметим, что

у нас получилось 4 таких пары узлов, т.е. каждую раскраску мы учитываем 4 раза.

Тогда всего способов перекрасить 2 узла в белый цвет $\frac{C_{121}^2}{4} = \frac{121!}{2! \cdot 119! \cdot 4} = \frac{120 \cdot 121}{8} = 15 \cdot 121 =$

$= 1815$

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times 121 \\ \hline 15 \\ + 605 \\ + 121 \\ \hline 1815 \end{array}$$

Ответ: 1815 способов

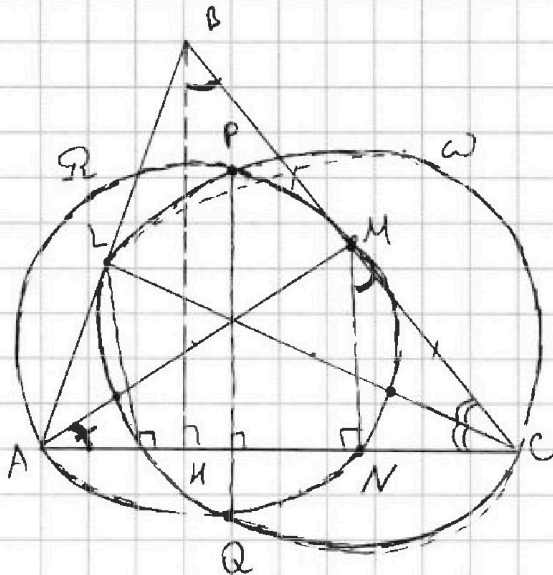


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



AC, BC - ?
AB = 4
AM = 5
M - ср. BC
CL - диам. окруж.

AM - диам. Ω , $N \in \Omega \Rightarrow \angle ANM = 90^\circ$
MN - ср. лин. в $\triangle CBH$ (H - орт. вост., протв. уг. $\angle B$)
 $\triangle CNM \sim \triangle CBH$ ~~к-ва~~, т.к. MN - ср. лин.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 2 \text{ сл. } A = 75q^2, B = 11p^2 \\ (m+2n)(m+2n-7) = 75q^2 \\ mn(m+2n+9) = 11p^2 \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение:

$$(m+2n)(m+2n-7) = 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot q \cdot q$$

Возможны варианты:

$$\begin{aligned} m+2n=3 &\Rightarrow -4 = 25q^2 - \text{невозм.} \\ m+2n=1 &\Rightarrow -6 = 75q^2 - \text{невозм.} \\ m+2n=5 &\Rightarrow -2 = 15q^2 - \text{невозм.} \\ m+2n=15 &\Rightarrow 8 = 5q^2 - \text{невозм.} \\ m+2n=25 &\Rightarrow 18 = 3q^2 \Rightarrow 6 = q^2 - \text{невозм.} \\ m+2n=75 &\Rightarrow 68 = q^2 - \text{невозм.} \\ m+2n=3q &\Rightarrow 3q-7 = 25q \Rightarrow 22q = -7 - \text{невозм.} \\ m+2n=5q &\Rightarrow 5q-7 = 15q \Rightarrow 10q = -7 - \text{невозм.} \\ m+2n=15q &\Rightarrow 15q-7 = 5q \Rightarrow 10q = 7 - \text{невозм.} \\ m+2n=25q &\Rightarrow 25q-7 = 3q \Rightarrow 22q = 7 - \text{невозм.} \\ m+2n=75q &\Rightarrow 75q-7 = q \Rightarrow 74q = 7 - \text{невозм.} \\ m+2n=q &\Rightarrow q-7 = 75q \Rightarrow 74q = -7 - \text{невозм.} \\ m+2n=q^2 &\Rightarrow q^2-7 = 75 \Rightarrow q^2 = 82 - \text{невозм.} \\ m+2n=3q^2 &\Rightarrow 3q^2-7 = 25 \Rightarrow 3q^2 = 32 - \text{невозм.} \\ m+2n=5q^2 &\Rightarrow 5q^2-7 = 15 \Rightarrow 5q^2 = 22 - \text{невозм.} \\ m+2n=15q^2 &\Rightarrow 15q^2-7 = 5 \Rightarrow 15q^2 = 12 - \text{невозм.} \\ m+2n=25q^2 &\Rightarrow 25q^2-7 = 3 \Rightarrow 25q^2 = 10 - \text{невозм.} \\ m+2n=75q^2 &\Rightarrow 75q^2-7 = 1 \Rightarrow 75q^2 = 8 - \text{невозм.} \end{aligned}$$

Возможных вариантов не нашлось, но ~~на всякий случай~~ рассмотрим второе уравнение

$$mn(m+2n+9) = 11p \cdot p$$

Тут возможны варианты:

$$\begin{aligned} m=n=p &\Rightarrow 3p+9 = 11 \Rightarrow 3p = 2 - \text{невозм.} \\ m=11, n=p &\Rightarrow 11+2p+9 = p \Rightarrow p = -22 - \text{невозм.} \\ m=p, n=11 &\Rightarrow p+22+9 = p \Rightarrow 31 = 0 - \text{невозм.} \\ m=11p, n=p &\Rightarrow 13p+9 = 1 \Rightarrow 13p = -8 - \text{невозм.} \\ m=p, n=11p &\Rightarrow 23p+9 = 1 \Rightarrow 23p = -8 - \text{невозм.} \\ m=11p^2, n=1 &\Rightarrow 11p^2+11 = 1 \Rightarrow 11p^2 = -10 - \text{невозм.} \\ n=11p^2, m=1 &\Rightarrow 22p^2+10 = 1 \Rightarrow 22p^2 = -9 - \text{невозм.} \end{aligned}$$

Итак, во 2 сл. не существует подходящих пар (m, n)

Ответ: $(5; 3)$