



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



- √ 1. [3 балла] Найдите все действительные значения  $x$ , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её четвёртый член равен

$$\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}, \text{ десятый член равен } x+4, \text{ а двенадцатый член равен } \sqrt{(15x+6)(x-3)}.$$

- √ 2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}, \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}. \end{cases}$$

- 3. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких  $p$ .

- √ 4. [5 баллов] Две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ , а их общая касательная имеет с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  общие точки  $C$  и  $D$  соответственно, причём точка  $B$  расположена ближе к прямой  $CD$ , чем точка  $A$ . Луч  $CB$  пересекает  $\omega_2$  в точках  $B$  и  $E$ . Найдите отношение  $ED : CD$ , если диагональ  $AD$  четырёхугольника  $ACDE$  делит отрезок  $CE$  в отношении  $9 : 25$ , считая от вершины  $C$ .

- ±  
? 5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник  $150 \times 200$ . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

- $\frac{\pi}{p}$  6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел  $(a; b; c)$  такие, что:

- $a > b$ ,
- число  $a - b$  не кратно 3,
- число  $(a - c)(b - c)$  является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство  $a + b^2 = 820$ .

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 2. Площади её боковых граней равны 5, 5 и 4. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№11

$$b_4 = b \cdot q^3 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$$

$$b_{10} = b \cdot q^9 = x+4 \quad b_{12} = b \cdot q^{11} = \sqrt{(15x+6)(x-3)}$$

$$\frac{b_{12}}{b_{10}} = q^2 = \frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{x+4}$$

OD3: 1.  $\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} \geq 0 \Rightarrow \frac{15x+6}{(x-3)^3} \geq 0$  знаменатель  $< 0$

при  $x < 3$  и числитель  $\geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{6}{15}$   
 $\Rightarrow x \in (-\infty; -\frac{6}{15}] \cup (3; +\infty)$

2.  $\sqrt{(15x+6)(x-3)} \geq 0 \quad (15x+6)(x-3) \geq 0$

$\frac{15}{-6} \quad 3 \rightarrow x \Rightarrow x \in (-\infty; -\frac{6}{15}] \cup [3; +\infty)$

3.  $q^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{(x+4)^2} \geq 0 \Rightarrow x > -4 \cup \frac{24}{15}$

$\Rightarrow x \in (-4; -\frac{6}{15}] \cup (3; +\infty)$

$$\frac{b_{10}}{b_4} = q^6 = \frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{\sqrt{(15x+6)(x-3)^3}} = (q^2)^3 = \frac{(\sqrt{(15x+6)(x-3)})^3}{(x+4)^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{x+4}^4 (x+4)^4 = \sqrt{(15x+6)^3} \cdot \sqrt{(x-3)^3} \cdot \frac{\sqrt{15x+6}}{\sqrt{(x-3)^3}}$$

$$\Rightarrow (x+4)^4 = (15x+6)^2 \quad \text{пусть } (x+4)^2 = a, \quad (15x+6) = b$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = \pm b \quad \text{и } a > 0$$

1ч  $(x+4)^2 = 15x+6 \Rightarrow x^2 + 8x + 16 = 15x + 6$

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$x_1 = \frac{7+3}{2} = 5 \notin \text{OD3} \quad x_2 = \frac{7-3}{2} = 2 \notin \text{OD3}$

2ч  $(x+4)^2 = -15x-6 \Leftrightarrow x^2 + 23x + 22 = 0$

$$x_1 = -1 \in \text{OD3} \quad x_2 = -22 \notin \text{OD3}$$

Ответ:  $x_1 = -1 \quad x_2 = -22$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(№ 21)

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z} \quad (1)$$

$$|y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2} \quad (2)$$

$$(2): |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2} \quad \sqrt{225-z^2} \stackrel{(*)}{\leq} \sqrt{225} = 15$$

$$\Rightarrow |y-20| + 2|y-35| \leq 15$$

$$\underline{1^{\text{сл}}} \quad y \geq 35 \Rightarrow y-20 + 2y-70 = 3y-90 \geq 3 \cdot 35 - 90 = 15$$

$$\stackrel{(*)}{\Rightarrow} \forall y \in \mathbb{R}: y \geq 35 \text{ подходит только } y=35 \text{ и } z=0$$

$$\underline{2^{\text{сл}}} \quad 20 \leq y < 35 \Rightarrow y-20 - 2y+70 = 50-y \stackrel{(*)}{\geq} 15 \Rightarrow \text{нет решений}$$

$$\underline{3^{\text{сл}}} \quad y < 20 \Rightarrow -y+20 - 2y+70 = 90-3y \geq 30 \Rightarrow$$

$$\stackrel{(*)}{\Rightarrow} \text{нет решений}$$

тогда решения могут быть только при  $y=35 \quad z=0$

$$\Rightarrow (1) \Leftrightarrow \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{35-2x-x^2} = 2\sqrt{-(x^2+2x-35)} = 2\sqrt{-(x-5)(x+7)}$$

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{(x-5)(x+7) \cdot (-1)}$$

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{(5-x)(x+7)}$$

$$\text{пусть } \sqrt{x+7} = a \quad \sqrt{5-x} = b \Rightarrow \frac{a^2+b^2}{2} = 6$$

$$\Rightarrow a-b + \frac{a^2+b^2}{2} = 2ab \quad | \cdot 2$$

$$a^2+b^2 - 2ab + 2a + 2b = 0$$

$$(a-b)^2 + 2(a-b) - 2ab = 0$$

...

Ответ:  $y=35 \quad z=0 \quad x \dots$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№31

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

$$\cos 2 \in [-1; 1] \Rightarrow p \in [-10; 10]$$

$$\cos 3x = \cos(2x+x) = \cos^2 x - 3 \cos x \sin^2 x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x + 6 \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x)$$

$$\Rightarrow \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x = 3 \cos^2 x + p$$

$$\Rightarrow 3(1 - \cos x) \sin^2 x = \frac{p - \cos^3 x - 6 \cos x + 3 \cos^2 x}{3}$$

$$\Rightarrow \sin^2 x = \frac{p - \cos^3 x - 6 \cos x + 3 \cos^2 x}{3(1 - \cos x)}$$

$$\Rightarrow \sin(x) = \pm \sqrt{\frac{p - \cos^3 x - 6 \cos x + 3 \cos^2 x}{3(1 - \cos x)}} = t \cos x \pm 1$$

$$\begin{aligned} 4 \cos^3 x - 3 \cos x + 6 \cos x &= 6 \cos^2 x - 3 + p \\ \cos^3 x + 3 \cos x &= 6 \cos^2 x - 3 + p \\ 4t^3 - 6t^2 + 3t - 3 + p &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_1 = \arcsin t + 2\pi k \\ x_2 = \pi - \arcsin t + 2\pi k \end{cases} \quad k, p \in \mathbb{Z}$$

Ответ:  $p \in [-10; 10]$



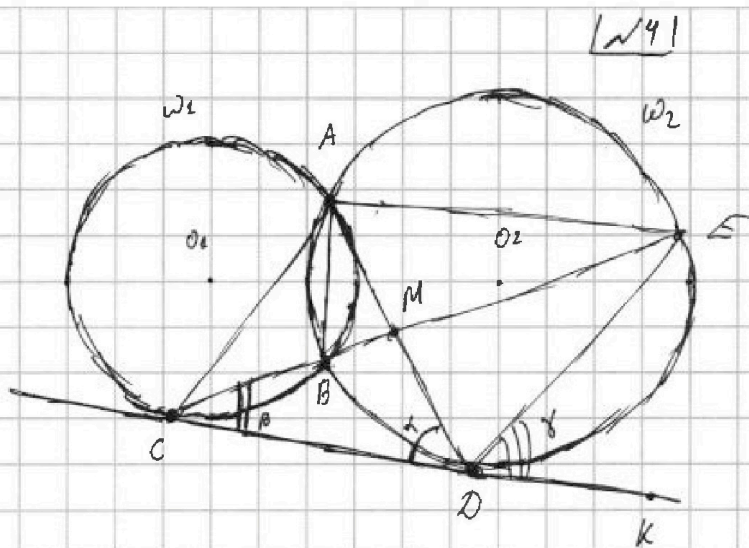
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



пусть  $(AD) \cap (CE) = M$

$$\Rightarrow \frac{CM}{ME} = \frac{9}{25}$$

пусть  $\angle AED = \alpha \Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle ADC = \angle AED = \alpha$$

(углы  $AD$ )  $\omega_2$

пусть  $\angle ECD = \beta \Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle CAB = \angle ECD = \beta$$

(углы  $B$ )  $\omega_1$

пусть  $KE \perp (CD)$  и пусть

справа от  $D$  и пусть  $\angle EPK = \gamma \Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle EAD = \angle EDK = \gamma \quad (\text{углы } ED \text{ } \omega_2)$$

$$\Rightarrow \angle CMD = \angle E (180 - \angle ECD - \angle ADC = 180 - \alpha - \beta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle EMP = \alpha + \beta$$

$$\angle EDA = 180 - \angle ADC - \angle EDK = 180 - \alpha - \gamma$$

$$\Rightarrow \angle CED (\text{в } \triangle MED) = 180 - \alpha - \beta - 180 + \alpha + \gamma = \gamma - \beta$$

$$\Rightarrow \angle BAD = \angle BED = \gamma - \beta \quad (\text{углы } BP \text{ } \omega_2)$$

$$\Rightarrow \angle CAD = \angle CAB + \angle BAD = \beta + \gamma - \beta = \gamma = \angle DAE \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AD - \text{биссектриса } \angle CAE \Rightarrow \frac{CA}{AE} = \frac{CM}{ME} = \frac{9}{25}$$

пусть  $CA = 3y \Rightarrow AE = 25y$

т.к.  $D$  лежит на биссектрисе  $\angle ACE \Rightarrow$  она равноудалена

от  $(AC)$  и  $(AE)$

пусть  $PH_1 \perp AC$   $D = H_1$   $PH_2 \perp AE$   $D = H_2$

$$\Rightarrow DH_1 = DH_2$$

$$\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle ADE}} = \frac{DH_1 \cdot AC}{DH_2 \cdot AE} = \frac{9}{25}$$

Заметим  $\angle CAD = \angle DAE = \gamma$  и  $\angle CDA = \angle DEA = \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle ADC \sim \triangle AED$  по двум углам

$$CK = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{ED}{DC} = \frac{5}{3}$$

$$\text{Ответ: } \frac{ED}{DC} = \frac{5}{3}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(№5)

Т.к. в прямоугольнике чётное кол-во клеток в высоту и ширину, то  $\forall$  клетки её образ относительно ср. линии  $\neq$  образу отн. центра  $\neq$  образу отн. 2-ой ср. линии. Так что можно просто считать 3 случая

1 сл симметричны отн. вертикальной ср. линии тогда надо выбрать 4 точки ~~от~~ в.о.о.

слева от ср. линии и автоматически получить образы 4-ёх оставшихся =  $C_{15000}^4$

ещ аналогично 1 сл отн. горизонтальной ср. линии =  $C_{15000}^4$

3 сл отн центра мы выбираем первую точку и симметрично ~~от~~ ~~кажд~~ центру получаем образ

=  $\Rightarrow$  =  $C_{30000}^4$

Ответ:  $2 \cdot C_{15000}^4 + C_{30000}^4$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$a > b$        $a \neq_3 b$        $(a-c)(b-c) = p^2$        $a + b^2 = 820$   
 $a, b, c \in \mathbb{Z}$        $p \in \mathbb{P}$  - прост. числа, т.к.  $p \in \mathbb{P} \Rightarrow \exists 3$  случая:  
 1сл  $\begin{cases} (a-c) = p \\ (b-c) = p \end{cases} \Rightarrow a = b$  - противоречие

2сл  $\begin{cases} (a-c) = 1 \\ (b-c) = p^2 \end{cases} \Rightarrow c = a - 1 \Rightarrow (b - a + 1) = p^2$  т.к.  $a > b$ , то  $p < 1$  - противоречие

3сл  $\begin{cases} (a-c) = p^2 \\ (b-c) = 1 \end{cases} \Rightarrow c = b - 1 \Rightarrow a - b + 1 = p^2$

рассмотрим подлучши  
 1 подлучши  $a \equiv_3 0$        $b \equiv_3 1 \Rightarrow a - b + 1 \equiv_3 0 - 1 + 1 \equiv_3 0 \Rightarrow p = 3$

$\Rightarrow a - b + 1 = 9$        $\Rightarrow a = b + 8$

$\Rightarrow b + 8 + b^2 = 820$   
 $b^2 + b - 812 = 0$

$D = 1 + 4 \cdot 812 = 1 + 3248 = 3249 = 3 \cdot 1083 = 9 \cdot 19^2$

$\Rightarrow b_1 = \frac{1 - 3 \cdot 19}{2} = -28$        $b_2 = \frac{1 + 57}{2} = 29$

$a_1 = -20$   
 $c_1 = -29$

$a_2 = 37$   
 $c_2 = 28$

~~2 подлучши  $a \equiv_3 0$        $b \equiv_3 2 \Rightarrow a - b + 1 \equiv_3 0 - 2 + 1 \equiv_3 -1 \equiv_3 2 \equiv_3 p^2$~~

2 подлучши  $a \equiv_3 1$        $b \equiv_3 2 \Rightarrow a + b^2 \equiv_3 2 \Rightarrow a + b^2 \neq 820$

3 подлучши  $a \equiv_3 2$        $b \equiv_3 1 \Rightarrow a + b^2 \equiv_3 0 \Rightarrow a + b^2 \neq 820$

4 подлучши аналогично остальные подлучши

Ответ:  $(-20; -28; -29)$  и  $(37; 29; 28)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~xy~~  $x+y + \frac{x^2+y^2}{2} = 2xy$

~~xy~~  $2x+2y + x^2+y^2 - 4xy = 0$

$2(x+y) + (x-y)^2 - 2xy = 0$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

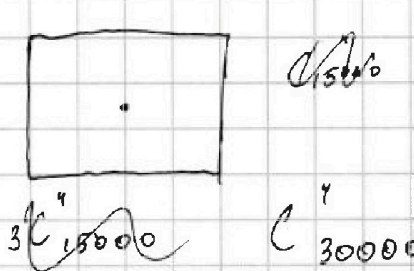
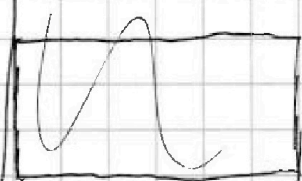
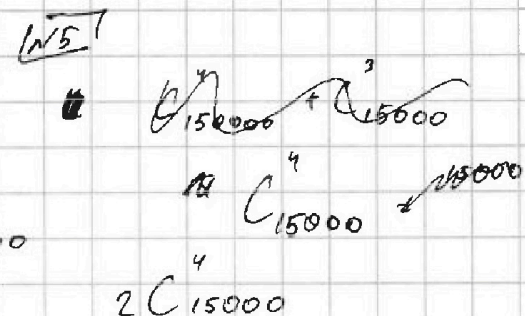
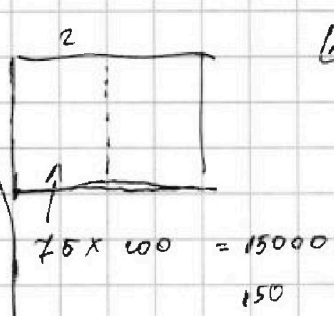
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\Rightarrow$  1)  $t_0 = 0 \quad t_1 = 1$  т.к.  $1^2 \equiv 3 \pmod 7$   
 $2) \quad t_0 = 0 \quad t_1 = 2$   $2^2 \equiv 3 \pmod 7$   
 $3) \quad t_0 = 1 \quad t_1 = 0$

4)  $t_0 = 2 \quad t_1 = 2$

1)  $(a-c)(b-c) = p^2 \Rightarrow c \equiv 3 \pmod 2$

$1) \quad a \equiv 3 \pmod 2 \quad b \equiv 3 \pmod 2$   
 $\Rightarrow a-b+1 \equiv 3-3+1 \equiv 1 \pmod 2 \Rightarrow p=3$   
 $a-b+1=3 \Rightarrow a=b+2$   
 $8+8+8^2 = 8+8+8^2$   
 $8+8+8^2 = 8+8+8^2$   
 $2) \quad a \equiv 3 \pmod 2 \quad b \equiv 3 \pmod 2$   
 $a-b+1=3$   
 $8+8+8^2 = 8+8+8^2$   
 $3) \quad a \equiv 3 \pmod 2 \quad b \equiv 3 \pmod 2$   
 $a-b+1=3$   
 $8+8+8^2 = 8+8+8^2$



$a \neq 3 \pmod 2$   
 $a+b^2=8+0$   
 $(a-b+1)=p^2$   
 $c=b-1$

$a-b \not\equiv 3 \pmod 2$   
 $(a-c)(b-c) = p^2 = p \cdot p \Leftrightarrow \begin{cases} a-c=p \\ b-c=p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-c=p^2 \\ b-c=1 \end{cases}$   
 $(a-c) \in \mathbb{N} \quad (b-c) \in \mathbb{N} \Rightarrow (a-c)(b-c) \in \mathbb{N}$   
 $\Rightarrow \begin{cases} a-c=1 \\ b-c=p^2 \end{cases}$

1)  $a-c=p^2 \quad b-c=1 \Rightarrow c = b-1$   
 $(a-b+1) = p^2$

2)  $a-c=b-c=p^2 \quad a-c=1 \Rightarrow c = a-1$   
 $b-c = b-a+1 = p^2$  т.к.  $a > b \quad p \neq 0$   
 $\Rightarrow$  нет реш.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x = \cos(2x+x) = (\cos^2 x - \sin^2 x) \cos x - 2 \cos x \sin x \cdot \sin x =$$

$$= \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x =$$

$$= \cos^3 x - 3 \cos x (1 - \cos^2 x) =$$

$$= 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$4 \cos^3 x - 3 \cos x + 6 \cos x = 3(2 \cos^2 x - 1) + p$$

$$4 \cos^3 x + 3 \cos x = 6 \cos^2 x - 3 + p \quad \cos x = t$$

$$4t^3 + 3t - 6t^2 + 3 - p = 0$$

$$t \in (0; 1)$$

$$4t^3 - 6t^2 + 3t + 3 - p = 0$$

$$\cos 3x + 6 \cos x + 6 \cos^2 x + 3 + p = 0$$

$$\cos 3x + 6 \cos x + 6 \cos^2 x + 3 + p = 0$$

$$4 \cos^3 x - 3 \cos x + 3 - p = 4 \cos^3 x - p + 3(1 - \cos x)$$

$$4 \cos^3 x - p + (6 \cos x + 3)(1 - \cos x) = 0$$

$$\cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x + 6 \cos x = 3(\cos^3 x - \sin^2 x) + p$$

$$3 \sin^2 x (-3 \cos x \sin^2 x + 3 \sin^2 x) + \cos^3 x + 6 \cos x - 3 \cos^2 x - p = 0$$

$$3 \sin^2 x (1 - \cos x) + \cos^3 x + 6 \cos x - 3 \cos^2 x - p = 0$$

$$\sin^2 x = \frac{\cos^3 x + 6 \cos x - 3 \cos^2 x - p}{3(1 - \cos x)}$$

$$\Rightarrow \sin x = \pm \sqrt{\frac{\cos^3 x + 6 \cos x - 3 \cos^2 x - p}{3(1 - \cos x)}} = t$$

$$x_1 = \pi - \arcsin t + 2\pi k$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = \arcsin t + 2\pi k$$

$$\cos^3 x + 6 \cos x - 3 \cos^2 x - p \geq 0$$

$$\cos x \neq 1$$

$$4t^3 - 6t^2 + 6t - p \geq 0$$

$$p \in (-10; 10)$$

$$4t^3 - p$$

$$2 - 3 - p \geq 0$$

$$\cos^3 x + 6 \cos x - 3 \cos^2 x - p \geq 0$$

$$a^3 + 6a - 3a^2 - p \geq 0$$

$$1 - a > 0$$

$$1 > a \Rightarrow \cos x \neq 1$$

Алла

$$a - b + \frac{a^2 + b^2}{2} = 2ab$$

$$a^2 + b^2 + a - b - 4ab = 0$$

$$(a - b)^2 + (a - b) = 2ab$$

$$(a - b)(a + b + 1) = 2ab$$

$$a - b + \frac{a^2 + b^2}{2} = 2ab$$

$$2a - 2b + a^2 + b^2 - 4ab = 0$$

$$(a - b)^2 = 2(b + ab - a)$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a - b + 6 = 2ab$$

$$a + b = b(2a + 1)$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} + 6 = \sqrt{ab}$$

$$b = \frac{a+b}{2a+1}$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} - \sqrt{ab} = -6$$

$$\sqrt{5-x} = \frac{\sqrt{x+7} + 6}{2\sqrt{x+7} + 1}$$

$$a - \frac{a+b}{2a+1} + 6 = \frac{2a(a+b)}{2a+1}$$

$$a(2a+1) - a + b + 6(2a+1) = 2a(a+b)$$

$$2a^2 + a - a + b + 12a + 6 = 2a^2 + 2ab$$

$$a - b + 6 = 2ab$$

$$a + b + 6 = (2a+1)b$$

$$b = \frac{a+b}{2a+1}$$

$$\sqrt{x+7} = \sqrt{5-x} = \frac{\sqrt{x+7} + 6}{2\sqrt{x+7} + 1}$$

$$\frac{a+b}{2} = 6$$

$$\frac{x+7 + 5-x}{2} = 6$$

$$5-x = \frac{x+7+36 + 12\sqrt{x+7}}{4x+28+1+4\sqrt{x+7}}$$

$$\Rightarrow 5-x = \frac{x+7+36+12\sqrt{x+7}}{4x+28+1+4\sqrt{x+7}}$$

$$a + b + 6 = 2ab$$

$$x \in (5; -7)$$

$$6 = 2ab - a + b$$

$$b = 2a$$

$$\text{или } 5 \frac{1}{2} = 2ab + b +$$

$$5 \frac{1}{2} = 2ab + b - a - \frac{1}{2} =$$

$$= b(2a+1) - (a + \frac{1}{2}) =$$

$$= (2b-1)(a + \frac{1}{2})$$

$$\frac{13}{2} = (2b-1)(a + \frac{1}{2})$$

$$13 = (2b-1)(2a+1)$$

$$a > b$$

$$\sqrt{b}$$

$$a \neq b$$

$$(a-c)(b-c) = p^2$$

$$p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{P}$$

$$a + b^2 = 820$$

$$a = 3k_0 + \epsilon_0$$

$$\epsilon_0 \in [0; 2] \in \mathbb{Z}$$

$$b = 3k_1 + \epsilon_1$$

$$3k_0 + \epsilon_0 + 9k_1^2 + 6k_1\epsilon_1 + \epsilon_1^2 = 820$$

$$\Rightarrow \epsilon_0 + \epsilon_1^2 \equiv_3 820 \equiv_3 1$$

=>

$$a - b + 6 = 2ab$$

$$\frac{a+b}{2a+1} = 6$$

$$\sqrt{x+7} = \frac{\sqrt{5-x} + 6}{2\sqrt{5-x} + 1}$$

$$\begin{aligned} &= 36 + 4(5+x)(x+7) \\ &= 36 + 4(5+x)(x+7) \\ &= 36 + 4(5+x)(x+7) \end{aligned}$$

$$\frac{3249}{1083}$$

$$\frac{1083}{18} \Big/ \frac{361}{3} =$$

$$3 \cdot 19 = 57$$

$$9 \cdot 9 = 81$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - k = 0$$

$$D = 0 + 4k = 4k$$

$$x_1 = \frac{2\sqrt{k}}{2} \quad x_2 = \frac{-2\sqrt{k}}{2} \Rightarrow x_1 = \sqrt{k} \quad x_2 = -\sqrt{k}$$

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p \quad [N3]$$

$$\cos x \in (-1; 1)$$

$$\Rightarrow \cos 3x + 6 \cos x \in (-7; 7)$$

$$3 \cos 2x \in (-3; 3)$$

$$\Rightarrow p \in (-10; 10)$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

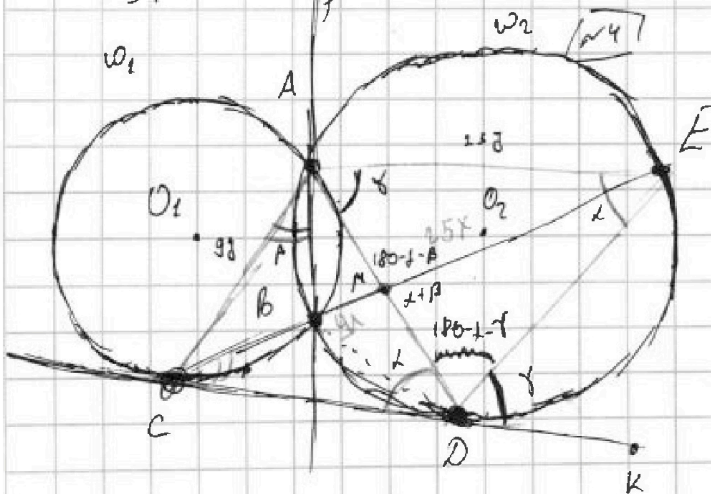
$$\cos 3x = \cos(2x) \cdot \cos x - \sin(2x) \sin x =$$

$$= (\cos^2 x - \sin^2 x) \cos x - 2 \cos x \sin x \sin x =$$

$$= \cos^3 x - \sin^2 x \cos x - 2 \cos x \sin^2 x =$$

$$= \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x$$

$$\frac{a-b+6}{a+6} = \frac{a+1}{a+1} \Rightarrow \theta$$



$$180 - (\alpha + \beta) - (180 + \alpha - \gamma) = 180 - \alpha - \beta + 180 + \alpha + \gamma =$$

$$= \gamma - \beta$$

$$\angle BED = 180 - \gamma - \beta$$

$$\angle BAD \angle AEB = 180 - \gamma - 180 + \alpha + \beta = \alpha + \beta - \gamma$$

$$\angle ABE = \angle CAE \Rightarrow \angle CAD = \gamma$$

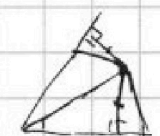
$$\triangle ABE \sim \triangle CAE \sim \triangle BMD$$

$$\angle DAE = \angle EBD \Rightarrow \frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle AED}} = \frac{9}{25}$$

$$OSK \cdot R_2 - OS =$$

$$= OS + R_2 - OS + R_2 =$$

$$= 2R_2 = 2 \cdot 12 = 24$$



$$\frac{ED}{CD} = \frac{OM}{ME} = \frac{9}{25}$$

$$CB \cdot CE = CD^2$$

$$\angle AED = \angle ADC = \alpha$$

$$\angle CAB = \angle BCD = \beta$$

$$\angle EDK = \angle EAD = \gamma \Rightarrow \angle BED = \gamma - \beta =$$

$$= \angle BAD \Rightarrow \angle CAD = \gamma$$

$$180 - (\alpha + \beta) - (180 + \alpha - \gamma) = 180 - \alpha - \beta + 180 + \alpha + \gamma =$$

$$= \gamma - \beta$$

$$\angle BED = 180 - \gamma - \beta$$

$$\angle BAD \angle AEB = 180 - \gamma - 180 + \alpha + \beta = \alpha + \beta - \gamma$$

$$\angle ABE = \angle CAE \Rightarrow \angle CAD = \gamma$$

$$\triangle ABE \sim \triangle CAE \sim \triangle BMD$$

$$\angle DAE = \angle EBD \Rightarrow \frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle AED}} = \frac{9}{25}$$

AC = 9, AE = 15, AD = 12, ME = 25, OM = 9





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z} \quad (N2)$$

$$|y-201 + 2|y-351| = \sqrt{225-z^2}$$

$$|y-201 + 2|y-351| \geq 15 \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow y = 35 \quad z = 0$$

$$x+7 \geq 0 \quad x \geq -7$$

$$5-x-3z \geq 0$$

$$5-x \geq 3z \Rightarrow 12 \geq 3z$$

$$\Rightarrow 4 \geq z$$

$$\Rightarrow z \in (-15; 4)$$

$$225 - z^2 \geq 0$$

$$225 > z^2$$

$$z \in (-15; 15)$$

$$a > b$$

$$a, b, c \in \mathbb{Z} \quad (N6)$$

$$a-b \neq 30$$

$$(a-c)(b-c) = p^2 \quad p \in \mathbb{P}$$

$$a+b^2 = 820$$

$$a \neq 3b$$

$$a = 3k_1 + k_2$$

$$b = 3k_2 + k_3$$

$$k_1 \neq k_2$$

$$k_1, k_2, k_3 \in \{0, 1, 2\}$$

$$3k_1 + k_2 + (3k_2 + k_3)^2 = 820$$

$$3k_1 + k_2 + 9k_2 + 6k_2k_3 + k_3^2 = 820$$

$$\Rightarrow k_1 + k_3^2 \neq 30$$

$$1) k_1 = 0 \quad k_3 = 1$$

$$2) k_1 = 0 \quad k_3 = 2$$

$$3) k_1 = 1 \quad k_3 = 0$$

$$4) k_1 = 2 \quad k_3 = 0$$

$$(a-c)(b-c) = p^2$$

$$(3k_1 + k_2 - c)(3k_2 + k_3 - c) = p^2$$

$$10, 2, 1$$

$$3-1=3^2$$

$$p \neq 2 \text{ иначе}$$

$$a, b \in \mathbb{Z} \quad a, b, c \notin \mathbb{Z}$$

$$(a-c) = 3 \cdot (b-c)$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(11)

$$q \& b \cdot q^3 = \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} \quad b \cdot q^9 = x+4 \quad b \cdot q^{11} = \sqrt{(15x+6)(x-3)}$$

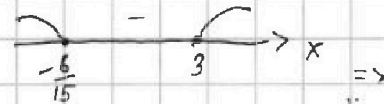
$$q^2 = \frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{x+4} \Rightarrow q = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{x+4}}$$

1. OD3.  $\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}} \geq 0 \Rightarrow \frac{15x+6}{(x-3)^3} \geq 0$  *знаменатель всегда*

*меньше 0 при  $x < 3$  и  $15x+6 > 0$*

$\Rightarrow \frac{15x+6}{(x-3)^3} \geq 0$  *при  $x \in (-\infty; -\frac{6}{15}] \cup (3; +\infty)$*

$$\sqrt{(15x+6)(x-3)} \geq 0 \quad (15x+6)(x-3) \geq 0$$



$\Rightarrow$  *остаётся старое OD3*

$$q^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{(15x+6)(x-3)}}{x+4} \geq 0 \Rightarrow x > -4$$

$$\Rightarrow x \in \text{OD3} \cap (-4; \frac{6}{15}] \cup$$

$$\frac{b \cdot q^9}{b q^3} = q^6 = \frac{x+4}{\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}} = (q^2)^3 = \frac{(\sqrt{(15x+6)(x-3)})^3}{(x+4)^3} \cup (3; +\infty)$$

$$\Rightarrow \frac{x+4}{\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}} = \frac{\sqrt{(15x+6)^3} \cdot \sqrt{(x-3)^3}}{(x+4)^3} \Rightarrow$$

$$(x+4)^4 = \sqrt{(15x+6)^3} \cdot \sqrt{(x-3)^3} \cdot \frac{\sqrt{(15x+6)}}{\sqrt{(x-3)^3}}$$

$$\Rightarrow (x+4)^4 = \sqrt{(15x+6)^4} = (15x+6)^2$$

*пусть  $(x+4)^2 = a^2 > 0$  и  $(15x+6) = b$*

$$\Rightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = \pm b, \text{ причём } a > 0$$

1a  $(x+4)^2 = 15x+6 \Rightarrow x^2 + 8x + 16 = 15x + 6$

$$x^2 - 7x + 10 = 0 \quad D = 49 - 40 = 9 \Rightarrow$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

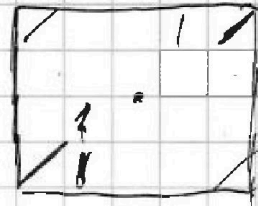
$$x_1 = \frac{7+3}{2} = 5 \quad x_2 = \frac{7-3}{2} = 2 \notin \text{ODЗ}$$

2ч  $(x+4)^2 = -15x-6$

$$x^2 + 8x + 16 = -15x - 6$$

$$x^2 + 23x + 22 = 0 \quad x_1 = -1 \quad x_2 = -22 \notin \text{ODЗ}$$

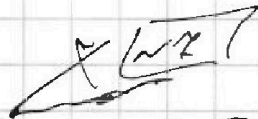
Ответ:  $x_1 = 5 \quad x_2 = -1$



т.к. в прямоугольнике четное кол-во клеток в высоту и ширину, то  $\forall$  клетки её образ относительно прямой  $\neq$  образу

относительно центра  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$



$$S = \frac{53}{4} a^2 = 53$$

$$2 \cdot 14 + 2 \cdot 53$$

