МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 5

1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен $3x+3$, пятый член равен $(x^2+2x)^2$, а девятый равен $3x^2$. Найдите x.

2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $4y+8x$ при условии

$$\begin{cases} |x-3y| \leqslant 3, \\ |3x-y| \leqslant 1. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все пары (m,n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$ и $B = m^2n + mn^2 - 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q – простые числа.

4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC, проходящая через середину M его стороны BC, пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC, если $AC=18$, $AZ=6$, $YZ=8$.

5. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 8×8 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q. Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC, проведённой из вершины B. Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N. Найдите длины сторон AC и BC, если $AB=10$, $AN=8$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 [x] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

пусть d - разность заданной арифм. прогрессии !

1) Если $3x+3$ - третий член прогрессии, $(x^2+2x)^2$ - пятый, а $3x^2$ - седьмой,

то по определению арифм. прогрессии: $(x^2+2x)^2=(3x+3)+2d$;

$3x^2=(x^2+2x)^2+4d \Rightarrow \begin{cases}(x^2+2x)^2+4d=3x^2 & (1)\\ (3x+3)+2d=(x^2+2x)^2 & (2)\end{cases}$ Из (2) $\Rightarrow 2d=(x^2+2x)^2-(3x+3)$

$\Rightarrow 4d=2(x^2+2x)^2-2(3x+3)$

$\Rightarrow$ по (1): $(x^2+2x)^2+2(x^2+2x)^2-6x-6=3x^2 \Rightarrow 3(x^2+2x)^2=3(x^2+2x)+6$

пусть $t=x^2+2x \Rightarrow (1) \Rightarrow 3t^2=3t+6 \Rightarrow t^2=t+2 \Rightarrow t^2-t-2=0$, но

$t^2-t-2=(t-2)(t+1) \Rightarrow (t-2)(t+1)=0 \Rightarrow$ 1сл. $t=2 \Rightarrow x^2+2x=2 \Rightarrow x^2+2x-2=0$:

решим кв. уравнение: $D=(+2)^2-4\cdot1\cdot(-2)=4+8=12 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{12}}{2}=$

$=\frac{-2\pm2\sqrt{7}}{2}=-1\pm\sqrt{7}$.

2сл. $t+1=0 \Rightarrow t=-1 \Rightarrow x^2+2x+1=0$; $D=2^2-4\cdot1=0 \Rightarrow x=\frac{-2}{2}=-1$

$\Rightarrow$ Ответ: $x \in \{-1+\sqrt{7}; -1-\sqrt{7}; -1\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

1) Заметим, что при фиксированном y: $4y+8x$ растёт при ~~увеличении~~ увеличении x, также при фиксированном x: $4y+8x$ растёт при увеличении y.

2) Рассм. первое неравенство: $|x-3y| \le 3$

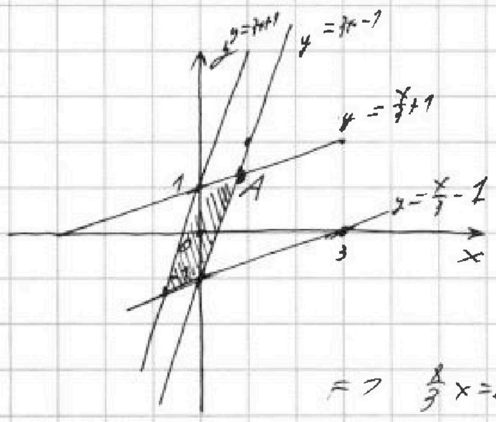
Рассм. ~~прямую $x-3y=3$: $y=\frac{x}{3}-1$. тогда~~ чтобы: $|x-3y| \le 3$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3y \le 3 \\ x-3y \ge -3 \end{cases} \Leftrightarrow (*) \begin{cases} y \ge \frac{x}{3}-1 & \text{— полуплоскость} \\ y \le \frac{x}{3}+1 & \text{— полуплоскость} \end{cases}$

Рассм. второе неравенство: $|3x-y| \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-y \le 1 \\ 3x-y \ge -1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow (**) \begin{cases} y \ge 3x-1 & \text{— полуплоскость} \\ y \le 3x+1 & \text{— полуплоскость} \end{cases}$

3)



Пересечение систем (*) и (**) — это параллелограмм — следует из области пересечения указанных полуплоскостей. Тогда по п. 1 в точке A на графике x и y максимальны (как x, так и y) для допустимой области значений.

для A: $\begin{cases} y=3x-1 \\ y=\frac{x}{3}+1 \end{cases} \Rightarrow 3x-1=\frac{x}{3}+1$

$\Rightarrow \frac{8}{3}x=2 \Rightarrow x=\frac{6}{8}=0{,}75 \Rightarrow y=3x-1=3\cdot 0{,}75-1=$

$=2{,}25-1=1{,}25 \Rightarrow 4y+8x=4\cdot 1{,}25+8\cdot 0{,}75=5+6=11$

Ответ: 11

$5^2\cdot 3\cdot 9 = 75\cdot 9 =$
$= 675$; $675\cdot 4 = 2700$

1) $A = m^2+2mn+n^2-9m-9n = (m+n)^2-9(m+n) = (m+n)(m+n-9)$

$B = m^2n+mn^2-3mn = mn(m+n-3)$.

<u>1сл.</u> $(m+n)(m+n-9) = 13p^2$; $mn(m+n-3) = 75q^2$. $m,n\in\mathbb{N}$; $p,q\in\mathbb{P}$ ⇒

$m+n-9 = \frac{13p^2}{m+n} > 0$ ⇒ $m+n>9$. $13p^2 \vdots m+n > 9$ ⇒ либо $m+n=13$, либо $m+n=13p$, либо $m+n=p$, либо $m+n=13p^2$. ~~[illegible]~~ Если $m+n=13$ ⇒ $(m+n)(m+n-9)=13\cdot 4 = 13p^2$ ⇒ $p^2=4$ ⇒ $p=2\in\mathbb{P}$, также $mn(m+n-3) = 10mn = 5^2\cdot 3\cdot q^2$ ⇒ $5^2\cdot 3\cdot q^2 \vdots 2$ ⇒ $q=2$, т.к. $q\in\mathbb{P}$ и $(5^2\cdot 3, 2)=1$ ⇒ $10mn = 5^2\cdot 3\cdot 2^2$ ⇒ $mn = 2\cdot 3\cdot 5$, если $m=2$, то $n=15$ ⇒ $m+n$ — ↯. Если $m=3$, то $n=10$ — подходит, если $m=5$, то $n=6$ — не подходит, если $m=2\cdot 3\cdot 5$, то $m+n\neq 13$ — ↯ ⇒ т.к. для n случаи симметричны, то здесь $\begin{cases} m=3\\ n=10\end{cases}$ и $\begin{cases} n=10\\ m=3\end{cases}$. | Если $m+n=13p$, то $m+n-9 = \frac{13p^2}{13p} = p$

⇒ $13p-9=p$ ⇒ $12p=9$ ⇒ $p=\frac{9}{12}\notin\mathbb{P}$ — ↯. Если $m+n=p$, то $m+n-9 = \frac{13p^2}{p} = 13p > m+n$ — ↯. Если $m+n=13p^2$, то $m+n-9=1$ ⇒ $m+n=10$ ⇒ $13p^2=10$, тогда $10 \vdots 13$ — ↯.

<u>2сл.</u> $(m+n)(m+n-9) = 5^2\cdot 3\cdot q^2$; $mn(m+n-3) = 13p^2$. Заметим, что тогда, чтобы $(m+n)(m+n-9)\vdots 3$, нужно, чтобы либо $m+n\vdots 3$, либо $m+n-9\vdots 3$.

Если $n+m\vdots 3$ ⇒ $m+n-3\vdots 3$ ⇒ $mn(m+n-3)\vdots 3$ ⇒ $13p^2\vdots 3$ и т.к. $(13,3)=1$, то $p^2\vdots 3$ ⇒ $p=3$, т.к. $p\in\mathbb{P}$ ⇒ $13p^2 = 13\cdot 9$. Также тогда и $m+n-9\vdots 3$, т.к. $9\vdots 3$ ⇒ $(m+n)\vdots 3$ и $(m+n-9)\vdots 3$ ⇒ $(m+n)(m+n-9)\vdots 9$, но т.к. если $q\neq 3$, то $5^2\cdot 3\cdot q^2 \not\vdots 9$, то $q=3=p\in\mathbb{P}$ ⇒ ~~$(m+n)(m+n-9) = 5^2\cdot 3\cdot 9$, если $a=m+n$, то $a^2-9a-5^2\cdot 3\cdot 9 = 0$ ⇒ $a_{1,2} = \frac{9\pm\sqrt{81+4\cdot 5^2\cdot 3\cdot 9}}{2} \notin\mathbb{N}$ a^2-9a [illegible] $= \sqrt{81}$ [illegible]~~ Заметим, что тогда $mn(m+n-3)\vdots 9$, если б.о.о. $m\vdots 3$, то $n\vdots 3$, т.к. $m+n\vdots 3$ ⇒ $mn(m+n-3)\vdots 27$ ⇒ $13\cdot 9\vdots 27$ — ↯. Тогда $(m+n-3)\vdots 9$ ⇒ $(m+n)(m+n-9) = 5^2\cdot 3\cdot 3^2 = 675$; $a=m+n$ ⇒ $a^2-9a-675=0$, ~~заметим, что тогда~~ ⇒ $a = \frac{9\pm\sqrt{81+4\cdot 675}}{2} = \frac{9\pm\sqrt{2781}}{2}$, но $52^2 = 2704 < 2781 < 53^2 = (52+1)^2 = 2704+2\cdot 52+1$

⇒ $a\notin\mathbb{N}$, т.к. $\sqrt{2781}$ — иррац. — ↯. Если же $m+n-9\vdots 3$, то $m+n\vdots 3$ ⇒ $(m+n)(m+n-9)\vdots 9$ ⇒ $q=3$ — далее ~~[illegible]~~ аналогично получим ур-ние с ↯. Ответ: $\begin{matrix} m=10\\ n=3\end{matrix}$ и $\begin{matrix} m=3\\ n=10\end{matrix}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

1) $\begin{cases} \sqrt{x+1}-\sqrt{6-y}+5=2\sqrt{6+5x-y^2} \quad (1) \\ \cancel{x^4+5x^2-\sqrt{y}=y^4-\sqrt{x}+5y^2 \quad (2)} \end{cases}$ Рассм. $f(x)=x^4+5x^2+\sqrt{x}$. ~~Заметим, что эта функция~~

определена на $x\geq 0$ и ~~прак~~ ~~возрастает~~ возрастает ~~(ВОЗКи...)~~ строго по x $\Rightarrow f(x)=f(y)$ ($x, y\geq 0$)

$\Rightarrow x=y$, т.к. если б.о.о. ~~$f(x)>f(y)$~~: $x>y$, то $x^4>y^4$, $5x^2>5y^2$,

$\sqrt{x}>\sqrt{y} \Rightarrow f(x)>f(y)$.

2) Рассм. (2): $x^4+5x^2-\sqrt{y}=y^4-\sqrt{x}+5y^2 \Rightarrow x^4+5x^2+\sqrt{x}=y^4+5y^2+\sqrt{y}$

$\Rightarrow f(x)=f(y) \Rightarrow x=y$ по п. 1

Рассм. (1): $\sqrt{x+1}-\sqrt{6-y}+5=2\sqrt{6+5x-y^2}$ (~~...~~)

$\Rightarrow \sqrt{x+1}-\sqrt{6-x}+5=2\sqrt{6+5x-x^2}$ (по п. 2) Заметим, что $(6-x)(x+1)=$

$=-x^2+5x+6 \Rightarrow$ пусть $a=\sqrt{x+1}$; $b=\sqrt{6-x} \Rightarrow a-b+5=2ab$

$\Rightarrow (a-b)^2=a^2-2ab+b^2=a^2-(a-b)-5+b^2 \Rightarrow (a-b)^2+(a-b)=a^2+b^2-5$

$\Rightarrow$ т.к. $a^2=(\sqrt{x+1})^2=x+1$, а $(b^2)=(\sqrt{6-x})^2=6-x$, то $(a-b)^2+(a-b)=x+1+6-x-5=$

$=2 \Rightarrow$ если $t=(a-b)$, то $t^2+t=2 \Rightarrow t^2+t-2=0 \Rightarrow (t+2)(t-1)=0$

__1 сл.__ $t=1 \Rightarrow \sqrt{x+1}-\sqrt{6-x}=1 \Rightarrow$ возведём в ^{2} и $x+1-2\sqrt{6+5x-x^2}+6-x=1$

$\Rightarrow 2\sqrt{6+5x-x^2}=6 \Rightarrow \sqrt{6+5x-x^2}=3 \Rightarrow 6+5x-x^2=9 \Rightarrow x^2-5x+3=0$

$\Rightarrow$ D: $x_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{5^2-4\cdot 3}}{2}=\dfrac{5\pm\sqrt{13}}{2}$, то x: $5-\sqrt{13}>0 \Rightarrow x+1>0$;

$\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}<\dfrac{5+4}{2}=4{,}5 \Rightarrow x<6 \Rightarrow 6-x>0$ — подходит.

__2 сл.__ $t=-2 \Rightarrow \sqrt{x+1}-\sqrt{6-x}=-2 \Rightarrow x+1-2\sqrt{6+5x-x^2}+6-x=4$

$\Rightarrow 2\sqrt{6+5x-x^2}=3 \Rightarrow \sqrt{6+5x-x^2}=\dfrac{3}{2} \Rightarrow 6+5x-x^2=\dfrac{9}{4} \Rightarrow x^2-5x+\dfrac{9}{4}-6=0$

$\Rightarrow x_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{25-4(\frac{9}{4}-6)}}{2}=\dfrac{5\pm\sqrt{40}}{2}$; $\sqrt{40}>5 \Rightarrow 5-\sqrt{40}<0$ — тогда x нам не подходит, т.к.

в (2) $\sqrt{x}$ есть. и $\dfrac{5+\sqrt{40}}{2}$ ~~...~~ $<\dfrac{5+7}{2}=6 \Rightarrow 6-x>0$ — подходит

Ответ: $\left(\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}, \dfrac{5+\sqrt{13}}{2}\right)$; $\left(\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}, \dfrac{5-\sqrt{13}}{2}\right)$; $\left(\dfrac{5+\sqrt{40}}{2}, \dfrac{5+\sqrt{40}}{2}\right)$

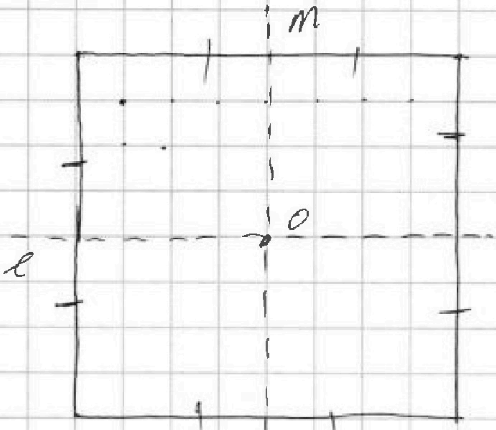
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

1) Посчитаем кол-во узлов во всём квадрате. У нас есть 9 столбцов с узлами и в каждом 9 узлов => всего в рассмотрении имеем 9·9=81 узел. Заметим, что квадрат (любой) совмещается с собой при повороте относительно центра на 90 и 180 градусов.



Посчитаем, сколько всего способов покраски без учёта поворотов: это $C_{81}^{2} = \frac{81!}{79!\cdot 2} = \frac{80\cdot 81}{2} = 40\cdot 81$

2) Заметим, что при повороте на 180° возможны 2 случая: 1сл. обе точки находятся в 1 полуплоскости отн. l и 2сл. в разных полуплоскостях. Заметим, что ~~на общем количестве кол-во~~ в нём ~~$N = 40\cdot 81$ каждая пара точек подсчитана 2 раза~~ если при повороте на 180° пара совмещается сама с собой, то это уже учтено в N, если нет, то они следует поделить N на 2, т.к. в 1сл. точки в месте перейдут в противоположную полуплоскость, а во 2сл. останутся в разных => $N \to \frac{N}{2} = 20\cdot 81$ - каждой раскраске соотв. пара, с которой она совмещается поворотом на 180° отн. центра.

3) При повороте на 90°: Это разобьём квадрат на 4 равных прямыми l и m. Точки во раскраски, в которых не участвует центр квадрата O: заметим, что у каждой есть пара, с которой она совмещается поворотом на 90°, причём ни одна из точек пары не была рассмотрена в п.2, т.к. каждая точка переходит в полуплоскость, на которые делит плоскость m (или была в полуплоск. l или нет, если была на l), или в полуплоскость, на которые делит плоскость l (если была в полуплоск. m, или на l, если была на m) => случаи 2 и 3 пересекаются только если одна из закрашенных точек =O.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Тогда рассм. все случаи, когда закрашена 0 и ещё одна из оставшихся 80 точек. Их 80 => всего случаев: $\underbrace{\frac{u}{2}}_{\text{пол.2}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{пол.3}} + \underbrace{80}_{\text{с точкой 0}} =$

$= \frac{40 \cdot 81}{4} + 80 = 20 \cdot 81 + 80 = 1620 + 80 = 1700.$

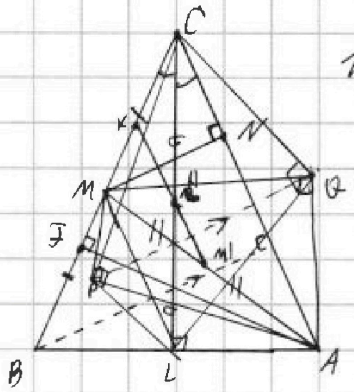
Ответ: 1700

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



1) Пусть L' и M' - середины CL и AM соотв. Тогда L' и M' - центры ω и Ω соотв. Заметим, что $\deg(P,\omega)=\deg(P,\Omega)=0=\deg(Q,\omega)=\deg(Q,\Omega)$ $\Rightarrow PQ$ - радикальная ось ω и $\Omega \Rightarrow PQ \perp L'M'$. Но $PQ \parallel$ высоте из B, а высота из $B \perp AC$ $\Rightarrow L'M' \parallel AC$. $\{K\}=(L'M')\cap(BC)$, тогда в $\triangle AMC$: M' - середина AM и $M'K \parallel AC$ $\Rightarrow M'K$ - сред. линия $\triangle AMC \Rightarrow K$ - сер. CM. Тогда в $\triangle CML$: KL' - ср. линия $\Rightarrow KL' \parallel ML \Rightarrow ML \parallel M'L' \parallel AC \Rightarrow$ по т. Фалеса для $\angle CBA$ и $(ML \parallel AC)$: $\frac{BM}{CM}=\frac{BL}{AL} \Rightarrow \frac{BL}{AL}=\frac{1}{1}=1 \Rightarrow BL=AL \Rightarrow CL$ - биссектриса и медиана $\triangle ABC \Rightarrow \triangle ABC$ - р/б ($AC=BC$) и CL - высота. $AB=10 \Rightarrow$ $AL=BL=\frac{AB}{2}=5$. ~~Ок~~ Пусть AF - высота в $\triangle ABC$, тогда $\angle MFA=90^\circ$ $\Rightarrow F\in\Omega$. Тогда FM и AN - хорды $\Omega \Rightarrow$ для т. C: $CN\cdot CA=CM\cdot CF$.

Пусть $AC=x$, тогда $CN=AC-AN=x-8$; $CM=\frac{BC}{2}=\frac{AC}{2}=0{,}5x$; пусть $CF=y$, тогда заметим, что т.к. CL - высота, то L и F - основания высот из C и A в $\triangle ABC \Rightarrow ALFC$ - вп. $\Rightarrow$ т.к. $\{B\}=(AL)\cap(CF)$, то $BL\cdot BA=BF\cdot BC$.

$BF=BC-CF=x-y$; $BL\cdot BA=5\cdot 10=50 \Rightarrow x(x-y)=50$;

Из утверждения: $CN\cdot CA=CM\cdot CF$: $(x-8)\cdot x=0{,}5x\cdot y \Rightarrow x-8=0{,}5y$

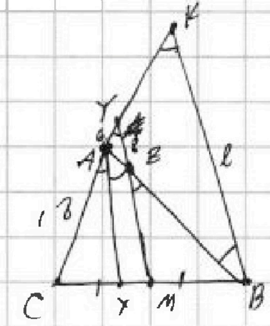
$\Rightarrow y=2x-16 \Rightarrow x(x-(2x-16))=50 \Rightarrow x(-x+16)=50$

$\Rightarrow -x^2+16x=50 \Rightarrow$ ~~$x^2-16x-50=0$; $x_{1,2}=\frac{16\pm\sqrt{16^2-4(-50)}}{2}$~~

$\Rightarrow x^2-16x+50=0$: $x_{1,2}=\frac{16\pm\sqrt{16^2-4\cdot 50}}{2}$

$=\frac{16\pm\sqrt{56}}{2}=8\pm\sqrt{14}$, но если $AC<8$, но Ω пересечёт повторно (AC) не на стороне $\Rightarrow AC=BC=8+\sqrt{14}$

Ответ: $AC=BC=8+\sqrt{14}$



1) $\angle MZB = \angle XAB$ - соот. углы при ($MZ \parallel AX$) и $\angle MZB = \angle AZY$

Также из $MY \parallel AX \Rightarrow \angle CAX = \angle CYZ \Rightarrow$ т.к. AX - биссектриса, то $\angle AYZ = \angle YZA \Rightarrow \triangle AYZ$ - р/б $\Rightarrow AZ = AY = 6$

$\Rightarrow CY = AC + AY = 24$. Проведём ч/з т.В. прямую $l \parallel MY$ и AX, пусть $\{K\} = (AC) \cap l$. Заметим, что тогда в $\triangle BKC$: M - середина BC и $MY \parallel BK$

$\Rightarrow MY$ - ср. линия в $\triangle CBK \Rightarrow CY = YK$

$\Rightarrow YK = 24 \Rightarrow AK = KY + AY = 30$ и т.к. $ZY \parallel BK$, то $\triangle AZY \sim \triangle ABK$

$\Rightarrow \triangle ABK$ - р/б $\Rightarrow AK = AB \Rightarrow AB = 30$. Также т.к. $\triangle AYZ \sim \triangle AKB$, то

$\dfrac{AY}{AK} = \dfrac{YZ}{BK} \Rightarrow BK = \dfrac{AK \cdot YZ}{AY} = \dfrac{30 \cdot 8}{6} = 40$; MY - ср. линия в $\triangle CKB$

$\Rightarrow MY = \dfrac{BK}{2} = 20 \Rightarrow$ По т. косинусов для $\triangle AYZ$: т.к. $\angle AYZ = \alpha$, то $= \angle YZA = \angle$ $AZ^2 = AY^2 + YZ^2 - 2AY \cdot YZ \cdot \cos\alpha$

$\Rightarrow 6^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos\alpha \Rightarrow 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos\alpha = 8^2 \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow$ По т. косинусов для $\triangle CYM$: $CM^2 = CY^2 + YM^2 - 2 \cdot CY \cdot YM \cdot \cos\alpha =$

$= 24^2 + 20^2 - 2 \cdot 24 \cdot 20 \cdot \dfrac{2}{3} = 576 + 400 - 640 = 976 - 640 = 336$

$\Rightarrow CB = 2CM = 2\sqrt{336} = 4\sqrt{84} = 8\sqrt{21}$

Ответ: $8\sqrt{21}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Черновик.

$4\cdot 75+4\cdot 9$ $\quad 4\cdot 84=4\cdot 4\cdot 21$ $\quad 300:4=75$ $\quad 75+9$

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9$ ($a_3 = 3x+3$, $a_5=(x^2+2x)^2$, $a_9 = 3x^2$); $+d$ $+d$ $+d$ $+d$ $+d$ $+d$

$m^2+2mn+n^2-9m-9n$ $\quad 2\cdot 2\cdot 3\cdot 70\cdot \frac{2}{3}$

m^2n+mn^2-3mn

$(0x3)=\frac{17}{2}$ $\quad \frac{3}{4}-\frac{1}{4}$ $\quad (13p)^2$ $\quad 2\cdot 3\cdot 70\cdot 2$

$3x+3+2d=(x^2+2x)^2 \quad =2d=(x^2+2x)^2-3x-3$ $\quad (m+n)^2-9(m+n)$ $\quad 4\cdot 3\cdot 20$ $\quad 32\cdot 20=640$

$4d=2(x^2+2x)^2-6x-6$

$(x^2+2x)^2+4d=3x^2$ $\quad (m+n)(m+n-9)$

$(x^2+2x)^2+2(x^2+2x)^2-6x-6=3x^2$

$144\cdot 4 = 576$

$5^2\cdot 3\cdot 9^2$

$3(x^2+2x)^2=3x^2+6x+6=3(x^2+2x)+6$ $\quad 3(59)^2$

$3t^2=3t+6$

$t^2=t+2$ $\quad t^2-t-2=0$ $\quad 6^2=6^2+8^2-2\cdot 6\cdot 8\cos\alpha$

$(t-2)(t+1)=0$ $\quad |x-3y|=3$

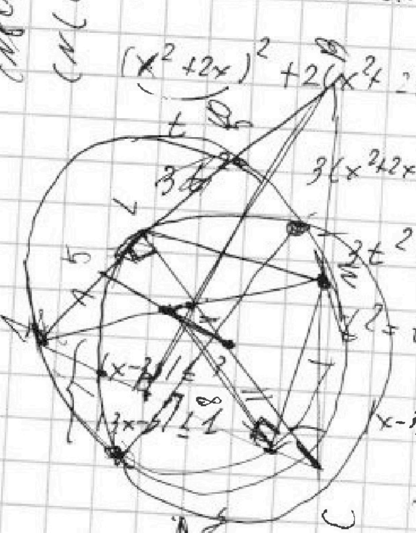
$x^2+2x=2$ $\quad 2\cdot 6\cdot 8\cos\alpha=8^2$

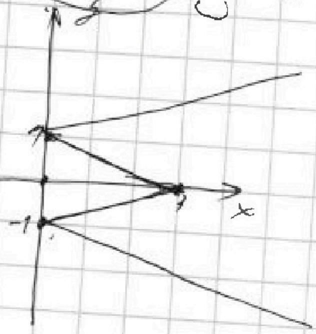
$|x-3y|=3$ $\quad 2\cdot 6\cos\alpha=8$

$x^2+2x-2=0$ $\quad D=2^2-4\cdot 1\cdot(-2)=4+8=12$ $\quad \cos\alpha=\frac{8}{2\cdot 6}=\frac{2}{3}$

$\frac{-2\pm\sqrt{12}}{2}=\frac{-2\pm 2\sqrt{3}}{2}=-1\pm\sqrt{3}$

$\frac{5}{AC}$ $\quad CN(CN+8)$





$x^2+2x=-1$

$x^2+2x+1=0$ $\quad D=2^2-4\cdot 1=0$ $\quad x\in\{-1; -1+\sqrt{3}; -1-\sqrt{3}\}$

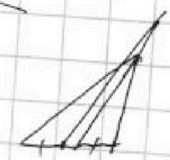
$x=\frac{-2}{2}=-1$

$\sin\alpha=\sqrt{1-\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

$mn(m+n-3)=13p^2$

$|x-3y|=3$

$x\geq 3 \quad y\geq 0$ $\quad x-3y=3$



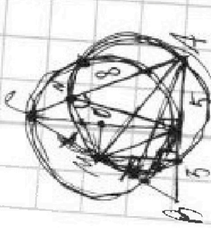
$13p^2 : m$ $\quad m=1$ $\quad m=13$ $\quad m=p$

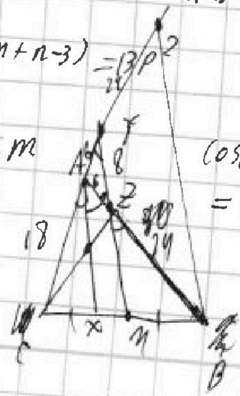
$\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha-(1-\cos^2\alpha)=2\cos^2\alpha-1$

$x-3y=-3$

$x=3y+3$

$y=\frac{x}{3}-1$





$2\cdot\frac{4}{9}-1=-\frac{1}{9}$

$a\cdot(cn+8)=10$

$cn(cn+8)=\frac{cn+8}{2}\cdot a$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Черновик.

$x - 3y = -3$

$y = \frac{x}{3} - 1$

$y = \frac{x}{3} + 1$

$3 - 1 = 0$

$(m+n)^2 - 9(m+n)$

$mn(m+n-3) = 5^2 \cdot 3 \cdot 9^2$

$3x - y = 1$

$51^2 = 2601 + 102 + 1$

$= 2704$

$3x - y = -1$

$y = 3x + 1$

$3 - 3(-1) = 3 + 3$

$(m+n)(m+n-9)$

$(m+n)(m+n-9) = 13p^2$

$3x - y = 1$

$y = 3x - 1$

$50^2 = 2500$

$51^2 = 50^2 + 100 + 1$

$= 2601$

$m+n > 9$

$13p^2 : m+n > 9$

$3x - y = -1$

$y = 3x + 1$

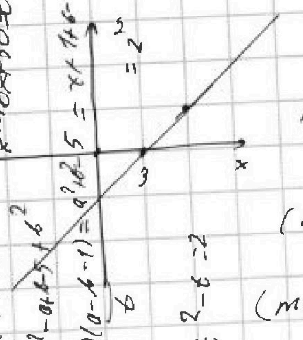
$(3x - y) \le 1$

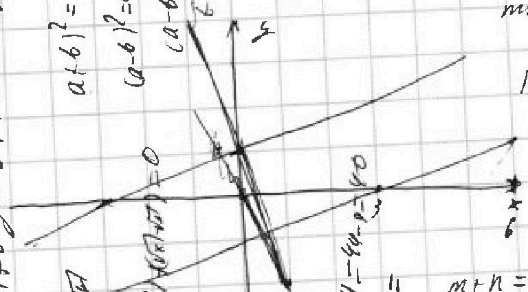
$(3x - y)^2 \le 1$

$4y + 8x$

$1{,}5 + 0{,}75 = 2{,}25$

$9x^2 - 6xy + y^2 \le 1$





$m+n = 13$

$m+n = 13p$

$m+n = p$

$m+n = p^2$

$m+n = 13p^2$

$y = \frac{x}{3} + 1$

$\frac{x}{3} + 1 = 3x - 1$

$4x^2 - 6xy + y^2 - 1 \le 0$

$y = 3x - 1$

$2 = (3 - \frac{1}{3})x = \frac{8}{3}x$

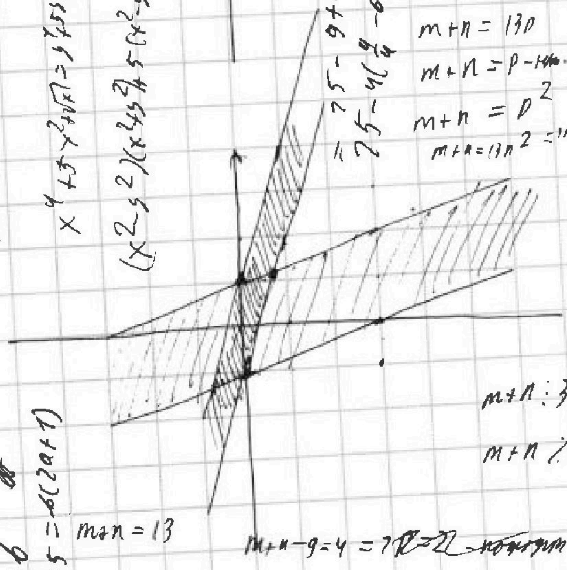
$6 = 8x$

$x = \frac{6}{8} = 0{,}75$

$36y^2 - 4 \cdot 9(y^2 - 1) =$

$y = 3 \cdot 0{,}75 - 1 = 1{,}25$

$\frac{6y \pm 6}{18} = \frac{1}{3}y \pm \frac{1}{3}$



$m+n : 3 \Rightarrow 13p^2 : 3 \Rightarrow p = 3$

$m+n \not\vdots 3 \Rightarrow$ или $m : 3$, или $n : 3$

$m+n = 13$

$m+n-9 = 4 \Rightarrow 13p = 52$ — неверно

$5^2 \cdot 3 \cdot 2^2 = 10 \cdot mn$

$m+n-3 = 10 : 2 \Rightarrow 7 \cdot 2 \Rightarrow$

$5 \cdot 3 \cdot 2 = mn$

$m+n = 13$

$\boxed{\begin{matrix} m=3 & m=10 \\ n=10 & n=3 \end{matrix}}$

$m+n = 13p \Rightarrow m+n-9 = p$

$\Rightarrow 13p - 9 = p$

$\Rightarrow 12p = 9$

$p = \frac{9}{12}$ — нет.

$8 \cdot 75 = 600$

$75 \cdot 9 = 675$

$5, 6$