МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

# 10 КЛАСС. Вариант 5

1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен $3x+3$, пятый член равен $(x^2+2x)^2$, а девятый равен $3x^2$. Найдите $x$.

2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $4y+8x$ при условии

$$\begin{cases} |x-3y| \leqslant 3, \\ |3x-y| \leqslant 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары $(m, n)$ натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$ и $B = m^2n + mn^2 - 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $75q^2$, где $p$ и $q$ – простые числа.

4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе $AX$ треугольника $ABC$, проходящая через середину $M$ его стороны $BC$, пересекает сторону $AB$ и продолжение стороны $AC$ в точках $Z$ и $Y$ соответственно. Найдите $BC$, если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.

5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат $8 \times 8$ клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

7. [6 баллов] В треугольнике $ABC$ на медиане $AM$ и биссектрисе $CL$ как на диаметрах построены окружности $\Omega$ и $\omega$ соответственно, пересекающиеся в точках $P$ и $Q$. Отрезок $PQ$ параллелен высоте треугольника $ABC$, проведённой из вершины $B$. Окружность $\Omega$ пересекает сторону $AC$ повторно в точке $N$. Найдите длины сторон $AC$ и $BC$, если $AB = 10$, $AN = 8$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ☒ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

пусть $d$ - разность заданной арифм. прогрессии !

1) Если $3x+3$ - третий член прогрессии, $(x^2+2x)^2$ - пятый, а $3x^2$ - седьмой, то по определению арифм. прогрессии: $(x^2+2x)^2 = (3x+3)+2d$;

$3x^2 = (x^2+2x)^2 + 4d \Rightarrow \begin{cases} (x^2+2x)^2+4d = 3x^2 & (1) \\ (3x+3)+2d = (x^2+2x)^2 & (2) \end{cases}$ Из (2) $\Rightarrow 2d = (x^2+2x)^2-(3x+3)$

$\Rightarrow 4d = 2(x^2+2x)^2 - 2(3x+3)$

$\Rightarrow$ по (1): $(x^2+2x)^2 + 2(x^2+2x)^2 - 6x - 6 = 3x^2 \Rightarrow 3(x^2+2x)^2 = 3(x^2+2x)+6$

пусть $t = x^2+2x \Rightarrow (1) \Rightarrow 3t^2 = 3t+6 \Rightarrow t^2 = t+2 \Rightarrow t^2-t-2=0$, но

$t^2-t-2 = (t-2)(t+1) \Rightarrow (t-2)(t+1)=0 \Rightarrow$ 1сл.: $t=2 \Rightarrow x^2+2x=2 \Rightarrow x^2+2x-2=0$:

решим кв. уравнение: $D = (+2)^2 - 4\cdot1\cdot(-2) = 4+8=12 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} =$

$= \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$.

2сл.: $t+1=0 \Rightarrow t=-1 \Rightarrow x^2+2x+1=0$ ; $D = 2^2-4\cdot1=0 \Rightarrow x = \frac{-2}{2} = -1$

$\Rightarrow$ Ответ: $x \in \{-1+\sqrt{3}; -1-\sqrt{3}; -1\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

1) Заметим, что при фиксированном $y$: $4y+8x$ растёт при ~~увеличении~~ увеличении $x$, также при фиксированном $x$: $4y+8x$ растёт при увеличении $y$.

2) Рассм. первое неравенство: $|x-3y| \le 3$

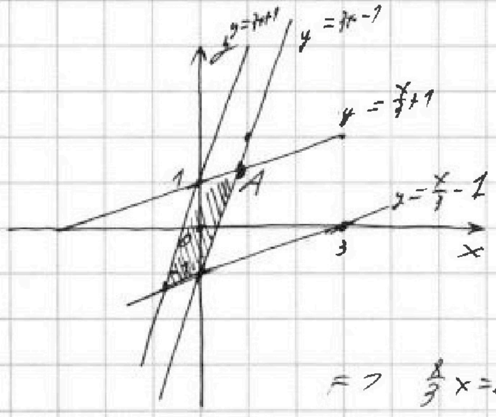
~~Рассм. прямую $x-3y=3$: $y=\frac{x}{3}-1$. Тогда~~ чтобы: $|x-3y|\le 3$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3y \le 3 \\ x-3y \ge -3 \end{cases} \Leftrightarrow (*) \begin{cases} y \ge \frac{x}{3}-1 & \text{— полуплоскость} \\ y \le \frac{x}{3}+1 & \text{— полуплоскость} \end{cases}$

Рассм. второе неравенство: $|3x-y| \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-y \le 1 \\ 3x-y \ge -1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow (**) \begin{cases} y \ge 3x-1 & \text{— полуплоскость} \\ y \le 3x+1 & \text{— полуплоскость} \end{cases}$

3)




Рассмотрим систему (*) и (**) — это параллелограмм — следует из области пересечения указанных полуплоскостей. Тогда по п. 1 в точке A на графике x и y максимальны (как x, так и y) для допустимой области значений.

для A: $\begin{cases} y=3x-1 \\ y=\frac{x}{3}+1 \end{cases} \Rightarrow 3x-1=\frac{x}{3}+1$

$\Rightarrow \frac{8}{3}x=2 \Rightarrow x=\frac{6}{8}=0{,}75 \Rightarrow y=3x-1=3\cdot 0{,}75-1=$

$=2{,}25-1=1{,}25 \Rightarrow 4y+8x=4\cdot 1{,}25+8\cdot 0{,}75=5+6=11$

Ответ: 11

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ☐ | ☐ | ☒ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$5^2\cdot 3\cdot 9=75\cdot 9=$
$=675$; $675\cdot 4 = 2700$

1) $A=m^2+2mn+n^2-9m-9n=(m+n)^2-9(m+n)=(m+n)(m+n-9)$

$B=m^2n+mn^2-3mn=mn(m+n-3)$.

1сл. $(m+n)(m+n-9)=13p^2$; $mn(m+n-3)=75q^2$. $m,n\in\mathbb{N}$; $p,q\in\mathbb{P}\Rightarrow$

$m+n-9=\frac{13p^2}{m+n}>0\Rightarrow m+n>9$. $13p^2 ⋮ m+n>9\Rightarrow$ либо $m+n=13$, либо $m+n=13p$, либо $m+n=p$, либо $m+n=13p^2$. ~~...~~ Если $m+n=13\Rightarrow(m+n)(m+n-9)=13\cdot 4=13p^2\Rightarrow p^2=4$ $\Rightarrow p=2\in\mathbb{P}$, также $mn(m+n-3)=10mn=5^2\cdot 3\cdot q^2\Rightarrow 5^2\cdot 3\cdot q^2 ⋮ 2\Rightarrow q=2$, т.к. $q\in\mathbb{P}$ [$(5^2\cdot 3,2)=1$] $\Rightarrow 10mn=5^2\cdot 3\cdot 2^2\Rightarrow mn=2\cdot 3\cdot 5$, если $m=2$, то $n=15>m+n$ — ✗. Если $m=3$, то $n=10$ — подходит, если $m=5$, то $n=6$ — не подходит, ~~если~~ если $m=2\cdot 3\cdot 5$, то $m+n>13$ — ✗ $\Rightarrow$ т.к. дан случай симметричный, то здесь $\begin{cases}m=3\\n=10\end{cases}$ и $\begin{cases}n=10\\m=3.\end{cases}$ | Если $m+n=13p$, то $m+n-9=\frac{13p^2}{13p}=p$

$\Rightarrow 13p-9=p\Rightarrow 12p=9\Rightarrow p=\frac{9}{12}\notin\mathbb{P}$ — ✗. Если $m+n=p$, то $m+n-9=\frac{13p^2}{p}=$ $=13p>m+n$ — ✗, Если $m+n=13p^2$, то $m+n-9=1\Rightarrow m+n=10\Rightarrow 13p^2=10$, тогда $10 ⋮ 13$ — ✗.

2сл. $(m+n)(m+n-9)=5^2\cdot 3\cdot q^2$; $mn(m+n-3)=13p^2$. Заметим, что тогда, чтобы $(m+n)(m+n-9) ⋮ 3$, нужно, чтобы либо $m+n ⋮ 3$, либо $m+n-9 ⋮ 3$.

Если $n+m ⋮ 3\Rightarrow m+n-3 ⋮ 3\Rightarrow mn(m+n-3) ⋮ 3\Rightarrow 13p^2 ⋮ 3$ и т.к. $(13,3)=1$, то $p^2 ⋮ 3\Rightarrow p=3$, т.к. $p\in\mathbb{P}$ $\Rightarrow 13p^2=13\cdot 9$. ~~Также~~ тогда и $m+n-9 ⋮ 3$, т.к. $9 ⋮ 3$ $\Rightarrow(m+n) ⋮ 3$ и $(m+n-9) ⋮ 3\Rightarrow(m+n)(m+n-9) ⋮ 9$, но т.к. если $q\neq 3$, то $5^2\cdot 3\cdot q^2 \not⋮ 9$, то $q=3=p\in\mathbb{P}\Rightarrow$ ~~$(m+n)(m+n-9)=5^2\cdot 3\cdot 9$, если $a=m+n$, то $a^2-9a-5^2\cdot 3\cdot 9=0\Rightarrow a_{1,2}=\frac{9\pm\sqrt{81+4\cdot 5^2\cdot 3\cdot 9}}{2}$~~ ~~$a^2-9a$~~ ~~$=\ldots$~~ Заметим, что тогда $mn(m+n-3) ⋮ 9$, если б.о.о. $m ⋮ 3$, то $n ⋮ 3$, т.к. $m+n ⋮ 3\Rightarrow mn(m+n-3) ⋮ 27$ ~~...~~ $\Rightarrow 13\cdot 9 ⋮ 27$ — ✗. тогда $(m+n-3) ⋮ 9$ $\Rightarrow(m+n)(m+n-9)=5^2\cdot 3\cdot 3^2=675$; $a=m+n\Rightarrow a^2-9a-675=0$. ~~Заметим, что тогда~~ $\Rightarrow a=\frac{9\pm\sqrt{81+4\cdot 675}}{2}=\frac{9\pm\sqrt{2781}}{2}$, но $52^2=2704<2781<53^2=(52+1)^2=2704+2\cdot 52+1$ $\Rightarrow a\notin\mathbb{N}$, т.к. $\sqrt{2781}$ — иррац. — ✗. Если же $m+n-9 ⋮ 3$, то т.к. $9 ⋮ 3$, то $m+n ⋮ 3$ $\Rightarrow(m+n)((m+n)-9) ⋮ 9\Rightarrow q=3$ — далее ~~...~~ аналогично получим ур-ние с ✗. Ответ: $\begin{matrix}m=10\\n=3\end{matrix}$ и $\begin{matrix}m=3\\n=10\end{matrix}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☒ | ☐ | ☐ |

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

1) $\begin{cases} \sqrt{x+1}-\sqrt{6-y}+5=2\sqrt{6+5x-y^2} \quad (1) \\ x^4+5x^2-\sqrt{y}=y^4-\sqrt{x}+5y^2 \quad (2) \end{cases}$ Рассм. $f(x)=x^4+5x^2+\sqrt{x}$. ~~Заметим, что эта функция~~

определена на $x\geq 0$ и ~~прак возрастает возрастающая~~ строго возрастает по $x$ $\Rightarrow f(x)=f(y)$ ($x,y\geq 0$)

$\Leftrightarrow x=y$, т.к. если б.о.о. ~~...~~ $x>y$, то $x^4>y^4$, $5x^2>5y^2$,

$\sqrt{x}>\sqrt{y} \Rightarrow f(x)>f(y)$.

2) Рассм. (2): $x^4+5x^2-\sqrt{y}=y^4-\sqrt{x}+5y^2 \Rightarrow x^4+5x^2+\sqrt{x}=y^4+5y^2+\sqrt{y}$

$\Rightarrow f(x)=f(y) \Rightarrow x=y$ по п. 1

Рассм. (1): $\sqrt{x+1}-\sqrt{6-y}+5=2\sqrt{6+5x-y^2}$ (~~...~~)

$\Rightarrow \sqrt{x+1}-\sqrt{6-x}+5=2\sqrt{6+5x-x^2}$ (по п. 2) Заметим, что $(6-x)(x+1)=$

$=-x^2+5x+6 \Rightarrow$ пусть $a=\sqrt{x+1}$; $b=\sqrt{6-x} \Rightarrow a-b+5=2ab$

$\Rightarrow (a-b)^2=a^2-2ab+b^2=a^2-(a-b)-5+b^2 \Rightarrow (a-b)^2+(a-b)=a^2+b^2-5$

$\Rightarrow$ т.к. $a^2=(\sqrt{x+1})^2=x+1$, а $b^2=(\sqrt{6-x})^2=6-x$, то $(a-b)^2+(a-b)=x+1+6-x-5=$

$=2 \Rightarrow$ если $t=(a-b)$, то $t^2+t=2 \Rightarrow t^2+t-2=0 \Rightarrow (t+2)(t-1)=0$

1 и. $t=1 \Rightarrow \sqrt{x+1}-\sqrt{6-x}=1 \Rightarrow$ возведём в $^2$ и $x+1-2\sqrt{6+5x-x^2}+6-x=1$

$\Rightarrow 2\sqrt{6+5x-x^2}=6 \Rightarrow \sqrt{6+5x-x^2}=3 \Rightarrow 6+5x-x^2=9 \Rightarrow x^2-5x+3=0$

$\Rightarrow$ Д: $x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{5^2-4\cdot 3}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{13}}{2}$, то $x$: $5-\sqrt{13}>0 \Rightarrow x+1>0$;

$\frac{5+\sqrt{13}}{2}<\frac{5+4}{2}=4,5 \Rightarrow x<6 \Rightarrow 6-x>0$ — подходит.

2 и. $t=-2 \Rightarrow \sqrt{x+1}-\sqrt{6-x}=-2 \Rightarrow x+1-2\sqrt{6+5x-x^2}+6-x=4$

$\Rightarrow 2\sqrt{6+5x-x^2}=3 \Rightarrow \sqrt{6+5x-x^2}=\frac{3}{2} \Rightarrow 6+5x-x^2=\frac{9}{4} \Rightarrow x^2-5x+\frac{9}{4}-6=0$

$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-4(\frac{9}{4}-6)}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{40}}{2}$; $\sqrt{40}>5 \Rightarrow 5-\sqrt{40}<0$ — меньший $x$ нам не подходит, т.к.

в (2) $\sqrt{x}$ есть. и $\frac{5+\sqrt{40}}{2}$ ~~...~~ $<\frac{5+7}{2}=6 \Rightarrow 6-x>0$ — подходит

Ответ: $\left(\frac{5+\sqrt{13}}{2}, \frac{5+\sqrt{13}}{2}\right)$; $\left(\frac{5-\sqrt{13}}{2}, \frac{5-\sqrt{13}}{2}\right)$; $\left(\frac{5+\sqrt{40}}{2}, \frac{5+\sqrt{40}}{2}\right)$

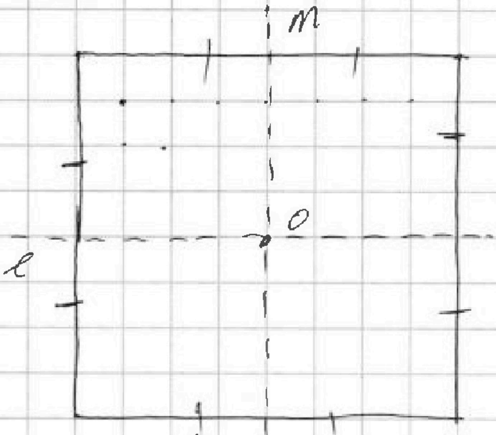
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

1) Посчитаем кол-во узлов во всём квадрате. У нас есть 9 столбцов с узлами и в каждом 9 узлов => всего в рассматриваемом имеем $9\cdot 9=81$ узел. Заметим, что квадрат (любой) совмещается с собой при повороте относительно центра на 90 и 180 градусов.



Посчитаем, сколько всего способов покраски без учёта поворотов: это $C_{81}^2 = \frac{81!}{79!\cdot 2} = \frac{80\cdot 81}{2} = 40\cdot 81$

2) Заметим, что при повороте на 180° возможны 2 случая: 1сл. обе точки находятся в 1 полуплоскости отн. $l$ и 2сл. в разных полуплоскостях. Заметим, что ~~из общего количества~~ в числе ~~$N = 40\cdot 81$ каждая пара точек войдёт 2 раза~~ если при повороте на 180° пара совмещается сама с собой, то это уже учтено в $N$, если нет, то мы делим пары $N$ на 2, т.к. во 1сл. точки в месте перейдут в противоположную полуплоскость, а во 2сл. останутся в разных $\Rightarrow N \to \frac{N}{2} = 20\cdot 81$ – каждой раскраске соотв. пара, с которой она совмещается поворотом на 180° относ. центра.

3) При повороте на 90°: Разобьём квадрат на 4 равные части $l$ и $m$. Более рассмотрим, в которых не участвует центр квадрата $O$. Заметим, что у каждой есть пара, с которой она совмещается поворотом на 90°, причём ни одна из таких пар не была рассмотрена в п.2, т.к. каждая точка переходит в полуплоскость, на которые делит плоскость $m$ (если была в полуплоск. $l$ или на $m$, если была на $l$), или в полуплоскость, на которые делит плоскость $l$ (если была в полуплоск. $m$, или на $l$, если была на $m$) => случаи 2 и 3 пересекаются только если одна из закрашенных точек $= O$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☒ | ☐ |

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Тогда рассм. все случаи, когда загорится 0 и ещё одна из оставшихся 80 точек. Их 80 $\Rightarrow$ всего случаев: $\underbrace{\frac{n}{2}}_{\text{пол.2}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{пол.3}} + \underbrace{80}_{\text{случай 0}} =$

$= \frac{40 \cdot 81}{4} + 80 = 20 \cdot 81 + 80 = 1620 + 80 = 1700.$

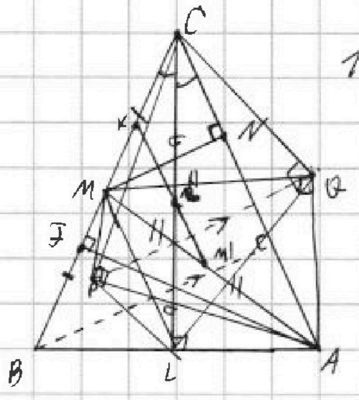
Ответ: 1700

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☒ |

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!




1) Пусть $L'$ и $M'$ — середины $CL$ и $AM$ соотв. Тогда $L'$ и $M'$ — центры $\omega$ и $\Omega$ соотв. Заметим, что $\deg(P,\omega)=\deg(P,\Omega)=0=\deg(Q,\omega)=\deg(Q,\Omega)$ $\Rightarrow PQ$ — радикальная ось $\omega$ и $\Omega \Rightarrow PQ \perp L'M'$. Но $PQ \parallel$ высоте из $B$, а высота из $B \perp AC$ $\Rightarrow L'M' \parallel AC$. $\{K\}=(L'M')\cap(BC)$, тогда в $\triangle AMC$: $M'$ — середина $AM$ и $M'K \parallel AC$ $\Rightarrow M'K$ — сред. линия $\triangle AMC \Rightarrow K$ — сер. $CM$. Тогда в $\triangle CML$: $KL'$ — ср. линия $\Rightarrow KL' \parallel ML \Rightarrow ML \parallel M'L' \parallel AC \Rightarrow$ по т. Фалеса для $\angle CBA$ и $(ML \parallel AC)$: $\frac{BM}{CM}=\frac{BL}{AL} \Rightarrow \frac{BL}{AL}=\frac{1}{1}=1 \Rightarrow BL=AL \Rightarrow CL$ — биссектриса и медиана $\triangle ABC \Rightarrow \triangle ABC$ — р/б ($AC=BC$) и $CL$ — высота. $AB=10 \Rightarrow AL=BL=\frac{AB}{2}=5$. ~~Обозн~~ Пусть $AF$ — высота в $\triangle ABC$, тогда $\angle MFA=90^\circ$ $\Rightarrow F \in \Omega$. Тогда $FM$ и $AN$ — хорды $\Omega \Rightarrow$ для т. $C$: $CN\cdot CA=CM\cdot CF$.

Пусть $AC=x$, тогда $CN=AC-AN=x-8$; $CM=\frac{BC}{2}=\frac{AC}{2}=0{,}5x$; пусть $CF=y$, тогда Заметим, что т.к. $CL$ — высота, то $L$ и $F$ — основания высот из $C$ и $A$ в $\triangle ABC \Rightarrow ALFC$ — впис. $\Rightarrow$ т.к. $\{B\}=(AL)\cap(CF)$, то $BL\cdot BA=BF\cdot BC$.

$BF=BC-CF=x-y$; $BL\cdot BA=5\cdot 10=50 \Rightarrow x(x-y)=50$;

Из утверждения: $CN\cdot CA=CM\cdot CF$: $(x-8)\cdot x=0{,}5x\cdot y \Rightarrow x-8=0{,}5y$

$\Rightarrow y=2x-16 \Rightarrow x(x-(2x-16))=50 \Rightarrow x(-x+16)=50$

$\Rightarrow -x^2+16x=50 \Rightarrow x^2-16x+50=0$: $x_{1,2}=\frac{16\pm\sqrt{16^2-4\cdot 50}}{2}$

$=\frac{16\pm\sqrt{56}}{2}=8\pm\sqrt{14}$, но если $AC<8$, то $\Omega$ пересечёт повторно $(AC)$ не на стороне $\Rightarrow AC=BC=8+\sqrt{14}$

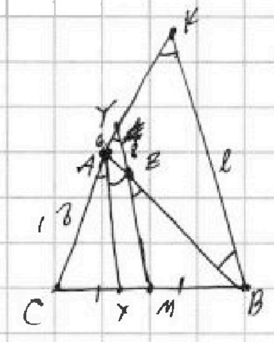
Ответ: $AC=BC=8+\sqrt{14}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ☐ | ☐ | ☐ | ☒ | ☐ | ☐ | ☐ |

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!




1) $\angle MZB = \angle XAB$ – соот. углы при ($MZ \parallel AX$) и $\angle MZB = \angle AZY$

Также из $MY \parallel AX \Rightarrow \angle CAX = \angle CYZ \Rightarrow$ т.к. $AX$ – биссектриса, то $\angle AYZ = \angle YZA \Rightarrow \triangle AYZ$ – р/б $\Rightarrow AZ = AY = 6$

$\Rightarrow CY = AC + AY = 24$. Проведём ч/з т.В. прямую $l \parallel MY$ и $AX$, пусть $\{K\} = (AC) \cap l$. Заметим, что тогда в $\triangle BKC$: $M$ – середина $BC$ и $MY \parallel BK$ $\Rightarrow MY$ – ср. линия в $\triangle CBK$ $\Rightarrow CY = YK$

$\Rightarrow YK = 24 \Rightarrow AK = KY + AY = 30$ и т.к. $ZY \parallel BK$, то $\triangle AZY \sim \triangle ABK$

$\Rightarrow \triangle ABK$ – р/б $\Rightarrow AK = AB \Rightarrow AB = 30$. Также т.к. $\triangle AYZ \sim \triangle AKB$, то

$\frac{AY}{AK} = \frac{YZ}{BK} \Rightarrow BK = \frac{AK \cdot YZ}{AY} = \frac{30 \cdot 8}{6} = 40$; $MY$ – ср. линия в $\triangle CKB$

$\Rightarrow MY = \frac{BK}{2} = 20 \Rightarrow$ Т. косинусов для $\triangle AYZ$: и $\angle AYZ = \alpha$, то $= \angle YZA = \angle$ $AZ^2 = AY^2 + YZ^2 - 2AY \cdot YZ \cdot \cos\alpha$

$\Rightarrow 6^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos\alpha \Rightarrow 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos\alpha = 8^2 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow$ Т. косинусов для $\triangle CYM$: $CM^2 = CY^2 + YM^2 - 2 \cdot CY \cdot YM \cdot \cos\alpha =$

$= 24^2 + 20^2 - 2 \cdot 24 \cdot 20 \cdot \frac{2}{3} = 576 + 400 - 640 = 976 - 640 = 336$

$\Rightarrow CB = 2CM = 2\sqrt{336} = 4\sqrt{84} = 8\sqrt{21}$

Ответ: $8\sqrt{21}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Черновик.

$4\cdot 75+4\cdot 9$ $\quad 4\cdot 84=4\cdot 4\cdot 21$ $\quad 300:4=75$ $\quad 75+9$

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9$ ($a_3 = 3x+3$, $a_5=(x^2+2x)^2$, $a_7 = 3x^2$); $+d$ $+d$ $+d$ $+d$ $+d$ $+d$

$m^2+2mn+n^2-9m-9n$ $\quad 2\cdot 2\cdot 3\cdot 70\cdot \frac{2}{3}$

$m^2n+mn^2-3mn$

$(0\times 3)=\frac{17}{2}$ $\quad \frac{3}{4}-\frac{1}{4}$ $\quad (13p)^2$ $\quad 2\cdot 3\cdot 70\cdot 2$

$4\cdot 3\cdot 20$

$3x+3+2d=(x^2+2x)^2 \Rightarrow 2d=(x^2+2x)^2-3x-3$

$4d=2(x^2+2x)^2-6x-6$

$(m+n)^2-9(m+n)$ $\quad 37\cdot 20=640$

$(x^2+2x)^2+4d=3x^2$

$(m+n)(m+n-9)$

$(x^2+2x)^2+2(x^2+2x)^2-6x-6=3x^2$

$144 \cdot 4 = 576$

$3(x^2+2x)^2=3x^2+6x+6=3(x^2+2x)+6$

$5^2\cdot 3\cdot 9^2$

$3(59)^2$

$3t^2=3t+6$

$t^2=t+2$

$t^2-t-2=0$ $\quad 6^2=6^2+8^2-2\cdot 6\cdot 8\cos\alpha$

$(t-2)(t+1)=0$ $\quad |x-3y|=3$

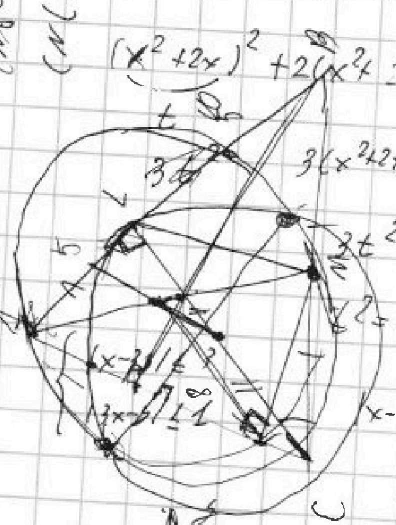
$x^2+2x=2$ $\quad 2\cdot 6\cdot 8\cdot\cos\alpha=8^2$

$|x-3y|=3$ $\quad 2\cdot 6\cdot\cos\alpha=8$

$x^2+2x-2=0$ $\quad D=2^2-4\cdot 1\cdot(-2)=4+8=12$

$\cos\alpha=\frac{8}{2\cdot 6}=\frac{2}{3}$

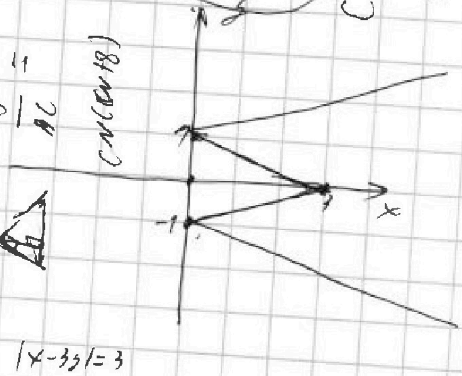
$\frac{-2\pm\sqrt{12}}{2}=\frac{-2\pm 2\sqrt{3}}{2}=-1\pm\sqrt{3}$



$x^2+2x=-1$

$x^2+2x+1=0$ $\quad D=2^2-4\cdot 1=0$ $\quad x\in\{-1; -1+\sqrt{3}; -1-\sqrt{3}\}$

$x=\frac{-2}{2}=-1$



$\sin\alpha=\sqrt{1-\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

$mn(m+n-3)=(13p)^2$

$|x-3y|=3$

$x\geq 3$ $\quad y\geq 0$ $\quad x-3y=3$ $\quad (13p)^2 \vdots m$ $\quad \cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha-(1-\cos^2\alpha)=2\cos^2\alpha-1$

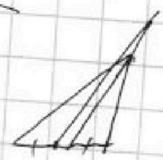
$x-3y=-3$ $\quad m=1$

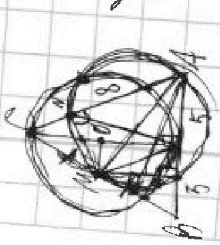
$m=13$

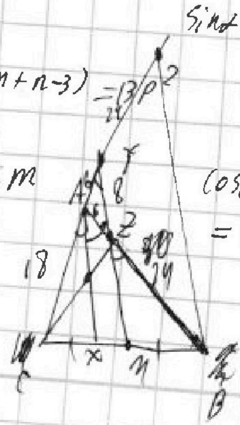
$x=3y+3$ $\quad m=p$

$y=\frac{x}{3}-1$

$2\cdot\frac{4}{9}-1=-\frac{1}{9}$







На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Черновик.

$(m+n)^2-9(m+n)$

$mn(m+n-3)=5^2\cdot 3\cdot 9^2$

$(m+n)(m+n-9)$

$(m+n)(m+n-9)=13p^2$

$m+n>9$

$13p^2 : m+n>9$

$3x-y=1$

$y=3x-1$

$3x-y=-1$

$y=3x+1$

$3-1=0$

$51^2=2601+101+1$

$=2704$

$50^2=2500$

$51^2=50^2+250+1$

$=2601$

$(3x-y)^2\le 1$

$1{,}5+0{,}75=2{,}25$

$9x^2-6xy+y^2\le 1$

$y=\frac{x}{3}+1$

$\frac{x}{3}+1=3x-1$

$2=(3-\frac{1}{3})x=\frac{8}{3}x$

$y=3x-1$

$6=8x$

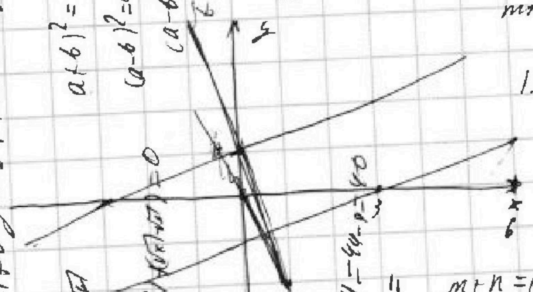
$x=\frac{6}{8}=0{,}75$

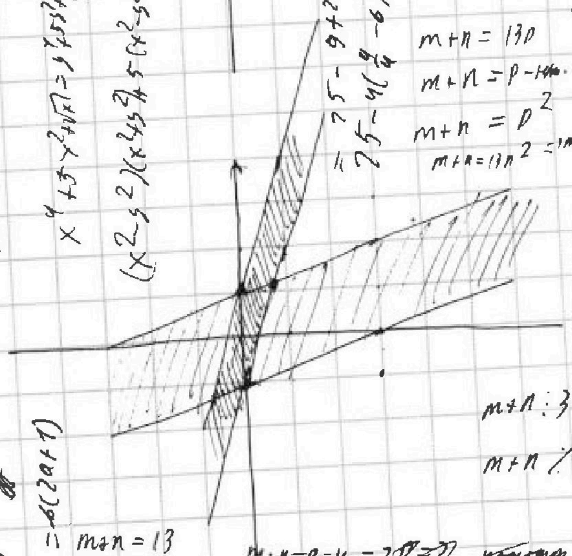
$y=3\cdot 0{,}75-1=1{,}25$

$m+n=13$

$m+n=13p$

$m+n=p^2$





$m+n : 3 \Rightarrow 13p^2 : 3 \Rightarrow p=3$

$m+n$ не кратно $3 \Rightarrow$ ...

$m+n=13$

$m+n-9=4 \Rightarrow p=2$

$m+n-3=10 : 2 \Rightarrow ...$

$m+n=13p \Rightarrow m+n-9=p$

$\Rightarrow 13p-9=p$

$\Rightarrow 12p=9$

$p=\frac{9}{12}$

$5^2\cdot 3\cdot 2^2=10\cdot mn$

$5\cdot 3\cdot 2=mn$

$m+n=13$

$\boxed{m=3 \quad m=10 \\ n=10 \quad n=3}$