



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен

$$\sqrt{\frac{13x - 35}{(x + 1)^3}}, \text{ тринадцатый член равен } 5 - x, \text{ а пятнадцатый член равен } \sqrt{(13x - 35)(x + 1)}.$$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x + 3} - \sqrt{4 - x - z} + 5 = 2\sqrt{y + x - x^2 + z}, \\ |y + 1| + 3|y - 12| = \sqrt{169 - z^2}. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $3 : 10$, считая от вершины C .

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 200×250 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 560$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть 1 член этой геом прогрессии = b_1 , а знамен q
т.е. $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

тогда по усл $b_7 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} = b_1 \cdot q^6$

$$b_{13} = 5-x = b_1 \cdot q^{12}$$

$$b_{15} = \sqrt{(13x-35)(x+1)} = b_1 \cdot q^{14}$$

тогда $q^8 = \frac{b_{15}}{b_7} = \sqrt{(x+1)^4} = (x+1)^2$

$$q^2 = \pm \sqrt{|x+1|}$$

тогда $b_{13} = b_1 \cdot (q^2)^6 = b_1 \cdot |x+1|^3 = 5-x$

$$b_1 = \frac{5-x}{|x+1|^3}$$

а с другой стороны

$$q^2 = \frac{b_{15}}{b_{13}} = \frac{\sqrt{(13x-35)(x+1)}}{5-x}$$

$$\pm \sqrt{|x+1|}$$

т.е. $|x+1| = \frac{(13x-35)(x+1)}{(5-x)^2}$

2) ~~$x+1 \neq 0$~~ $x+1 \neq 0$ тк в b_7 находится в знамен

1) $x+1 \geq 0$, тогда $|x+1| = x+1$

$$(5-x)^2 = (13x-35)$$

$$x^2 - 10x + 25 = 13x - 35$$

$$x^2 - 23x + 60 = 0.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x=3 \\ x=20 \end{cases} \text{ (лог-брана по Виету)}$$

Проверка $x=3$: $b_7 = \sqrt{\frac{13 \cdot 3 - 35}{(3+1)^3}} = \sqrt{\frac{4}{4^3}} = \frac{1}{4}$

$$b_{13} = 5 - 3 = 2$$

$$b_{15} = \sqrt{(13 \cdot 3 - 35)(3+1)} = 4$$

$$q = \sqrt{|x+1|} = \sqrt{4} = \sqrt{2}$$

$$b_1 = \frac{5-x}{|x+1|^3} = \frac{5-3}{|3+1|^3} = \frac{2}{4^3} = \frac{1}{32}$$

но x !

$x=20$: $b_1 = \frac{5-20}{21^3} = \frac{-15}{21^3} = \frac{-5}{7^3 \cdot 3} < 0$

нет отрицательных
все гут

или заметим, что b_7 , b_{13} и b_{15} имеют один знак тк все-однозначности номер $\text{sgn}(b_i \cdot q^{2k}) = \text{sgn } b_i$ тогда, тк b_7 и $b_{15} > 0$ то $b_{13} > 0 \Rightarrow x \leq 5$

$x=20$ не лог x

$b_{13} \neq 0$ тк иначе $b_1 = 0$
и не лог x

2 сл) $x+1 < 0$.

$$(5-x)^2 = 35 - 13x$$

$$x^2 - 10x + 25 = 35 - 13x$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

$$\begin{cases} x=2 \\ x=-5 \end{cases}$$

Проверка $x=2$: $b_7 = \sqrt{\frac{13 \cdot 2 - 35}{(2+1)^3}} = \sqrt{\frac{-9}{8}}$ - неоп. т.е.
 $x=2$ не лог x



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x = -5 : b_1 = \frac{5+5}{4^3} = \frac{-10}{64}$$

$$q_1 = \pm \sqrt[4]{|1-5+11|} = \pm \sqrt{2} = -\sqrt{2}$$

тк $b_1 < 0$, шире не будет

$$b_7 = \sqrt{\frac{13-(-5)-35}{(-5+1)^3}} = \sqrt{\frac{100}{4^3}} = \frac{10}{8} \neq \frac{-10}{64} \cdot (-\sqrt{2}) \text{ верно } b_1 > 0, b_7 > 0.$$

$$\cancel{b_{13} = 5+5 = 10 = \frac{10}{64} \cdot (+\sqrt{2})} \text{ т.е. } x \neq -5$$

Ответ: $x = 3$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$I_{ca}) \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} = -2$$

$$Ooy: \begin{cases} 4-x \geq 0 \\ x+3 \geq 0 \end{cases} \quad -3 \leq x \leq 4$$

$$x+3+4-x-2\sqrt{x+3}\sqrt{4-x} = 4$$

$$3 = 2\sqrt{12+x-x^2}$$

$$9 = 48 + 4x - 4x^2$$

$$4x^2 - 4x + 1 = 40$$

$$(2x-1)^2 = 40$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{40}}{2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{10}$$

$$3,5^2 = 9 + \frac{1}{4} + 3 = 12,5$$

$$3 < \sqrt{10} < 3,5$$

$$3,5 < \frac{1}{2} \pm \sqrt{10} < 4$$

$$-3 < \frac{1}{2} - \sqrt{10} < -2,5$$

→ оба не подходят

~~II ca) $\sqrt{x+3} + \sqrt{4-x} = 1$ и при этом еще~~

$$3+x < 4-x \quad \text{тк иначе } \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} > 0$$

$$\boxed{x < \frac{1}{2}} \quad \text{тк } f(x) = \sqrt{x} \text{ возр}$$

$$III ca) \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} = 1$$

$$Ooy: \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \end{cases} \quad -3 \leq x \leq 4$$

$$6 = 2\sqrt{12+x-x^2}$$

$$-x^2 + x + 12 = 3^2$$

$$x^2 - x - 3 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+12}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$Ooy: \begin{cases} x+3 > 4-x \\ x > \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{тк иначе } 1 = \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} < 0$$

тк $f(x) = \sqrt{x}$ возр.

$$\text{тк } x > \frac{1}{2} \text{ то } x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} + \sqrt{3\frac{1}{4}}$$

$$\frac{1}{2} + \sqrt{3\frac{1}{4}} < \frac{1}{2} + \sqrt{4} = 2,5 < 4$$

верно

Ответ: $\begin{cases} x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{1}{2} - \sqrt{10} \\ y = 12 \\ z = 0 \end{cases}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(1) \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}$$

$$(2) |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}$$

$$(2): |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}$$

$$y < -1$$

$$-1 \leq y \leq 12$$

$$y > 12$$

$$-y-1-3y+36 = \sqrt{169-z^2}$$

$$y+1-3y+36 = \sqrt{169-z^2}$$

$$+y+1+3y-36$$

$$35-4y = \sqrt{169-z^2}$$

$$37-2y = \sqrt{169-z^2}$$

$$4y-35$$

$$\text{мин при } y = -1$$

$$37-2y \leq 13$$

$$\text{мин при } y = 12:$$

$$35+4 > 13 = \sqrt{169-z^2}$$

$$2y \geq 24$$

$$12 \cdot 4 - 35 = 11$$

$$y \geq 12$$

$$4y-35 \leq 13$$

$$\text{т.е. только при } y = 12$$

$$\text{тк } \sqrt{169-z^2} \leq 13$$

$$y \leq \frac{48}{4} = 12$$

$$\text{тк } y > 12$$

т.е. может подходить при \emptyset только

$$\text{случай } \begin{cases} y = 12 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$(z=0 \text{ тк тогда } |y+1| + 3|y-12| = 13)$$

тогда подставим в (1)

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2}$$

$$a = \sqrt{x+3} \geq 0$$

$$b = \sqrt{4-x} \geq 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{12+x-x^2} = \sqrt{(3+x)(4-x)} = \sqrt{a^2 b^2} = ab$$

$$\text{тк } a \geq 0, b \geq 0$$

$$\begin{cases} a - b + 5 = 2ab \\ a^2 + b^2 = 7 \end{cases}$$

$$x+3+4-x+25+10\sqrt{x+3}-10\sqrt{4-x}+$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = 7 - 5 + b - a$$

$$(a-b)^2 + (a-b) - 2 = 0$$

$$\begin{cases} a-b = -2 \\ a-b = 1 \end{cases}$$

$$a-b = 1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7 СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \cos 3x &= \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\sin^2 x \cos x = \\ &= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x = \\ &= 4\cos^3 x - 3\cos x, \end{aligned}$$

$$4\cos^3 x - 3\cos x + 6\cos^2 x - 3 + 6\cos x = p$$

$$4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x - 3 = p$$

$$t = \cos x \quad -1 \leq t \leq 1$$

$$f(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3$$

Тк $\cos x$ непрерывна, то $f(t)$ непрерывна

тогда нам понадобятся все $\min_{t \in [-1,1]} f(t) \leq p \leq \max_{t \in [-1,1]} f(t)$

$$f'(t) = 12t^2 + 12t + 3 = 3(2t+1)^2$$

~~$f'(t) = 0$~~ т.е. $f'(t) \geq 0$ на $[-1; 1]$
 ~~$4t^2 + 4t + 1 = 0$~~ ~~у нас корней нет~~ т.е. $f(t)$ возрастает, тогда
 ~~$(2t+1)^2 = 0$~~
 ~~$t = -\frac{1}{2}$~~
 $\min_{t \in [-1;1]} f(t) = f(-1) = -4 + 6 - 3 - 3 = -4$
 $\max_{t \in [-1;1]} f(t) = f(1) = 10$

Получается все $-4 \leq p \leq 10$

Теперь решим уравнение

$$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 = p$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Пусть } t = a - \frac{1}{2}$$

$$\text{тогда } t^3 = a^3 - \frac{3}{2}a^2 + \frac{3}{4}a - \frac{1}{8}$$

$$t^2 = a^2 - a + \frac{1}{4}$$

$$4a^3 - \cancel{6}a^2 + \underline{3a} - \frac{1}{2} + \underline{6a^2} - \underline{6a} + \frac{3}{4} + \underline{3a} - \frac{3}{2} - 3 = p$$

$$4a^3 - \cancel{1} - \frac{1}{2} - 3 = p$$

$$4a^3 = p + \frac{7}{2}$$

$$a^3 = \frac{1}{4}p + \frac{7}{8}$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{1}{4}p + \frac{7}{8}} = \sqrt[3]{\frac{2p+7}{8}} = \frac{\sqrt[3]{2p+7}}{2}$$

$$\text{т.е. } t = \frac{\sqrt[3]{2p+7} - 1}{2}$$

$$\text{при } p \in [-4; 10]$$

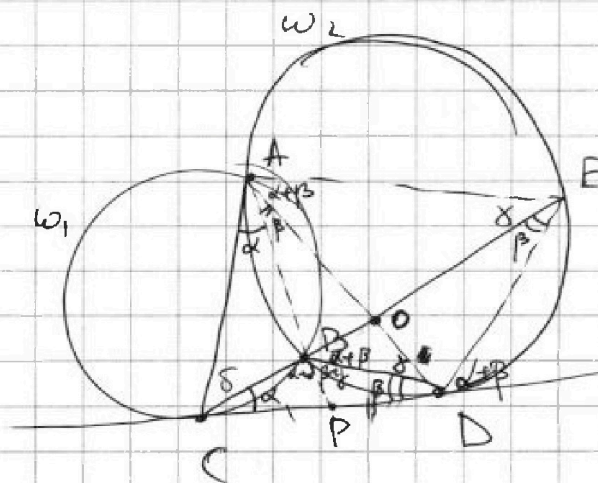


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано: $AD \cap CE = O$

$$\frac{CO}{OE} = \frac{3}{10}$$

Или: $\frac{ED}{CD}$

~~По теореме~~

$$CB \cdot CE = CD^2$$

$$\frac{ED}{BD} = \frac{CE}{CD} = \frac{CD}{CB}$$

$$\frac{ED}{CD} = \frac{BD}{BC}$$

Р-ие:

$\angle BAC = \angle BCD = \alpha$ тк
 \uparrow висс на гургу \uparrow кас, отцен гургу
 оголс гургу

Аналогично

$$\angle BAD = \angle BDC = \angle BED$$

$\angle EBD = \angle BCD + \angle BDC = \alpha + \beta$, тк висс во $\triangle BCD$

тогда $\angle BAE = \angle DBE = \alpha + \beta$ тк висс и опир на \perp гургу

но тогда $\angle CAD = \angle CAB = \angle BAD = \alpha + \beta = \angle DAE \Rightarrow$

$\Rightarrow AO$ - висс $\triangle ACE \Rightarrow$ по теор обисектрисе:

$$\frac{CO}{OE} = \frac{AC}{AE} = \frac{3}{10}; \quad AC = 0,3AE$$

Далее $P = AB \cap CD \Rightarrow P$ - радикальная ось ω_1 и ω_2

и при этом $PC = PD$ - кас к ω_1 и ω_2 соотв \Rightarrow

$$\Rightarrow PC^2 = PD^2 \quad \Rightarrow PD = PC \Rightarrow AP - \text{медiana } \triangle AED$$

$\deg(\omega_1, C) = \deg(\omega_2, D)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

тогда $S_{ACP} = S_{ADP}$

$$\frac{1}{2} \cdot AP \cdot AC \cdot \sin \alpha = AD \cdot \sin \beta \cdot \frac{1}{2} AP$$

$$\frac{AC}{AD} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

По теореме синусов в $\triangle CDE$: $\frac{ED}{\sin \alpha} = \frac{CD}{\sin \beta} \Rightarrow \frac{ED}{CD} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$

$$0,3 \frac{AE}{AD} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \Rightarrow 0,3 \cdot \frac{AE}{AD} = \frac{AC}{AD}$$

у теореме синусов: $AE = 2R \sin(\alpha + 2\beta + \gamma)$
R - радиус ω_2

$$AB = 2R \sin \gamma$$

$$AD = 2R \sin(\beta + \gamma)$$

$$\frac{10 \sin \alpha}{3 \sin \beta} = \frac{\sin(\alpha + 2\beta + \gamma)}{\sin(\beta + \gamma)}$$

Найдем другое отношение ($\triangle BOE$)

Здесь стороны $\gamma + A$ $\gamma + D$

$$\frac{CO}{CE} \cdot \frac{BE}{BO} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(2\alpha + 2\beta)} \cdot \frac{\sin(\alpha + 2\beta)}{\sin \beta} = \frac{\sin(\beta + \gamma)}{\sin(\alpha + \beta)} \cdot \frac{\sin(2\beta + \gamma)}{\sin \gamma}$$

тогда $\sin^2(\alpha + \beta) \sin \gamma = \sin(\beta + \gamma) \cdot \sin \beta \cdot 2 \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha + \beta)$

$$\sin(\alpha + \beta) \sin \gamma = 2 \sin(\beta + \gamma) \sin \beta \cos(\alpha + \beta)$$

$$\sin \gamma \cdot \frac{1}{\cos(\alpha + \beta)} = 2 \sin \beta \cos(\alpha + \beta) + \sin 2\beta \sin \gamma$$

$$\frac{1}{\cos(\alpha + \beta)} (\cos(\alpha + \beta) - \sin 2\beta) = 1 - \cos 2\beta$$

$$\frac{1}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{1 - \cos 2\beta}{\cos(\alpha + \beta) - \sin 2\beta}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что $\angle ADC = \angle AED$ тк

вписан и угол м/у кас и хордой отсек

и также $\angle CAD = \angle BAE$

$$\angle CAD = \angle BAE$$

$\triangle ACD \sim \triangle AED$ по 2м углам

$$\text{тогда } \frac{CD}{DE} = \frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AE}$$

$$\text{но тогда } 0,3 \cdot \frac{AE}{AD} = \frac{AD}{AE} \Rightarrow \left(\frac{AD}{AE}\right)^2 = 0,3$$

$$\frac{AD}{AE} = \sqrt{0,3}$$

$$\text{тогда } \frac{CD}{DE} = \frac{AD}{AE} = \sqrt{0,3}$$

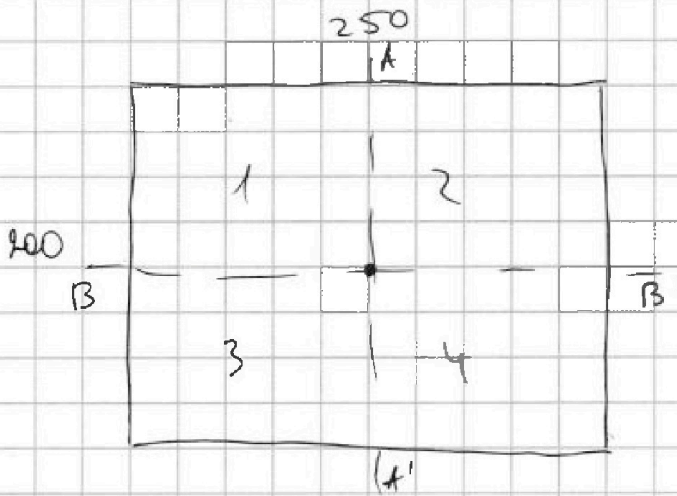


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1) Найдем все ~~то~~ симметричные от центра:

Если мы проецируем 2 вершины прямоугольника, то $(1 \rightarrow 4; 2 \rightarrow 3)$

2 симметричные по этим осям $(1 \rightarrow 4; 2 \rightarrow 3)$

\rightarrow надо сделать только верх, т.е. выбрать 4

слетки по $100 \cdot 250$ т.е. C_{25000}^4

2) симметричные от BB' ~~тоже~~ тоже самое $(1 \rightarrow 2; 3 \rightarrow 4)$

и 1 пункт, но ~~тоже~~ по группе $(1 \rightarrow 3; 2 \rightarrow 4)$

поэтому тоже C_{25000}^4

3) симметричные от AA' тоже самое, но $(1 \rightarrow 2; 3 \rightarrow 4) \rightarrow$

$\rightarrow 125 \cdot 200 = 25000$ погруппам т.е. C_{25000}^4

теперь считаем объединение по 2:

1) AA' и BB' ~~тоже~~ т.е. по осям ~~тоже~~ проецируются. Вот все



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

тогда таких вариантов C_{12500}^2 (тк в каждом
прямоуг по $2 \cdot \frac{8}{4}$
к)

2) AA' и ~~еще~~ еще шши

тогда тоже все все по 1 прямоуг \Rightarrow
 $\Rightarrow C_{12500}^2$

3) Аналогично (2) C_{12500}^2

Теперь когда все 3 вместе

тоже все одновременно восстанавливается
из 1 прямоуг $\Rightarrow C_{12500}^2$ таких вариантов

тогда ответ по Ф-ле вычисл исключений:

$$\text{Ans} = 3 \cdot C_{25000}^4 - 3 C_{12500}^2 + C_{12500}^2$$

$$\text{Ans} = 3 \cdot C_{25000}^4 - 2 \cdot C_{12500}^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть p - некоторое простое $\Rightarrow p \geq 2$ и $p \nmid 3$
 $a, b, c \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} a > b \\ a - b \nmid 3 \\ (a-c)(b-c) = p^2 \\ a + b^2 = 560 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Тк } a > b \Rightarrow a - c \neq b - c \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{ по основному} \\ \text{теор. Архимедиса} \end{array} \begin{cases} a - c = \pm p^2 \\ b - c = \pm 1 \\ a - c = \pm 1 \\ b - c = \pm p^2 \end{cases}$$

но тк $a > b \Rightarrow a - c > b - c$, то

$$\begin{cases} a - c = p^2 \\ b - c = 1 \end{cases} \Rightarrow a - b = a - c - (b - c) = p^2 - 1 \nmid 3$$

$$\begin{cases} a - c = -1 \\ b - c = -p^2 \end{cases} \Rightarrow a - b = a - c - (b - c) = -1 + p^2 \nmid 3$$

т.е. в любом случае $(p^2 - 1)(p^2 + 1) \neq 0$

т.е. $\begin{cases} p \neq 2 \\ p \neq 3 \end{cases} \Rightarrow p \equiv 0 \pmod{3}$, но p - простое \Rightarrow
 \Rightarrow 1 вариант $p = 3$.

Теперь ищем тройки (a, b, c) :

$$\begin{cases} \begin{cases} a - c = 9 & (I) \\ b - c = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} a - c = -1 & (II) \\ b - c = -9 \end{cases} \\ a + b^2 = 560 \end{cases}$$

$$\text{I case) } \begin{cases} b = 1 + c \\ a = 9 + c \\ a + b^2 = 560 \end{cases} \quad \begin{cases} (1+c)^2 + 9 + c = 560 \\ c^2 + 3c - 550 = 0 \\ c = -25 \\ c = 22 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 1 - 25 = -24 \\ a = 9 - 25 = -16 \\ c = -25 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} b = 1 + 22 = 23 \\ a = 9 + 22 = 31 \\ c = 22 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Или)} \begin{cases} a = c - 1 \\ b = c - 9 \\ b^2 + a = 560 \end{cases}$$

$$c - 1 + (c - 9)^2 = 560$$

$$c^2 - 18c + c + 80 = 560$$

$$c^2 - 17c - 480 = 0.$$

$$\begin{cases} c = 32 \\ c = -15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -15 - 1 = -16 \\ b = -15 - 9 = -24 \\ c = -15 \end{cases}$$

$$\text{или} \begin{cases} a = 32 - 1 = 31 \\ b = 32 - 9 = 23 \\ c = 32 \end{cases}$$

т.е. получаем:

$$\text{Ответ: } \begin{aligned} &(-16; -24; -15) \\ &(31; 23; 32) \\ &(31; 23; 22) \\ &(-16; -24; -25) \end{aligned}$$

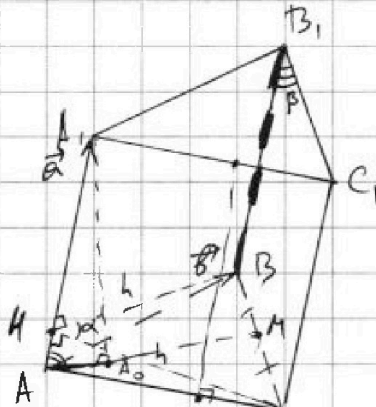


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано: Призма треугольная $ABCA_1B_1C_1$
 $\triangle ABC$ - прав; $AB=1$.

$$S_{AA_1B_1B} = S_{AA_1C_1C} = 4$$

$$S_{BB_1C_1C} = 3$$

Или: высоту призм h_1 ?
здесь высота \vec{a}
вектор \vec{b} \vec{c}

$\vec{a} \perp \vec{b}, \vec{c}$

$$\vec{a} = \vec{AA_1} = \vec{CC_1} = \vec{BB_1}$$

$$\vec{b} = \vec{AB} = \vec{A_1B_1}$$

$$\vec{c} = \vec{AC} = \vec{A_1C_1}$$

$$|\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$$

Тк $\triangle ABC$ - пр/уг $\Rightarrow \angle(\vec{b}, \vec{c}) = 60^\circ \Rightarrow (\vec{b}, \vec{c}) = \frac{1 \cdot 1}{2}$

$$V_{\text{призма}} = \frac{1}{2} (\vec{a}, [\vec{c}, \vec{b}]) = h_1 \cdot S_{\triangle ABC} = h \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} h$$

↑
скалярное произведение

т.е. $h_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} (\vec{a}, [\vec{c}, \vec{b}])$

известно, что $|\vec{a}, [\vec{c}, \vec{b}]| = \sqrt{3}$

$$|\vec{a}, \vec{b}| = |\vec{a}, \vec{c}| = 4$$

$$|\vec{a}, \vec{b}| - |\vec{a}, \vec{c}| = 3$$

$$\underbrace{(\vec{a}, \vec{b})^2}_{16} + \underbrace{(\vec{a}, \vec{c})^2}_{16} - 2(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 9 \quad (1)$$

$$\alpha = \angle([\vec{a}, \vec{b}], [\vec{a}, \vec{c}]) = \angle(\vec{n}_{AB}, \vec{n}_{AC}) = 60^\circ$$

Тк $F_1 = AA_1B_1B$ и $F_2 = AA_1C_1C$ - параллелограммы

сост из равных векторов (\vec{b} и \vec{c} отличаются



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

только проверкой, то эти фигуры равны
($F_1 = F_2$)

тогда высоты опущенные на AA_1 из верш
 C_1 и B_1 падут в точку H

тогда $BH = HC = h$; ко-угрег $\angle BHC = \alpha$.

тогда имеем теорему косинусов в BHC :

$$h^2 + h^2 - 2h^2 \cos \alpha = 1^2$$

$$2h^2(1 - \cos \alpha) = 1.$$

А также (1):

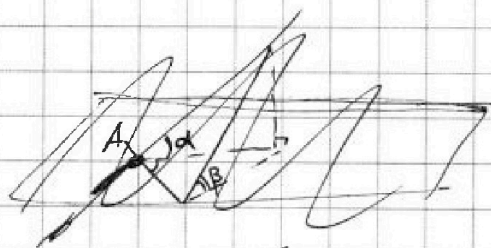
$$32 - 9 = 2 \cdot \frac{|\vec{a}, \vec{b}|}{4} \cdot \frac{|\vec{a}, \vec{c}|}{4} \cdot \cos \alpha.$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{32} (32 - 9) = \frac{23}{32}$$

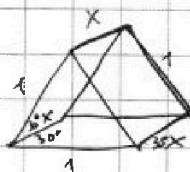
$$h^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \cos \alpha} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9/32} = \frac{16}{9}$$

$$h = \frac{4}{3}.$$

тогда $\sin \angle A_1AC = \frac{1}{h} = \frac{3}{4} \Rightarrow a = 1 \cdot \sin \angle A_1AC = 4$
 $a = \frac{16}{3}.$



Проекция на основание



$$x^2 = \left(\frac{16}{3}\right)^2 - h_1^2$$

$$\sin \beta \cdot a \cdot 1 = 3.$$

$$\sin \beta = \frac{9}{16}.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

так у нас картинка если бы эти
срединки ил-ти (ADM) тогда

$$S_1 = 4 \cdot \sin(\alpha)$$

площадь проекции на // - гр на 4,

$$\sin(\alpha) = \frac{h_1}{h_0} ; h_0 = 4 \Rightarrow h_0 = 4$$

$$S_1 = \sqrt{16 - h_1^2}$$

аналогично $S_2 = \sqrt{9 - h_1^2}$

тогда площадь проекции 2-х етсодатт:

$$S_1 + S_2 = \dots$$

$$S_1 = 1 \cdot x \cdot \sin 30^\circ = \sqrt{16 - h_1^2}$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 = 16 - h_1^2$$

$$\left(\frac{8}{3}\right)^2 - \frac{1}{4}h_1^2 = 16 - h_1^2$$

$$\frac{3}{4}h_1^2 = 16 \left(1 - \frac{4}{9}\right)$$

$$h_1^2 = 8^2 \cdot \frac{5}{9 \cdot 3} = \left(\frac{8}{3}\right)^2 \cdot \frac{5}{3}$$

$$h_1 = \frac{8}{3} \sqrt{\frac{5}{3}}$$

↑
ответ:

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(a-c)(b-c) = p^2$$

$$a > b$$

$$a - b \times 3$$

$$a + b^2 = 560$$

$$a > b$$

$$\sqrt{169 - z^2} > 11$$

$$z^2 \leq 169 - 121 = 48$$

$$|z| \leq 4\sqrt{3}$$

27
11

$$y > 12$$

$$4y - 35 \leq 13$$

$$4y \leq 48$$

$$y \leq 12$$

$$y = 12$$

$$\frac{ED}{CD} = \frac{sin \alpha}{sin \beta}$$

$$|y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}$$

$$-1 < y < 12$$

$$y < -1$$

$$-y - 1 - 3y + 36 = \sqrt{169-z^2}$$

$$35 - 4y = \sqrt{169-z^2}$$

$$y > 11$$

$$127 | y \geq 11$$

Зеркалин $V = \frac{1}{2} (a, [b, c]) = \frac{1}{2} (b, [c, a])$

$$4t^3 + 6t^2 + 3t - (3+p) = 0$$

~~$$4a^3 - 6a^2 + 3a - \frac{1}{2} + 6a^k - 6a + \frac{3}{2} + 3a - \frac{3}{2} - 3 = p$$~~

$$4a^3 - 2 - 3 = p$$

$$4a^3 = 5 + p$$

$$t = a - \frac{1}{2} \quad 550 = 25 \cdot 22 \quad t = a - \frac{1}{2}$$

$$4a^3 - 6a^2 + 3a - \frac{1}{2} + 6a^k - 6a + \frac{3}{2} + 3a - \frac{3}{2} - 3 = p$$

$$4a^3 - 2 - 3 = p$$

$$4a^3 = 5 + p$$

$$-4 \leq p \leq 10 \quad -\frac{1}{2} \leq a = \frac{1}{2} + t \leq \frac{3}{2}$$

$$\frac{CD}{ED} = \frac{BD}{BD}; \quad \frac{CD}{ED} = \frac{sin \alpha}{sin \beta}$$

$$-1 \leq 2p + 7 \leq 27 \quad \frac{ED}{CD} = ?$$

$$\frac{CO}{OE} = \frac{3}{10}$$

$$\frac{AC}{AE} = \frac{CO}{OE} = \frac{3}{10}$$

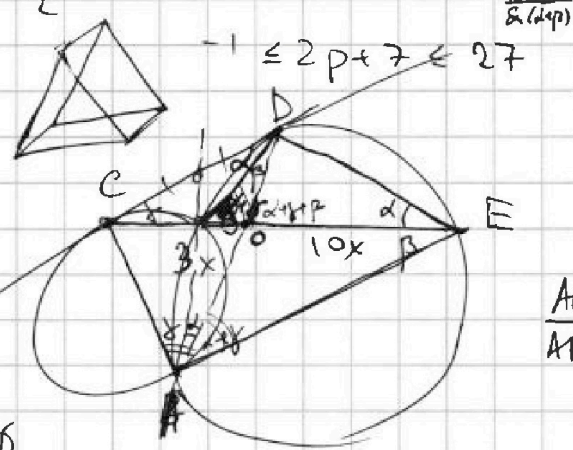
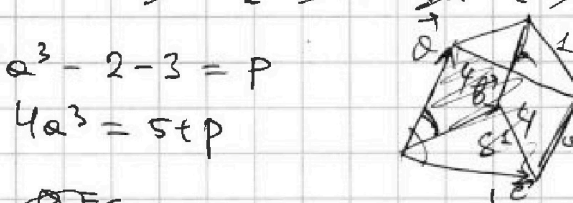
$$\sqrt{y-x-z} = b$$

$$\sqrt{x+3} = b$$

$$b - a + 5z = 2\sqrt{\dots}$$

$$(F-E) = \sqrt{y-x-z} + y + x - z = F$$

$$F - 2\sqrt{y-x-z} + y + x - z = F$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{10}{3} \frac{\sin d}{\sin \beta} = \sin(d+\beta) \cdot \frac{1}{\tan(\beta+\delta)} + \cos(d+\beta)$$

$$\tan(\beta+\delta) = \frac{\tan \beta + \tan \delta}{1 - \tan \beta \tan \delta}$$

$$\frac{10}{3} \cdot \frac{\sin d}{\sin \beta} = (\sin d \cos \beta + \sin \beta \cos d) \cdot \frac{1}{\tan \beta + \tan \delta}$$

$$2(d+\beta) + \beta + \delta = 180^\circ$$

$$\frac{BD}{BC} = \frac{\sin(d+\delta)}{\sin(\beta+\delta)} = \frac{\sin d}{\sin \beta}$$

$$\frac{AE}{AD}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

