



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5



1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен $3x + 3$, пятый член равен $(x^2 + 2x)^2$, а девятый равен $3x^2$. Найдите x .
2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $4y + 8x$ при условии

$$\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$ и $B = m^2n + mn^2 - 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q – простые числа.
4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.
5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 8×8 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 10$, $AN = 8$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №1

За v_i будем обозначать i -тый член прогрессии. Тогда

мы можем записать следующие тождества:

$$\begin{cases} \frac{v_3 + v_5}{2} = v_4 \\ \frac{v_3 + v_9}{2} = v_6 \Rightarrow \frac{\frac{v_3 + v_5}{2} + \frac{v_3 + v_9}{2}}{2} = v_5 \\ \frac{v_4 \cdot v_6}{2} = v_5 \end{cases}$$

Теперь подставим вместо v_3, v_5, v_9 , выражения по условию, но сперва приведём уравнение к удобному виду:

$$2v_5 = \frac{2v_3 + v_5 + v_9}{2}$$

$$4v_5 = 2v_3 + v_5 + v_9$$

$$3v_5 = 2v_3 + v_9$$

$$3(x^2 + 2x)^2 = 2(3x + 3) + 3x^2$$

$$3x^4 + 12x^3 + 12x^2 = 6x + 6 + 3x^2 \quad | : 3$$

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$$

Разложим на множители:

$$(x+1)^2(x^2 + 2x - 2) = 0$$

Теперь приравняем скобки к нулю и найдём возможные x .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x+1=0$$

$$x=-1$$

$$x^2+2x-2=0$$

$$D=4+4\cdot 2=12$$

$$x_{1,2} = \frac{\pm \sqrt{12}-2}{2} = \frac{\pm 2\sqrt{3}-2}{2} = \pm\sqrt{3}-1$$

Значит, $x_1 = -\sqrt{3}-1$; $x_2 = -1$; $x_3 = \sqrt{3}-1$

Ответ: Возможно 3 значения x : $x_1 = -\sqrt{3}-1$; $x_2 = -1$; $x_3 = \sqrt{3}-1$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №2

$$\begin{cases} |x-3y| \leq 3 & (1) \\ |3x-y| \leq 4 & (2) \end{cases}$$

Давайте возьмем (2) и вычтем из него 3 раза (1).

Получим:

$$-8y \leq -8$$

$$y \leq -1$$

Делаем также, но только берем (1) и вычтем из него (2):

$$-8x \leq 0$$

$$x \leq 0$$

Значит в итоге:

$$4y + 8x \leq 4 \cdot (-1) + 8 \cdot (0) = -4$$

$$4y + 8x \leq -4 \Rightarrow \max(4y + 8x) = -4$$

Ответ: -4

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №3

$$A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n = (m+n)(m+n-9)$$

$$B = m^2n + mn^2 - 3mn = mn(m+n-3)$$

Т.к. p и q — простые, то числа $13p^2$ и $75q^2$ — нечётные.

Вузай, когда p или $q = 2$ рассмотрим позже. Тогда:

$(m+n)(m+n-9)$ — нечёт

$mn(m+n-3)$ — нечёт

Теперь рассмотрим 3 случая:

1) m, n — чётные. Тогда $(m+n)$ — чётное и $(m+n-9)$ — нечётное, но в итоге $(m+n)(m+n-9)$ — чётное.

$m \cdot n$ — чётное, $(m+n-3)$ — нечётное, но в итоге $mn(m+n-3)$ — чётное

2) m, n — нечётные. Тогда $(m+n)$ — чётное $\Rightarrow (m+n)(m+n-9)$ — чётное, $m \cdot n$ — нечётное, $(m+n-3)$ — нечётное. В итоге получаем $mn(m+n-3)$ — нечётное

3) одно чётное, одно нечётное. Тогда $(m+n-9)$ — чётное $\Rightarrow (m+n)(m+n-9)$ — чётное, $(m+n-3)$ — чётное $\Rightarrow mn(m+n-3)$ — чётное

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Из логических утверждений, приведённых ранее, видно, что $(m+n)(m+n-9)$ — всегда чётное \Rightarrow есть два варианта: либо $(m+n)(m+n-9) = 52$, либо $(m+n)(m+n-9) = 300$

Смотрим первый случай:

$$(m+n)(m+n-9) = 52$$

$$52 = 26 \cdot 2$$

$$2 \cdot 26$$

$$52 \cdot 1$$

$$1 \cdot 52$$

$$13 \cdot 4$$

$$4 \cdot 13$$

Отрицательные не берём, т.к. m, n — натуральные. А также числа $m+n$ и $m+n-9$ — разной чётности. Поэтому варианты $26 \cdot 2$ и $2 \cdot 26$ — отпадают. Смотрим оставшиеся:

$$\begin{cases} m+n = 52 \\ m+n-9 = 1 \end{cases} \text{ — нет корней, т.к. } 52-9 \neq 1$$

$$\begin{cases} m+n = 1 \\ m+n-9 = 52 \end{cases} \text{ — нет корней, т.к. } 1-9 \neq 52$$

$$\begin{cases} m+n = 13 \\ m+n-9 = 4 \end{cases}$$

$$m = 13 - n$$

$$13 - n + n - 9 = 4$$

m, n — любая пара натуральных чисел, дающих в сумме 13

$$\begin{cases} m+n = 4 \\ m+n-9 = 13 \end{cases} \text{ — нет корней, т.к. } 4-9 \neq 13$$

Итак, в первом случае получили единственное решение:

$m+n = 13$, $m, n \in \mathbb{N}$. Теперь переберём m и n , подставляя во вто-



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

рое выражение и найдем удовлетворяющие пары:

$$1. 12 \cdot (1+12-3) = 120 \neq 75$$

$$2. 11 \cdot 10 = 220 \neq 75$$

$$3. 10 \cdot 10 = 300 : 75 = 4 \quad \sqrt{4} = 2 - \text{простое} \Rightarrow (3; 10) - \text{подходит}$$

$$4. 9 \cdot 10 = 360 \neq 75$$

$$5. 8 \cdot 10 = 400 \neq 75$$

$$6. 7 \cdot 10 = 420 \neq 75$$

Итого, в первом случае нашли только пару $(3; 10)$ и $(10; 3)$

Теперь второй случай

$$(m+n)(m+n-9) = 300$$

$$300 = 300 \cdot 1$$

$$1 \cdot 300$$

$$\times 150 \cdot 2$$

$$\times 2 \cdot 150$$

$$100 \cdot 3$$

$$3 \cdot 100$$

$$75 \cdot 4$$

$$4 \cdot 75$$

$$60 \cdot 5$$

$$5 \cdot 60$$

$$\times 50 \cdot 6$$

$$\times 6 \cdot 50$$

$$\times 30 \cdot 10$$

$$\times 10 \cdot 30$$

$$20 \cdot 15$$

$$15 \cdot 20$$

Аналогично первому варианту (случаю), отмечаем пары одинаковой четности, они отмечены крестиком. И также разность чисел должна быть равна 9. И таких чисел мы не наблюдаем. Значит у нас только две пары: $(10; 3)$ и $(3; 10)$

Ответ: $(10; 3), (3; 10)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



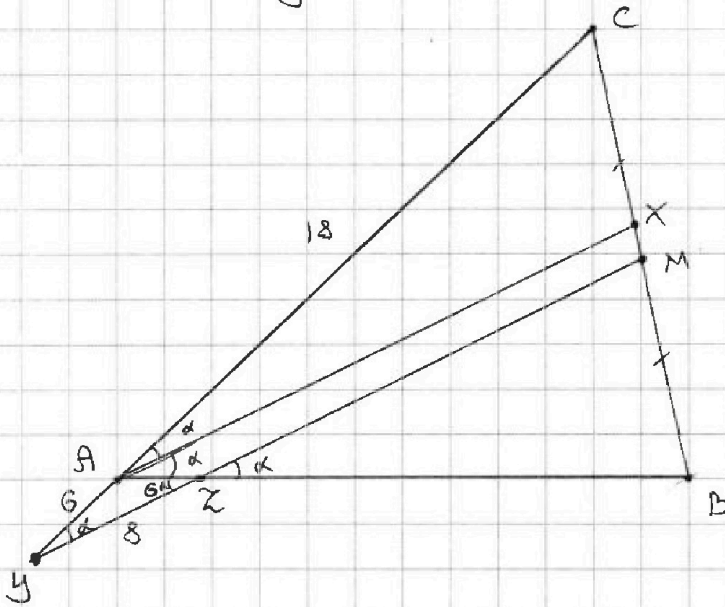
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №11

Для начала, сделаем казевый зертём:



Обозначим $\angle CAX = \angle XAB = \alpha$. Тогда в силу $AX \parallel YM$, имеем $\angle MZB = \alpha \Rightarrow \angle AZY = \alpha$ (т.к. вертикальный с $\angle MZB$)
 $\angle AYZ = \alpha$ (т.к. соответственный с $\angle CAX = \alpha$ при параллельных прямых AX и YM и секущей YC). $\Rightarrow \triangle YAZ$ - р/б
 т.к. $\angle AYZ = \angle YZA = \alpha \Rightarrow AY = AZ = 6$

Рассмотрим $\triangle YCM$ и $\triangle ACX$:

1) $\angle C$ - общий

2) $\angle CYM = \angle CAX$ (далее докажем)

$\Rightarrow \triangle YCM \sim \triangle ACX$
(по двум углам)

Приём $k = \frac{AY}{CY} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$

Теперь найдём $\cos \alpha$ по теореме косинусов для $\triangle YAZ$:



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$6^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos \alpha$$

$$36 = 100 - 96 \cdot \cos \alpha$$

⇓

$$\cos \alpha = \frac{100 - 36}{96} = \frac{64}{96} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

Далее напишем две теоремы косинусов для $\triangle CUM$ и $\triangle CAH$, учитывая, что $CH = \frac{3}{4} CM$, $AH = \frac{3}{4} MU$:

$$\begin{cases} CM^2 = 24^2 + MU^2 - 2 \cdot 24 \cdot MU \cdot \cos \alpha \\ \frac{9}{16} CM^2 = 18^2 + \frac{9}{16} MU^2 - 2 \cdot 18 \cdot \frac{3}{4} MU \cdot \cos \alpha \end{cases}$$

Подставим $\cos \alpha = \frac{2}{3}$:

$$\begin{cases} CM^2 = 576 + MU^2 - 32 MU \\ \frac{9}{16} CM^2 = 324 + \frac{9}{16} MU^2 - 18 MU \end{cases}$$

Заменим CM на x , а MU на y для удобства:

$$\begin{cases} x^2 = 576 + y^2 - 32y & \textcircled{1} \\ \frac{9}{16} x^2 = 324 + \frac{9}{16} y^2 - 18y & \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\frac{9}{16} x^2 = 324 + \frac{9}{16} y^2 - 18y$$

Как видишь, уравнения равносильны, поэтому возьмём

① и запишем, я написал лишнего, но это не повлияет на ход решения.

Теперь рассмотрим $\triangle MBZ$ и $\triangle XBA$:



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
9 ИЗ 14

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) $\angle XBA$ - острый

2) $\angle BZM = \angle BAX$ (в силу $AX \parallel MY$, соответственные углы)

\Downarrow

$\triangle MBZ \sim \triangle XBA$

Причем $k = \frac{XB}{MB} = \frac{CM + XM}{CM} = 1 + \frac{XM}{CM} = 1 + \frac{\frac{1}{4}CM}{CM} = \frac{5}{4}$

($MB = CM$, т.к. AM - медиана)

Найдём BZ :

$$\frac{5}{4}BZ - BZ = 6$$

\Downarrow

$$BZ = 24$$

Теперь напишем теорему косинусов для $\triangle MZB$, учитывая

что $CM = MB = x$, $MZ = \frac{3}{5}MY = \frac{3}{5}y$ ($\frac{3}{4}MY = \frac{5}{4}$):

$$x^2 = 576 + \frac{9}{25}y^2 - 2 \cdot 24 \cdot \frac{3}{5}y \cdot \cos \alpha$$

$$x^2 = 576 + \frac{9}{25}y^2 - \frac{96}{5}y$$

Вспомним ①:

$$x^2 = 576 + y^2 - 32y$$

Берём в систему:

$$\begin{cases} x^2 - 576 = \frac{9}{25}y^2 - \frac{96}{5}y \\ x^2 - 576 = y^2 - 32y \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
4 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{9}{25}y^2 - \frac{96}{5}y = y^2 - 32y$$

$$\frac{16}{25}y^2 = \frac{64}{5}y$$

$$\frac{16}{25}y = \frac{64}{5}$$

$$y = \frac{64}{5} \cdot \frac{25}{16} = 20$$

$$x^2 = 576 + 20^2 - 32 \cdot 20 = 576 + 400 - 640 = 336$$

$$x = \sqrt{336} = 4\sqrt{21}$$

$$CM = 4\sqrt{21}$$

$$BC = CM \cdot 2 = 8\sqrt{21} \text{ (т.к. } CM - \text{ медиана)}$$

$$\text{Ответ: } BC = 8\sqrt{21}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №5

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2} & (1) \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 + 5y^2 - \sqrt{x} & (2) \end{cases}$$

Для начала поработаем со (2) уравнением:

$$(x^4 - y^4) + (5x^2 - 5y^2) + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$(x^2 + y^2)(x+y)(x-y) + 5(x+y)(x-y) + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$(x^2 + y^2)(x+y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + 5(x+y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y}) \left((x^2 + y^2)(x+y)(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + 5(x+y)(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + 1 \right) = 0$$

Т.к. в условии задачи есть \sqrt{x} и \sqrt{y} , то $x, y \geq 0$.

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = 0$$

либо правая часть равна 0.

$$x = y$$

Но правая часть больше либо равна нулю, а равенство достигается только при $x = y = 0$. Тем самым, мы получили, что $x = y$. Теперь перетянем (1), с учётом это

то:

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2}$$

Пусть $\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = t$. Тогда:

$$t + 5 = 7 - t^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$t^2 + t - 2 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 2 = 9$$

$$t_{1,2} = \frac{\pm 3 - 1}{2}$$

$$t_1 = -2, \quad t_2 = 1$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = -2 \quad \uparrow^2$$

$$7 - 2\sqrt{6+5x-x^2} = 4$$

$$2\sqrt{6+5x-x^2} = 3 \quad \uparrow^2$$

$$4(6+5x-x^2) = 9$$

$$24 + 20x - 4x^2 = 9$$

$$4x^2 - 20x - 15 = 0$$

$$D = 400 + 4 \cdot 4 \cdot 15 = 400 + 240 = 640$$

$$x_{1,2} = \frac{\pm 8\sqrt{10} + 20}{8} = \pm \sqrt{10} + \frac{5}{2}$$

$$x = -\sqrt{10} + \frac{5}{2} \quad - \text{ не подходит, т.к. } < 0$$

$$x = \sqrt{10} + \frac{5}{2} \quad - \text{ подходит, т.к.}$$

$$6 \sqrt{\sqrt{10} + \frac{5}{2}}$$

$$3,5 \sqrt{\sqrt{10}}$$

$$12,25 \sqrt{10}$$

$$12,25 > 10 \Rightarrow 6 > \sqrt{10} + \frac{5}{2} \Rightarrow 6 - x > 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = 1 \quad \uparrow^2$$

$$7 - 2\sqrt{6+5x-x^2} = 1$$

$$2\sqrt{6+5x-x^2} = 6$$

$$\sqrt{6+5x-x^2} = 3 \quad \uparrow^2$$

$$6+5x-x^2 = 9$$

$$x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$D = 25 - 4 \cdot 3 = 13$$

$$x_{2,4} = \frac{\pm\sqrt{13} + 5}{2}$$

$$\frac{\sqrt{13} + 5}{2} \vee 6$$

$$\sqrt{13} < 5$$

\Downarrow

$$\sqrt{13} + 5 \vee 12$$

$$\frac{-\sqrt{13} + 5}{2} \geq 0$$

$$\sqrt{13} \vee 7$$

$$\sqrt{13} < 7 \Rightarrow 6 - \frac{\sqrt{13} + 5}{2} > 0$$

Значит $x_{2,4} = \frac{\pm\sqrt{13} + 5}{2}$ — подходят.

Итак, мы нашли все x , чтобы дать ответ, припишем

к ним такие же y :

$$\text{Ответ: } \left(\sqrt{10 + \frac{5}{2}}; \sqrt{10 + \frac{5}{2}} \right); \left(\frac{-\sqrt{13} + 5}{2}; \frac{-\sqrt{13} + 5}{2} \right); \left(\frac{\sqrt{13} + 5}{2}; \right.$$

$$\left. \frac{\sqrt{13} + 5}{2} \right)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №6

Всего мы имеем 81 покрашенный в разные цвета узел. Выбрать два узла из 81, это C_{81}^2 , это равно:

$$C_{81}^2 = \frac{81!}{2! \cdot 79!} = 40 \cdot 81$$

Хотелось бы сказать, что полученное число нужно поделить на 4, т.к. одному варианту соответствует 4 покраски, т.к. можно поворачивать лист, но есть один нюанс. Покраски, симметричные относительно центра дуги, поугаются не 4-мя вариантами, а двумя (это логично, т.к. после второго поворота, покрашенные узлы просто поменяются местами). Посчитаем кол-во вариантов выбрать симметричные относительно центра узлы. Таких вариантов — 80 (центральный узел исключаем). Значит способов выбрать не-симметричные — $40 \cdot 81 - 80$.
Вариантов выбрать симметричные 80, т.к. выбрав один, второй определяется однозначно. Значит итоговое кол-во вариантов равно:

$$\frac{40 \cdot 81 - 80}{4} + \frac{80}{2} = 10 \cdot 81 - 20 + 40 = 810 - 20 + 40 = 830 \text{ способов}$$

Ответ: 830 способов.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

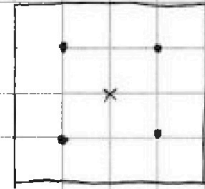
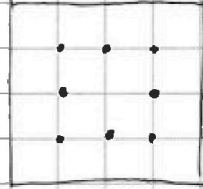
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик:

$$3x+3$$

$$(x^2+2x)^2$$

$$3x^2$$



$$x \quad x+6 \quad \underline{x+26} \quad \underline{x+36} \quad \underline{x+46} \quad \underline{x+56} \quad x+66 \quad x+76$$

$$x+26$$

$$x+46$$

$$x+86$$

$$\frac{b_3+b_5}{2} = b_4$$

$$\frac{b_3+b_9}{2} = b_6$$

$$\frac{b_4+b_6}{2} = b_5$$

1281

39

$$\begin{array}{r} \times 39 \\ 39 \\ \hline 521 \\ 295 \\ \hline 3481 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8 \\ \leftarrow 29 \\ \leftarrow 29 \\ \hline 261 \\ 58 \\ \hline 841 \end{array}$$

$$\frac{b_3+b_5}{2} + \frac{b_3+b_9}{2} = b_5$$

$$2b_5 = \frac{b_3+b_5}{2} + \frac{b_3+b_9}{2}$$

$$2b_5 = \frac{2b_3+b_5+b_9}{2}$$

$$4b_5 = 2b_3+b_5+b_9$$

$$3b_5 = 2b_3+b_9$$

$$3(x^2+2x)^2 = 2(3x+3) + 3x^2$$

$$3(x^4+4x^3+4x^2) = 6x+6+3x^2$$

$$3x^4+12x^3+12x^2 = 6x+6+3x^2$$

$$3x^4+12x^3+9x^2-6x-6=0$$

$$x^4+4x^3+3x^2-2x-2=0$$

$$1-4+3+2-2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2 \quad | \quad x+1 \\ - x^4 + x^3 \\ \hline 3x^3 + 3x^2 \\ - 3x^3 + 3x^2 \\ \hline 0 - 2x - 2 \end{array}$$

$$(x+1)(x^3+3x^2-2) = x^4+3x^3-2x+x^3+3x^2-2$$

$$(x+1)^2(x^2+2x-2)$$

$$\begin{array}{r} x^3 + 3x^2 - 2 \quad | \quad x+1 \\ - x^3 + 3x^2 \\ \hline - 2x^2 - 2 \\ + 2x^2 + 2x \\ \hline - 2x - 2 \end{array}$$

$$(x+1)(x^2+2x-2) = x^3+2x^2-2x+x^2+2x-2$$

$$x^2+2x-2 = (x^2+2x$$

$$1,5 \quad 2 \quad 2,5$$

$$0 \quad 1 \quad 3$$

$$\begin{cases} |x-3y| \leq 3 \\ |3x-y| \leq 1 \end{cases}$$

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{2} = 1$$

$$3(\sqrt{3}-1)+3$$

$$|x-3y| \leq 3$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 13 \\ \hline 13 \\ 4 \\ \hline 52 \end{array}$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} x-3y \leq 3 \\ 3y-x \geq -3 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \times 75 \\ \hline 300 \end{array}$$

$$\sqrt{2^2}$$

$$\begin{cases} 3x-y \leq 1 \\ y-3x \geq -1 \end{cases}$$

$$x \leq 3+3y$$

\mathbb{R}

$$t(t+9) = 300$$

$$t^2 + 9t - 300 = 0$$

$$D = 81 + 4 \cdot 300 =$$

$$= 1281$$

$$2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3$$

$$1281$$

$$\begin{array}{r} \times 29 \\ 29 \\ \hline 268 \\ 8 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

y

$$y = \frac{x-3}{3}$$

x

$$m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$$

$$m^2n + mn^2 - 3mn$$

$$(m+n)^2 - 9(m+n) = (m+n)(m+n-9)$$

$$\frac{7}{5} \downarrow mn(m+n-3)$$

$$(m+n)(m+n-9) = 13p^2$$

$$m+n = 13$$

$$mn(m+n-3) = 75q^2$$

$$(13k-9) \cdot 13k$$

$$\begin{array}{r} 75 \overline{) 3} \\ 25 \overline{) 5} \\ 5 \overline{) 5} \end{array}$$

$$3 \cdot 5^2$$

$$169k^2 - 117k =$$

-

$$mn(m+n-9) + 6mn = 75q^2$$

~~1308~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$(m+n)(m-n-9)$ - керем
 $mn(m-n-3)$ - керем
 $13p^2$ - керем
 $75q^2$ - керем

m -зем
 n -зем
 m -зем
 n -керем
 m -керем
 n -керем

21
 21
 21
 21

18
 18
 18
 18

$24y$
 24
 24
 24

$180\beta + \alpha$
 180β
 $\beta - \alpha$

$130 - \beta + \alpha + x = 150$
 $-\beta + \alpha + x = 0 \Rightarrow \frac{4 \cdot 24}{3}$
 $x = \beta - \alpha$

$64 = 72 - 72 \cdot \cos \alpha$
 $\cos \alpha = \frac{8}{72} = \frac{1}{9}$
 $\frac{5}{4}x - x = 6$
 $\frac{1}{4}x = 6$
 $x = 24$

$\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$
 $27 \cdot \frac{2}{3}$
 $18 \cdot \frac{9}{16} =$
 $=$
 $\frac{96}{3} =$
 $= 32$

$\frac{3}{16}$
 $\frac{16}{96}$
 $\frac{16}{256}$

$\frac{11}{9}$
 $\frac{30}{24} = \frac{5}{4}$

$\frac{6}{18}$
 $\frac{18}{18}$
 $\frac{144}{18}$
 $\frac{324}{324}$

$\frac{1}{24}$
 $\frac{24}{96}$
 $\frac{48}{576}$

$576 \cdot \frac{9}{16}$
 $\frac{24 \cdot 24 \cdot 3}{16}$
 $\frac{4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 9}{16}$

$\frac{48}{64}$
 $\frac{32}{5}$
 $\frac{160}{96}$

$2 \cdot 24 \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{3}$
 $\frac{2 \cdot 24}{7}$

$32 \cdot \frac{9}{16}$
 18

$\frac{4}{3}$
 $\frac{32}{9}$
 $\frac{36}{324}$

$\frac{3}{16}$
 $\frac{16}{96}$
 $\frac{16}{256}$

$\frac{11}{9}$
 $\frac{30}{24} = \frac{5}{4}$

$\frac{6}{18}$
 $\frac{18}{18}$
 $\frac{144}{18}$
 $\frac{324}{324}$

$\frac{1}{24}$
 $\frac{24}{96}$
 $\frac{48}{576}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$|x-3y| \leq 3$$

$$|3x-y| \leq 1$$

$$k(x-3y)$$

$$n(3x-y)$$

~~$$k+3n \leq 3m$$~~

$$3k$$

$$x \geq 3y$$

$$3x - y \leq 1$$

$$2x + 2y$$

$$x - 5y$$

$$-2x + 4y$$

$$x + 3y$$

$$4x + 2y$$

$$7x + y$$

$$8y \leq -8$$

$$y \leq -1$$

$$x - 3y = 3$$

$$3x - y = 1$$

$$\begin{array}{r} 35 \\ \times 35 \\ \hline 175 \\ 105 \\ \hline 1225 \end{array}$$

$$3x - 9y = 9$$

$$3x - y = 1$$

$$9 + 9y = y - 1$$

$$8y = -8$$

$$y = -1$$

$$x = 0$$

$$-3x \leq 0$$

$$x \geq 0$$

$$6\sqrt{\sqrt{10}} + 2,5$$

$$9,5\sqrt{\sqrt{10}}$$

$$1\sqrt{-\sqrt{10}} + 2,5$$

$$1,5\sqrt{-\sqrt{10}}$$

$$3 \sqrt{9} < \sqrt{10} < \sqrt{16}$$

$$3 < \sqrt{10} < 4$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2} \\ x^4 + 5x^2 + \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2 \end{cases}$$

$$x^4 + 5x^2 + \sqrt{x} = y^4 + 5y^2 + \sqrt{y}$$

$$(x+1)(6-y) = 6x - xy + 6 - y$$

$$(x^4 - y^4) + (5x^2 - 5y^2) + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$(x^2 + y^2)(x+y)(x-y) + 5(x+y)(x-y) + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$$

$$(x^2 + y^2)(x+y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + 5(x+y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) +$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y}) \left((x^2 + y^2)(x+y)(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + 5(x+y)(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + 1 \right) = 0$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2}$$

$$(x+1)(6-x) = 6x - x^2 + 6 - x = -x^2 + 5x + 6$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} = t$$

$$t + 5 = 2 \cdot (7 - t^2)$$

$$x+1+6-x = 7 - \sqrt{\dots} = t^2$$

$$7 - t^2$$

$$t + 5 = 7 - t^2$$

$$t^2 + t - 2 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 2 = 9$$

$$\frac{\pm 3 - 1}{2}$$

$$t + 5 = 14 - 2t^2$$

$$1 + 4 \cdot 2 = 9$$

$$2t^2 + t - 9 = 0$$

$$-2 \quad 1$$