



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



- ✓ 1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен $\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$, тринадцатый член равен $5-x$, а пятнадцатый член равен $\sqrt{(13x-35)(x+1)}$.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

- ✦ 3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

- ✓ 4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $3 : 10$, считая от вершины C .
- ✓ 5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 200×250 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).
- ✓ 6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:
- $a > b$,
 - число $a - b$ не кратно 3,
 - число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
 - выполняется равенство $a + b^2 = 560$.
7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$ab^6 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}} \quad ab^{12} = 5-x \quad ab^{14} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

~~Реш:~~

~~$13x-35=20$~~

$$\frac{ab^{14}}{ab^{12}} = b^2 = \frac{\sqrt{(13x-35)(x+1)}}{5-x}$$

$$\frac{ab^{12}}{ab^6} = b^6 = \frac{(5-x) \cdot \sqrt{(x+1)^3}}{\sqrt{13x-35}}$$

$$\Rightarrow b^6 = (b^2)^3 = \frac{(\sqrt{(13x-35)(x+1)})^3}{(5-x)^3} = \frac{(5-x) \sqrt{(x+1)^3}}{\sqrt{13x-35}}$$

$$\frac{(13x-35)^5 \cdot \sqrt{(x+1)^3}}{(5-x)^3} = \frac{(5-x) \sqrt{(x+1)^3}}{\sqrt{13x-35}}$$

$$(13x-35)^2 \cdot \sqrt{(x+1)^3} = (x+1)^3 \cdot (5-x)^4$$

$$(13x-35)^2 = (5-x)^4$$

$$13x-35 = (5-x)^2$$

$$x^2 - 10x + 25 - 13x + 35 = 0$$

$$x^2 - 23x + 60 = 0$$

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = 20 - \text{не подходит т.к. тогда } b^2 = \sqrt{(13 \cdot 20 - 35)(20+1)}$$

\Rightarrow Ответ: 3.

$$5-20$$

$$\uparrow$$

$$0$$

$\sqrt{13x-35}$
 $\div \sqrt{(x+1)^3}$ т.к.
 $\neq 0$
 иначе какойто
 мен чем
 прогрессии = 0,
 это быть не может

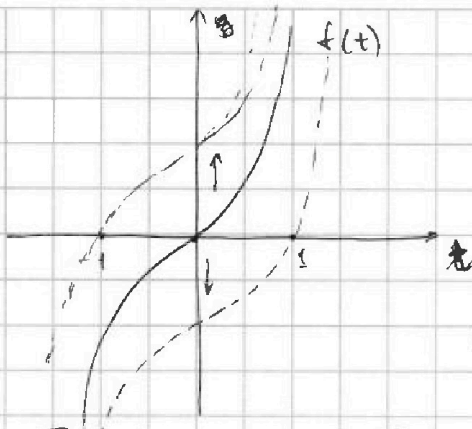


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Наша искоемая
функция $g(t)$
получается смещением
функции $f(t)$ вдоль
оси ординат

П.к функция монотонно
возрастает, а нам

необходимо найти, когда $g(t) = 0$ и $t \in [-1; 1]$
Необходимо рассмотреть два крайних случая

кв 1) когда $g(t)$ проходит через точку $[-1; 0]$

$$4 \cdot (-1)^3 + 6 \cdot (-1)^2 + 3(-1) - 3 - p = 0$$
$$-4 + 6 - 3 - 3 - p = 0$$
$$p = -4$$

2) когда $g(t)$ проходит через точку $[1; 0]$

$$4 + 6 + 3 - 3 - p = 0$$

$$p = 10$$

$$\Rightarrow p \in [-4; 10]$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p$$

$$\cos 3x = \cos(x+2x) = \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x =$$

$$= \cos x (2\cos^2 x - 1) - 2\sin^2 x \cos x =$$

$$= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x(1 - \cos^2 x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

Вернемся к изначальной уравнению:

$$4\cos^3 x - 3\cos x + 3(2\cos^2 x - 1) + 6\cos x = p$$

$$4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x + 3 - p = 0$$

$$t \in [-1; 1] \quad t = \cos x$$

$$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 - p = g(t)$$

рассмотрим функцию $f(t) = 4t^3 + 6t^2 + 3t$

$f'(t) = 12t^2 + 12t + 3$ - найдем, как будет выглядеть график функции

$$f'(t) = 0 : \begin{cases} t(4t^2 + 6t + 3) = 0 \\ t = 0 \\ 4t^2 + 6t + 3 = 0 \\ D = 36 - 48 < 0 \end{cases}$$

$$f'(t) = 0 : \begin{cases} 12t^2 + 12t + 3 = 0 \\ D = 144 - 4 \cdot 3 \cdot 12 = 144 - 144 = 0 \end{cases}$$

$$t = \frac{-12}{24} = -0,5$$

$\Rightarrow 12t^2 + 12t + 3 = 12(t + 0,5)^2 \geq 0 \Rightarrow t = -0,5$ точка перегиба
и $f(t)$ всегда возрастает и проходит через $(0;0)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

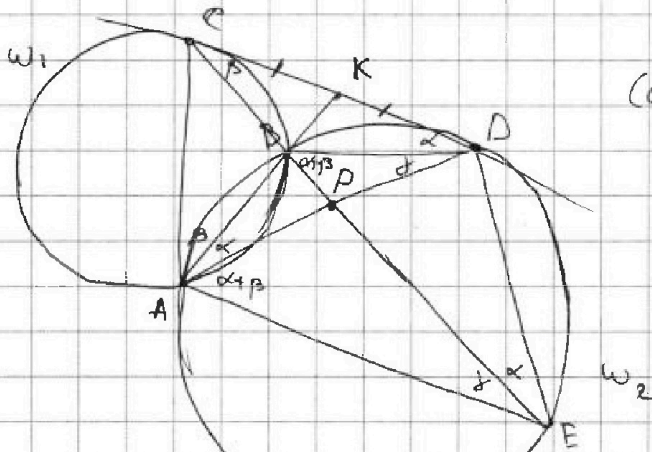


1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$AB \perp CD = K$$



\Rightarrow стени точки

$$KD^2 = KB \cdot KA = KC^2$$

(стени точки относятся ω_2^2 и ω_1)

$$\Rightarrow KD = KC$$

$$\frac{CP}{BP} = \frac{3}{10}$$

$\angle CDB = \angle DEC = \alpha$
(между касат и хордой)

$\angle CDB = \angle BAD = \beta$ (между касат и хордой)

$\angle DCE = \angle CAK = \beta$ (между касат и хордой)

$\angle DBP = \alpha + \beta$ - внешний в $\triangle CDB \Rightarrow \angle DAE = \alpha + \beta$

\Rightarrow (опир на одну дугу в ω_2)

$\Rightarrow \angle CAP = \angle CAD + \angle BAD = \alpha + \beta = \angle DAE \Rightarrow AP$ - бисс в $\triangle CAE$

$$\Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{3}{10} \Rightarrow AC = 0,3AE$$

$\triangle CDA \sim \triangle DEA$

$\angle CAD = \angle DAE = \alpha + \beta$

$\angle CDA = \angle DEA$ (между касат и хордой)

$$\Rightarrow \frac{ED}{CD} = \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AD}$$

$$AD^2 = AC \cdot AE$$

$$AD^2 = AC \cdot AE = 0,3AE^2$$

$$\frac{AD^2}{AE^2} = 0,3$$

$$\Rightarrow \frac{ED}{CD} = \frac{AE}{AD} = \frac{1}{\sqrt{0,3}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{30}}{3}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{30}}{3}$

$$\frac{AD}{AE} = \sqrt{0,3}$$

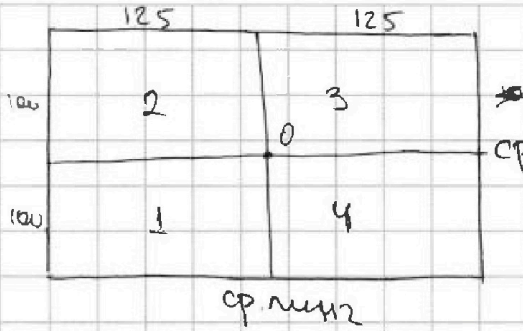


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1) Рассмотрим кол-во множеств, симметричных относительно центра: поймем, что можем выбирать точки только из областей 1, 4 в сумме из этих областей выберем 4 точки

$$\Rightarrow \text{кол-во множеств} = 2 \cdot C_{12500}^1 \cdot C_{12500}^3 + 2 \cdot C_{12500}^2 \cdot C_{12500}^2 + 2 \cdot C_{12500}^0 \cdot C_{12500}^4 = C_{25000}^4 \quad (M1)$$

2) Кол-во множеств симметричных относительно ср. линии 1 = C_{25000}^4 (M2)

3) Кол-во множеств симм. относительно ср. линии 2 = C_{25000}^4 (M3)

4) кол-во множеств, симм. относительно всего (центра и двух ср. линий) Если максимально можем выбрать сначала по ср. линии 2, потом по ср. линии 1, получим две области в которых мы можем выбрать 2 клетки и закрасить их и все те клетки которые совпали с линией или центром, тогда перевернув местами кол-во закраски клеток будет симм. относительно ср. линии и центра \rightarrow кол-во способов = C_{12500}^2

5) Посчитаем кол-во множеств, кол-во которых $\binom{M}{m}$ симметричны только относительно одного центра. Заметим, что всю доску весь прямоугольник можно разбить на 12500 прямоугольничков центр которых будет находиться в точке O, а каждая вершина будет принадлежать разным областям, тогда если два ~~каждые~~ клетки симметричны относительно одного центра, то при ~~выборе~~ одного ~~каждого~~ описанного ~~прямоугольничка~~ ~~прямоугольничка~~ можно закрасить ≤ 2



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

условие
способов
множ-во
одно =

клетки, такие образцы как-во
закрасить клетки так, чтобы это
было мин. относительно всего

$C_{12500}^4 \cdot C_4^2$ (M5)

↑
выбор прямых.

↑
выбор закрашиваемых
клеток в этих
прямых.

⇒ Всего множеств: $(M1 + M2 + M3 - M5 - M4) +$

$+ M4 + M5 \Leftrightarrow 3C_{25000}^4 - C_4^2 \cdot C_{12500}^2 -$

$$\Leftrightarrow \frac{M1 + M2 + M3 + M4 + M5}{2} = \frac{3C_{25000}^4 + C_{12500}^4 + C_4^2 \cdot C_{12500}^4}{2}$$

$$= \frac{3}{2} \cdot C_{25000}^4 + \frac{7}{2} \cdot C_{12500}^4$$

$$\text{Ответ: } 1,5 C_{25000}^4 + 3,5 C_{12500}^4$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(a-c)(b-c) = p^2$$

т.к. $a, b, c \in \mathbb{Z}$, ~~и~~ $a > b$, то

$$\textcircled{1} \begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = p^2 + c \\ b = 1 + c \end{cases}$$

$$a-b = p^2 + c - 1 - c = p^2 - 1 \stackrel{!}{=} 3$$

$p \mid p^2$ Найдем, что $p = 3$, а т.к. p простое
 $p=3$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 9 + c \\ b = 1 + c \end{cases}$$

$$a + b^2 = 560$$

$$9 + c + 1 + 2c + c^2 = 560$$

$$c^2 + 3c - 550 = 0$$

по теор. Виета

$$c_1 = -25$$

$$c_2 = 22$$

$$\left. \begin{cases} c = -25 \\ \Rightarrow a = -16 \\ b = -24 \end{cases} \right\} \begin{cases} c = 22 \\ a = 31 \\ b = 23 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} a-c = -1 \\ b-c = -p^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = c-1 \\ b = c-p^2 \end{cases}$$

$$a-b = c-1 - c+p^2 = p^2 - 1 \stackrel{!}{=} 3 \text{ аналогично } p=3$$

$$\begin{cases} a = c-1 \\ b = c-9 \end{cases}$$

$$a + b^2 = 560$$

$$c-1 + c^2 - 18c + 81 = 560$$

$$c^2 - 17c + 80 - 560 = 0$$

$$c^2 - 17c - 480 = 0$$

по теор. Виета

$$c_1 = 15$$

$$c_2 = -32$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} c = 15 \\ a = 14 \\ b = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = -32 \\ a = -33 \\ b = -41 \end{cases}$$

Ответ: $(-33; -41; -32)$ $(14; 6; 15)$ $(-16; -24; -25)$
 $(31; 23; 22)$

$\begin{cases} a-c = \pm p \\ b-c = \pm p \end{cases}$ - не может быть такого случая
т.к. $a > b$

$\begin{cases} a-c = -p^2 \\ b-c = -1 \end{cases}$ - не может быть такого случая
т.к. $-p^2 < -1$, а $a > b$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$ab^6 = \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$$

$$ab^{12} = 5-x$$

$$ab^{14} = \sqrt{(13x-35)(x+1)}$$

$$b^2 = \frac{\sqrt{(13x-35)(x+1)}}{5-x}$$

$$b^6 = \frac{(5-x)\sqrt{(x+1)^3}}{\sqrt{13x-35}}$$

$$\frac{(13x-35)(x+1)\sqrt{(13x-35)(x+1)}}{(5-x)^3\sqrt{(x+1)^3}} = (5-x)\sqrt{(x+1)^3}$$

$$(13x-35)^2(x+1)\sqrt{x+1} = \sqrt{(x+1)^3} \cdot \sqrt{(13x-35)^4}$$

$$13x+35 \quad (13x-35)^2 = (5-x)^4$$

$$(13x-35) = (5-x)^2$$

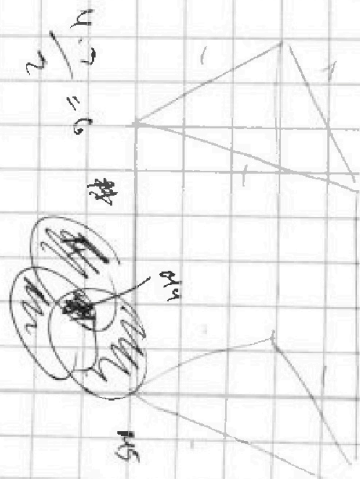
$$25 - 10x + x^2 - 13x + 35 = 0$$

$$x^2 - 23x + 60 = 0$$

$$* x_1 = 3$$

ответ (3)

$$x_2 = 20 \quad \emptyset$$



$$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 - p = 0$$

$$t^2 (4t + 6) + 3t - 3 - p = 0$$

$$4(2+4) + 3(2+3) - 3 - p = 0$$

$$4(2+4) + 3(2+3) - 3 - p = 0$$

$$4 \frac{2t^2(2t+3)}{(2t+3)(2t^2+1)} + (2t+3) + t - 6 = p$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

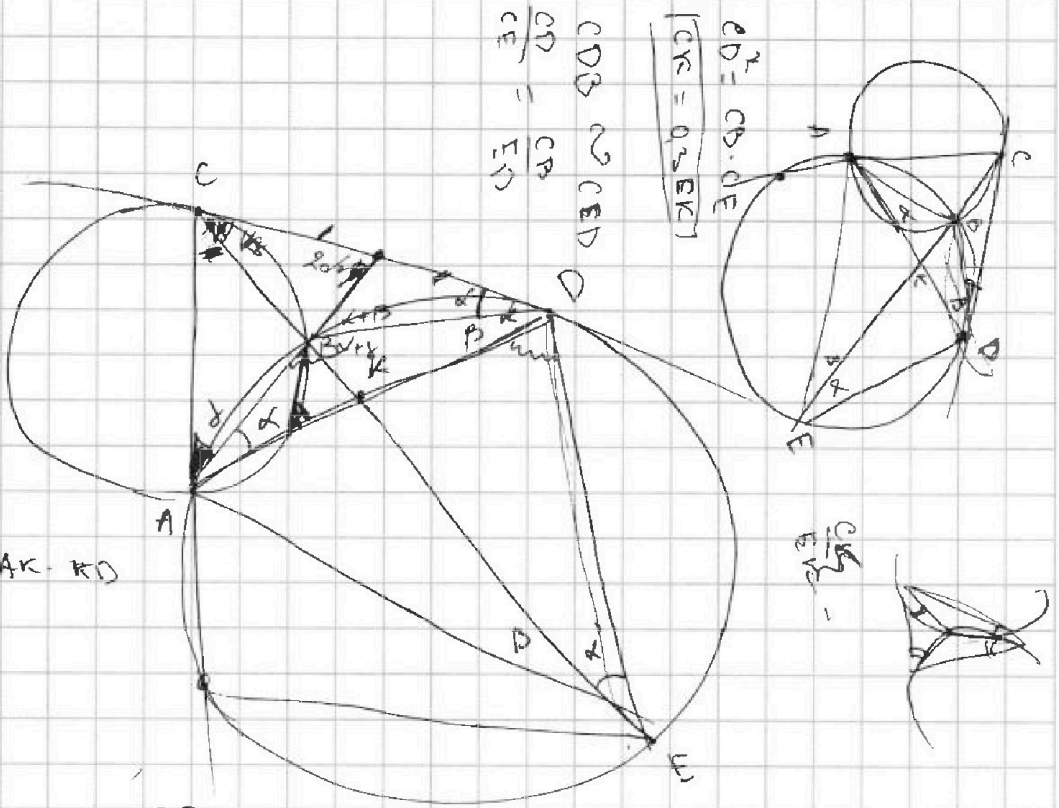
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4x^3 + 6x^2 + 3x - 3 - 2 = 0$$

$$4x^3 = (CK - BK)(CK + BK)$$

$$4x^2 = (CK - BK)$$

$$BK \cdot KE = AK \cdot KD$$



125 1 125

100	2	2	100
2	1	1	2
100			100

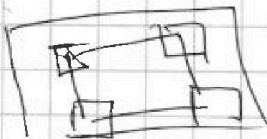
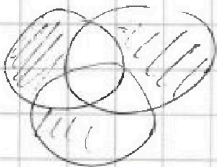
Только одна точка центра
(1,3) (2,4)

Только одна ось ср. мн 1
(1,2) (4,3)

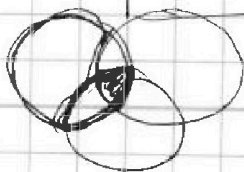
Только одна ось ср. мн 2
(2,5) (1,11)

относительно всего
ищется вобретя
2 клетки
43 ⊕

Всего



□	□	□	□
□	□	□	□
□	□	□	□



.	□
□	.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновой и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos 3x + 3\cos 2x + 6\cos x = p$$

$$4\cos^3 x + 6\cos^2 x + 3\cos x - 3 - p = 0$$

$$\cos(x+2x) = \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x$$

$$\cos x (2\cos^2 x - 1) - 2\sin^2 x \cos x$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$2(1 - \cos^2 x) \cos x$$

$$2\cos^3 x - \cos x + 2\cos x - 2\cos^3 x + 6\cos^2 x - 3 + 6\cos x = p$$

$$6\cos^2 x + 7\cos x - 3 = p$$

$$6t^2 + 7t - 3 - p = 0$$

$$D > 0 \quad D = 49 + 24(3+p) =$$

$$t_1 \in [-1, 1] \quad D = 121 + 24p$$

$$t_1 = \frac{-7 + \sqrt{121 + 24p}}{12} \leq 1$$

$$t_2 = \frac{-7 - \sqrt{121 + 24p}}{12} \geq -1$$

$$-7 + \sqrt{121 + 24p} \leq 12$$

$$\sqrt{121 + 24p} \leq 19$$

$$4t^2 - 6t + 3$$

$$D = 36 - 48 = -12 < 0$$

$$P(x+0,5)^2$$

$$p \geq -\frac{121}{24}$$

$$\frac{16}{48}$$

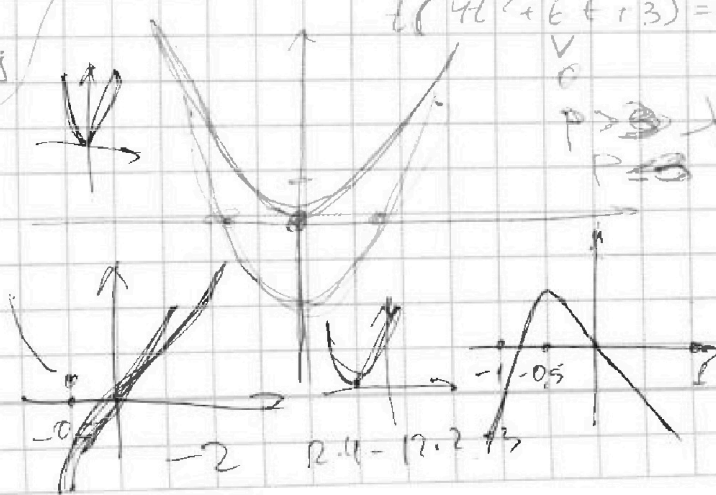
$$4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 - p = 0$$

$$y = 4t^3 + 6t^2 + 3t - 3 - p = 0$$

$$t(4t^2 + 6t + 3) = 0$$

$$p > 3$$

$$p = 3$$



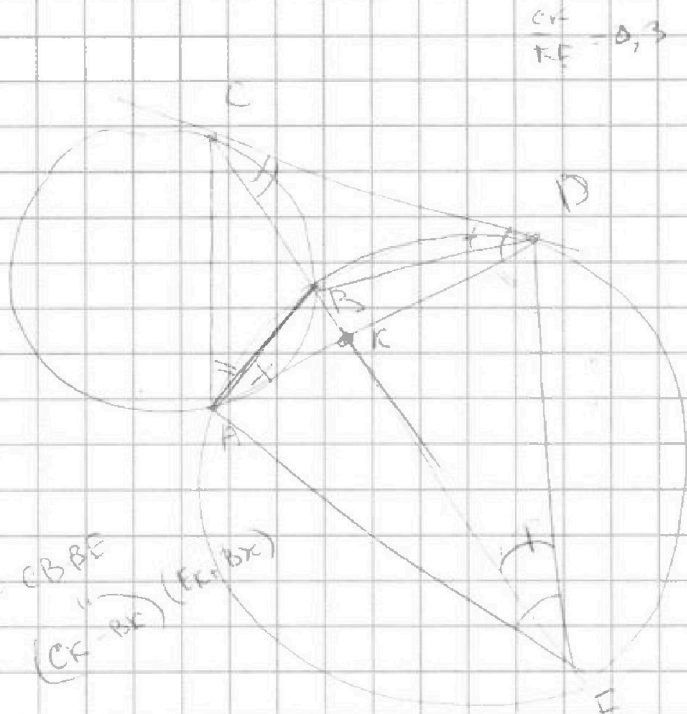


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{CK}{KE} = 0,3 \quad CK = 0,3KE$$

$$CD^2 = CB \cdot BE \cdot (CK - BK) \cdot (EK + BK)$$

$$CD^2 = CK \cdot EK - BK \cdot EK + CK \cdot BK - BK^2$$

$$2^5 \cdot 3 \cdot 5^{32} \cdot 15$$

$$(a-c)(b-c) = p^2$$

$$\Rightarrow a-c = p^2$$

$$b-c = 1$$

$$a-c = -1$$

$$b-c = -p^2$$

$$480 \mid 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 550 \\ \hline 2200 \end{array}$$

$$b = 1+c$$

$$a = p^2 + c$$

$$a = c - 1$$

$$b = c - p^2$$

$$a - b = p^2 - 1$$

$$\frac{550}{5} = 110$$

$$a - b = p^2 - 1 \quad 3$$

$$p^2 = 3 \Rightarrow p = 3$$

$$9 - 4 = 5$$

$$\frac{550}{5} = 110$$

$$\frac{110}{2 \cdot 5} = 11$$

$$\begin{array}{r} x \mid x^2 \\ 0 \mid 0 \\ 2 \mid 1 \end{array}$$

$$a + b^2 \geq 560$$

$$2209$$

$$b = 1+c$$

$$a = 9+c$$

$$9+c + 1+2c+c^2 = 560$$

$$c^2 + 3c + 10 = 560$$

$$c = -5 \quad c = 2$$

$$2 \cdot 5^2 \cdot 11$$

$$c = -25$$

$$c = 22$$

u80