



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



- 1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен $\sqrt{(25x - 9)(x - 6)}$, девятый член равен $x + 3$, а пятнадцатый член равен $\sqrt{\frac{25x - 9}{(x - 6)^3}}$.

- 2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x + 5} - \sqrt{1 - x - 4z} + 4 = 2\sqrt{y - 4x - x^2 + z}, \\ |y + 4| + 4|y - 5| = \sqrt{81 - z^2}. \end{cases}$$

- 3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 3(p + 4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $2 : 5$, считая от вершины C .
- 5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 100×400 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).
- 6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:
- $a < b$,
 - число $b - a$ не кратно 3,
 - число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
 - выполняется равенство $a^2 + b = 710$.
- 7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 1. Площади её боковых граней равны 3, 3 и 2. Найдите объём призмы.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2. \Rightarrow x \in (-\infty; 9/25] \cup [6; +\infty) \setminus \{5; 6; 7; -3; 9/25\}$$

$$x \in (-\infty; -3) \cup (-3; 9/25) \cup (6; 7) \cup (7; +\infty)$$

$$\text{Ответ: } x \in (-\infty; -3) \cup (-3; 9/25) \cup (6; 7) \cup (7; +\infty)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1. Геометрическая прогрессия: $b, qb, q^2b, \dots, q^{n-1}b, \dots$

$$\sqrt{(25x-9)(x-6)^7} = q^6 b \quad (1)$$

$$x+3 = q^8 b \quad (2)$$

$$\sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} = q^{14} b \quad (3)$$

$$(3) : (1) \Rightarrow q^8 = \frac{1}{\sqrt{(x-6)^7}} = \frac{1}{(x-6)^2} \text{, т.к. } \begin{cases} \text{шаг } q > 0 \\ \text{всегда } > 0 \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow x+3 = q^8 b = \frac{b}{(x-6)^2}$$

$$(x+3)(x-6)^2 = b$$

$$\text{ОДЗ: } (25x-9)(x-6) \geq 0$$

и интервалов

$$\begin{array}{c} + \quad \quad - \quad \quad + \\ \hline \frac{9}{25} \quad 6 \end{array} \quad x$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty; 9/25] \cup [6; +\infty) \\ x-6 \neq 0 \end{cases}$$

2. Заметим, что геометрическая прогрессия существует, если существует q, b и при этом они не равны 0, а так же q не равно 1 и все члены не равны 0

$$q = \frac{1}{\sqrt{|x-6|^7}} \notin \{0; 1\} \Rightarrow x \neq 6$$

$$|x-6| \neq 1$$

$$x-6 \neq \pm 1$$

$$x \notin \{+5; +7\}$$

$$b = (x+3)(x-6)^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -3$$

$$x \neq 6$$

$$\sqrt{(25x-9)(x-6)^7}; x+3; \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}} \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{9}{25}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
4 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5. по п. 2, 4. ~~по~~ подпадают ответом

$$y = 5$$

$$z = 0$$

$$x \in \left\{ -2 \pm \sqrt{8}; \frac{4 - \sqrt{11}}{2} \right\}$$

Ответ : $x \in \left\{ \frac{4 - \sqrt{11}}{2}; -2 \pm \sqrt{8} \right\}$

$$y = 5$$

$$z = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 4

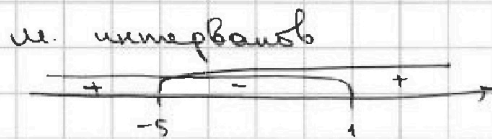
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1. \begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z} \\ |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2} \end{cases}$$

ОДЗ: $x+5 \geq 0$
 $1-x-4z \geq 0$
 $y-4x-x^2+z \geq 0$
 $81-z^2 \geq 0$

по н. 2 $y \geq 5, z \geq 0:$

$$\begin{aligned} x+5 &\geq 0 \\ 1-x &\geq 0 \\ 5-4x-x^2 &\geq 0 \\ 9-(x+2)^2 &\geq 0 \\ (5+x)(x-1) &\leq 0 \end{aligned}$$



$$x \in [-5; 1]$$

4. $\sqrt{(x+5)(1-x)} \in \{1; 5/2\}$

1) $(x+5)(1-x) = 1$
 $5-4x-x^2 = 1$
 $4-4x-x^2 = 0$
 $x^2+4x+4 = 8$
 $x+2 = \pm\sqrt{8}$
 $x = -2 \pm \sqrt{8}$

2) $(x+5)(1-x) = \frac{25}{4}$
 $5-4x-x^2 = \frac{25}{4}$
 $x^2-4x+\frac{5}{4} = 0$

3) $4 < 8 < 9 \Rightarrow 2 < \sqrt{8} < 3$
 $0 < -2 + \sqrt{8} < 1$
 $-5 < -2 - \sqrt{8} < -4$
 \hookrightarrow не подходит

~~$x = -2 \pm \sqrt{8}$~~
 $D = 16 - 5 = 11$
 $x = \frac{4 \pm \sqrt{11}}{2}$

$9 < 11 < 16 \Rightarrow 3 < \sqrt{11} < 4$
 $0 < \frac{4 - \sqrt{11}}{2} < \frac{1}{2}$ - не подходит
 $\frac{7}{2} < \frac{4 + \sqrt{11}}{2} < 2$ - не подходит

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3. $y = 5$
 $z = 0$

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = \sqrt{x+5} + -\sqrt{1-x} + 4 =$$

$$= 2\sqrt{y-4x-x^2+z} = 2\sqrt{y-4x-x^2}$$

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 4 = 2\sqrt{y-(x+2)^2}$$

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} = 2\sqrt{\cancel{y-(x+2)^2}} - 4$$

$$(x+5)(1-x)$$

~~Handwritten work showing a system of equations and algebraic manipulations, including:~~

$$a = \sqrt{x+5}, b = \sqrt{1-x}$$

$$a - b = 2ab - 4 \Rightarrow a + 4 = 2a + (1)b$$

$$a^2 - b^2 = 6$$

$$\frac{a+4}{2a+1} + a^2 = 6$$

$$a^2 + 8a + 16 + a^2 = 6$$

$$4a^2 + 4a + 1$$

$$a^2 + 8a + 16 + 4a^2 + 4a^3 + a^2 =$$

$$a = \sqrt{(x+5)(1-x)}$$

$$x+5 + 1-x - 2\sqrt{(x+5)(1-x)} = 4(x+5)(1-x) -$$

$$- 16\sqrt{(x+5)(1-x)} + 16$$

$$4a^2 - 14a + 10 = 0$$

$$2a^2 - 7a + 5 = 0$$

$$a \in \left\{1; \frac{5}{2}\right\}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2 \quad |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2}, \quad a \in [0; 9]$$

• $y \in (-\infty; -4)$

$$-y-4 + -4y+20 = -5y+16 = a$$

$$0 \leq -5y+16 \leq 9$$

$$-16 \leq -5y \leq -7$$

~~$$3,2 \geq y \geq 1,4$$~~

$$3,2 \geq y \geq 1,4 \Rightarrow \text{не подходит (м.к. } y < 4)$$

• $y \in [-4; 5]$

$$|y+4| + 20 - 4y = 24 - 3y = a$$

$$0 \leq 24 - 3y \leq 9$$

$$24 \geq 3y \geq 15$$

$$\begin{array}{l} 8 \geq y \geq 5 \\ -4 \leq y \leq 5 \end{array} \quad \Rightarrow \text{не подходит}$$

$$\Rightarrow y = 5; \quad a = \sqrt{81-z^2}$$

$$z = 0$$

• $y \in (5; +\infty)$

$$y+4 + 4y+20 = 5y+16 = a$$

$$0 \leq 5y+16 \leq 9$$

$$-16 \leq 5y \leq -25$$

$$\frac{-16}{5} \leq y \leq -5 \Rightarrow \text{не подходит (м.к. } y > 5)$$



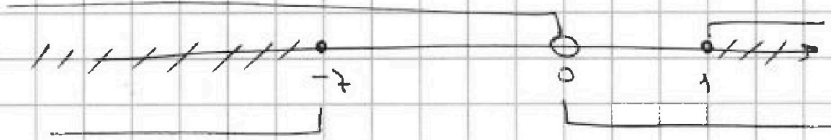
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
5 ИЗ 3

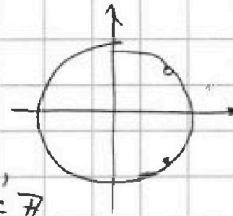
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3. Найдем пересечение множеств из п. 3.1, 3.2, 3.3 для этого изобразим их на коор. прямой



$$\Rightarrow p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$$

4. $\cos x = \frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1}$
 $x = \pm \arccos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1}\right) + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$



Ответ: $p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$

$$x = \pm \arccos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1}\right) + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3. ~~$\frac{1}{\sqrt[3]{p-1}}$~~ 1) $\sqrt[3]{p-1} + 1 \neq 0$

$$\sqrt[3]{p-1} + 1$$

$$p-1 \neq -1$$

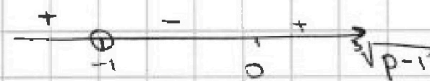
$$p \neq 0$$

2) $\frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1} \leq +1$

~~$\frac{2 + \sqrt[3]{p-1}}{\sqrt[3]{p-1} + 1}$~~ $\frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1} - 1 \leq 0$

$$\frac{\sqrt[3]{p-1}}{\sqrt[3]{p-1} + 1} \geq 0$$

и. интервалов



$$\begin{cases} \sqrt[3]{p-1} < -1 \\ \sqrt[3]{p-1} \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p-1 < -1 \\ p-1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p < 0 \\ p \geq 1 \end{cases}$$

3) $\frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1} \geq -1$

$$\frac{2 + \sqrt[3]{p-1}}{\sqrt[3]{p-1} + 1} \geq 0$$

и. интервалов



$$\begin{cases} \sqrt[3]{p-1} \leq -2 \\ \sqrt[3]{p-1} > -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p-1 \leq -8 \\ p-1 > -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p \leq -7 \\ p > 0 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1. \quad p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = p(4 \cos^3 x - 3 \cos x) + 3p \cos x + 4 \cdot 3 \cos x = 6 \cos 2x + 10 = 6(2 \cos^2 x - 1) + 10$$

$$4p \cos^3 x + 12 \cos x - 12 \cos^2 x - 4 = 0$$

$$p \cos^3 x - 3 \cos^2 x + 3 \cos x - 1 = 0$$

$$(p-1) \cos^3 x + \cos^3 x - 3 \cos^2 x + 3 \cos x - 1 = 0$$

$$(\cos x - 1)^3 = 3 \sqrt{p-1} \cos^3 x$$

~~2. Заметим, что $\cos x \in [-1, 1] \Rightarrow \cos x - 1 \in [-2, 0]$
 $(\cos x - 1)^3 \in [-8, 0]$~~

$$\cancel{3 \sqrt{p-1} \cos^3 x} = (p-1) \cos^3 x$$

2. Заметим, что $\cos x \in [-1, 1]$
 $\cos x \in [-1, 1] \Rightarrow 1 - \cos x \in [0, 2]$
 $\cos^3 x \in [-1, 1] \Rightarrow (1 - \cos x)^3 \in [0, 8]$
 $(p-1) \cos^3 x \in [1-p, p-1]$

~~Заметим, что $\cos x \in [-1, 1] \Rightarrow \cos x - 1 \in [-2, 0]$
 $(\cos x - 1)^3 \in [-8, 0]$
 $3 \sqrt{p-1} \cos^3 x \in [3 \sqrt{p-1}(-1)^3, 3 \sqrt{p-1}(1)^3]$
 $3 \sqrt{p-1} \cos^3 x \in [-3 \sqrt{p-1}, 3 \sqrt{p-1}]$~~

$$\Rightarrow (1 - \cos x)^3 = 3 \sqrt{p-1} \cos^3 x$$

$$2. \quad 1 - \cos x = \sqrt[3]{p-1} \cos^3 x$$

$$\cos x (\sqrt[3]{p-1} + 1) = 1 \quad | : (\sqrt[3]{p-1} + 1) \neq 0, \text{ т.к. } \sqrt[3]{p-1} + 1 = 0 \Rightarrow p = 0$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt[3]{p-1} + 1} \in [-1, 1]$$

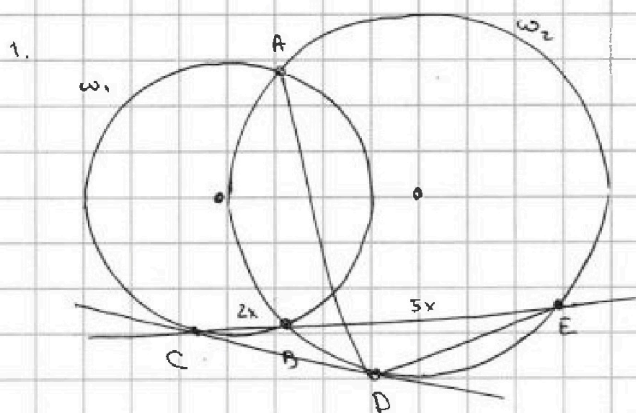
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



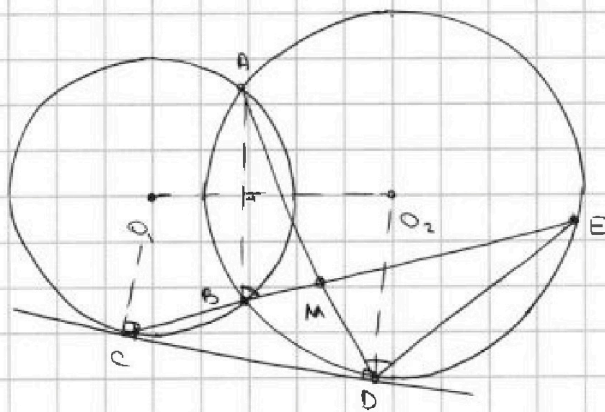
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Случай 1



$$\frac{CM}{ME} = \frac{2}{5}$$

Найти: $ED : CD$

н.к. CE - сек. ω_2 , CD - кас. ω_2 : $CD^2 = CB \cdot CE$

н.к. AD, BE - хорды \Rightarrow ~~$\triangle BMA \sim \triangle MDE$~~ ~~$\triangle BMA \sim \triangle MDE$~~

~~$\triangle BMA$~~

$$\triangle BMA \sim \triangle MDE : \frac{MB}{BA} = \frac{MD}{DE}$$

$$\Rightarrow MB = \frac{MD \cdot BA}{DE} = CM - CB$$

$$CD^2 = \left(CM - \frac{MD \cdot BA}{DE} \right) CE$$



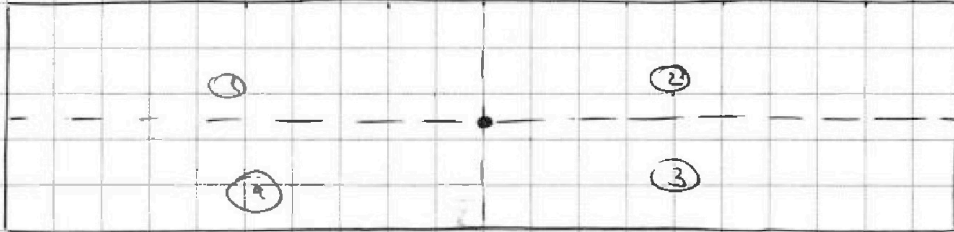
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1.



Заметим, что когда я выбираю клетку вторично выбирается автоматически (н.к. сим-на)

Также, заметим что когда объединяем точки сим-но относительно обеих средних линий, оно сим-но относительно центральной точки и при повороте их нулево возвести

2. Сим-но относительно центра:

~~Всего вариантов 100.400 = 20000~~
~~и выбрать там 4 точки~~

тогда 1 сим-на 3, 2 - сим-на 4 и)
можно рас-ть только часть 1, 2
и выбрать там 4 точки
Всего вариантов $\frac{100 \cdot 400}{2} = 20000$

и) 4 клетки можно выбрать ~~или~~ C_{20000}^4
~~20000, 19999, 19998, 19997~~

3. Сим-но относительно "ср. линии":

аналог. и. 2, только сим-но 1-4; 2-3
или 1-2; 4-3

и) вариантов $2 \cdot C_{20000}^2$
→ н.к. 2 ср. линии



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4. Сила-нос отн. обеих ср. линий

⇒ все засти сила-нос ⇒
нужно встроить 2 точки в одну засти.
Всего клеток $\frac{200 \cdot 100}{10^4} = 10000$

⇒ Вариантов C_{10000}^2

5. по н. 1, 2, 3, 4 ⇒ всего вариантов $3C_{10000}^4 - C_{10000}^2$

Ответ: $3C_{10000}^4 - C_{10000}^2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3. \quad a^2 + b = (c+1)^2 + p^2 + c = c^2 + 3c + 1 + p^2 = 710$$

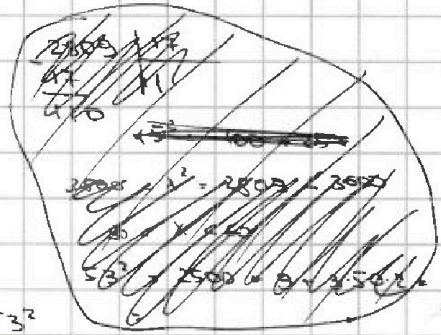
$$p = 3$$

$$\Rightarrow c^2 + 3c + 1 + 9 = 710$$

$$c^2 + 3c = -700 - 9$$

$$D = 9 + 700 \cdot 4 = 2809 = 53^2$$

$$c = \frac{-3 \pm 53}{2} \in \{25; -28\}$$



$$4. \quad 1) \quad c = 25$$

$$a = c + 1 = 26$$

$$b = c + p^2 = 25 + 9 = 34$$

$$\bullet \quad a < b : 26 < 34 \text{ - верно}$$

$$\bullet \quad b - a = 34 - 26 = 8 = 2 \cdot 4 = 8 / 3$$

$$\bullet \quad (a-c)(b-c) = 1 \cdot 9 = 3^2$$

$$\bullet \quad a^2 + b^2 = 26^2 + 34 = 100 +$$

$$+ 36 + 26 \cdot 6 \cdot 2 + 34 = 470 + 240 = 710$$

$$2) \quad c = -28$$

$$a = -27 = c + 1$$

$$b = c + p^2 = c + 9 = -19$$

$$\bullet \quad a < b : -27 < -19$$

$$\bullet \quad b - a = 8 / 3$$

$$\bullet \quad (a-b)(b-c) = 9 = 3^2$$

$$\bullet \quad a^2 + b = 400 + 49 + 720 \cdot 2 - 19 = 430 + 280 = 710$$

2) Нашим решением тройки $(a; b; c)$:

$$(26; 34; 25); (-27; -19; -28)$$

Ответ: $(26; 34; 25); (-27; -19; -28)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1. $(a-c)(b-c) = p^2$, p - простое

Т.к. $a, b, c \in \mathbb{Z} \Rightarrow (a-c) \in \mathbb{Z}; (b-c) \in \mathbb{Z}$

Т.к. p - простое $(a-c) \equiv 0 \pmod{k}, k \in \mathbb{N} \setminus \{1; p^2; p^3\}$
 $(b-c) \not\equiv 0 \pmod{k}$

$\left[\begin{array}{l} \text{о/н } (a-c) : k \Rightarrow p^2 : k, \text{ т.к. } p \text{ - простое} \\ \Rightarrow p : k \Rightarrow p = k \Rightarrow \text{отв} \end{array} \right]$

$\Rightarrow \begin{cases} a-c = p \\ b-c = p \end{cases} \Rightarrow a=b \Rightarrow \text{отв } (a < b)$
 $\begin{cases} a-c = 1 \\ b-c = p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-c = p^2 \\ b-c = 1 \end{cases} \Rightarrow a-p^2 = b-1 \Rightarrow a-b = p^2-1 > 0$
 p - прос. $a > b \Rightarrow \text{отв}$
 (т.к. $a < b$)

$\Rightarrow \begin{cases} a-c = 1 \\ b-c = p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = c+1 \\ b = c+p^2 \end{cases}$

3. $\frac{a^2+b}{c^2+3c+p^2+1} = \frac{(c+1)^2+c+p^2}{c^2+3c+p^2+1} = \frac{2c^2+2c+1+c+p^2}{c^2+3c+p^2+1} = \frac{c^2+c+1+p^2}{c^2+3c+p^2+1} = \frac{c+1+p^2}{c^2+3c+p^2+1}$

2. $b-a = p^2 - 1 \not\equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow (p-1)(p+1) \not\equiv 0 \pmod{3}$

$\Rightarrow \begin{cases} p-1 \not\equiv 0 \pmod{3} \\ p+1 \not\equiv 0 \pmod{3} \end{cases} \Rightarrow p \not\equiv \pm 1 \pmod{3}$

Заметим, что $p-1; p; p+1$ - 3 послед. числа \Rightarrow одно из них делится на 3
 т.к. $p-1 \not\equiv 0 \pmod{3}$ и $p+1 \not\equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow p \equiv 0 \pmod{3}$, т.к.
 p - простое $\Rightarrow p = 3$

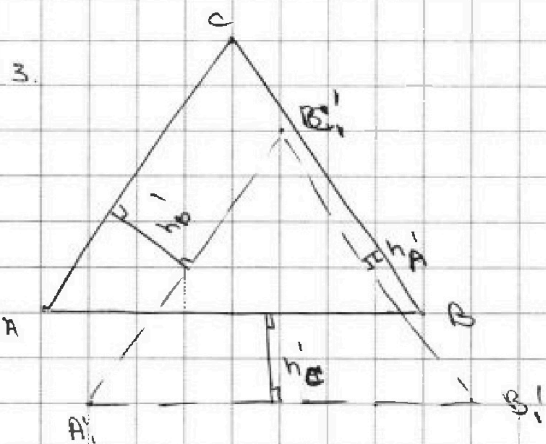


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$h_a^2 - h'_a{}^2 = h^2$$

$$h_b^2 - h'_b{}^2 = h^2$$

$$h_c^2 - h'_c{}^2 = h^2$$

по н. 1 $h_a = h_b$
 $\Rightarrow h'_a = h'_b$

~~$\Rightarrow A, B, C, C'$~~
~~на плоскости~~

4. Прямые перпендикулярны к CC_1 на AC и CB

\Rightarrow они равны $\Rightarrow CC_1 - S_{ABC} - SA \in \angle ABC, \angle A, B, C,$

$\Rightarrow (CC_1) \perp (AB) \perp (A'B')$ ~~на плоскости~~
 \hookrightarrow высота, медиана ~~на плоскости~~
 ~~AA', BB', CC'~~

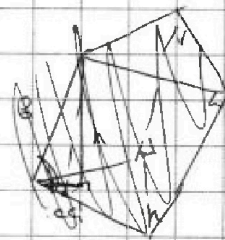
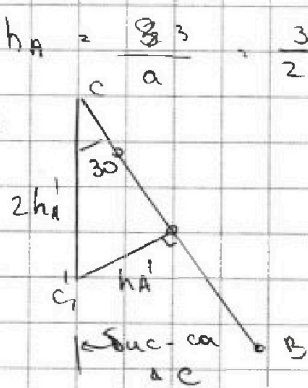
$\Rightarrow A', B', BA$ - вы-ка ~~на плоскости~~

~~AA', BB', CC'~~ \Rightarrow по н. 2 ~~AA', BB', CC'~~ - вы-ка

$$\Rightarrow A, B = b = hc = \frac{2}{a} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow h_a = \frac{8\sqrt{3}}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

5. $\triangle CC_1M_A$



$\triangle CC_1C_1$
 $b^2 = h^2 + 4h_a^2 = \sqrt{3}$
 н.к. $(CC_1) \perp (ABC)$
 $h^2 + h_a^2 = h_a^2 = \frac{9\sqrt{3}}{4}$ (н. 3)

$$\Rightarrow h^2 = \frac{8\sqrt{3}}{3} = \frac{8}{\sqrt{3}} \quad V = S_{ABC} h = \sqrt{8\sqrt{3}}$$



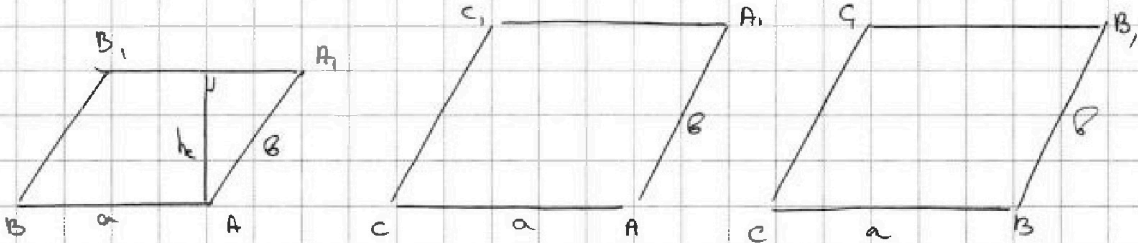
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

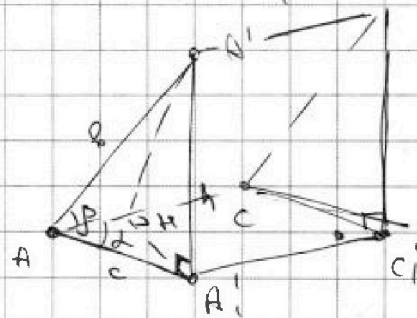
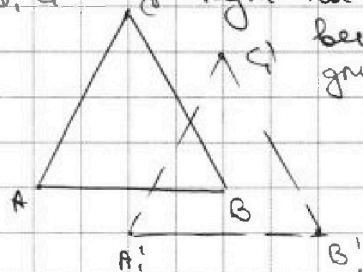
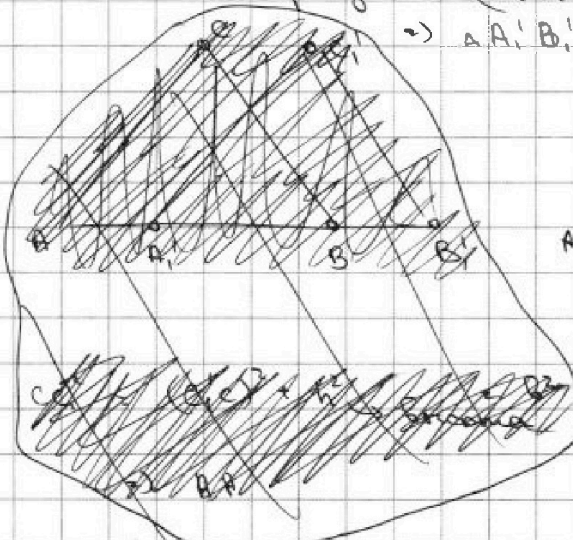
2.



Рассмотрим проекц. $\Delta A_1B_1C_1$ на (ABC)

т.к. плоскости $(A_1B_1C_1) \parallel (ABC)$

$\Rightarrow \Delta A_1B_1C_1$ - сдвинут на какой-то вектор параллельно с



$\ast (A_1H) \perp (AC)$ - проекц
 (A_1H) - перпенд $\Rightarrow (A_1H) \perp (AC)$

$\Rightarrow c \cdot \sin \alpha = A_1H$

$b \cdot \sin \beta = A_1H$

~~$(A_1H)^2 = (c \sin \alpha)^2 = h^2$~~
 ~~$(A_1H)^2 = (b \sin \beta)^2 = h^2$~~
 $(A_1H)^2 - (A_1'H)^2 = h^2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 4

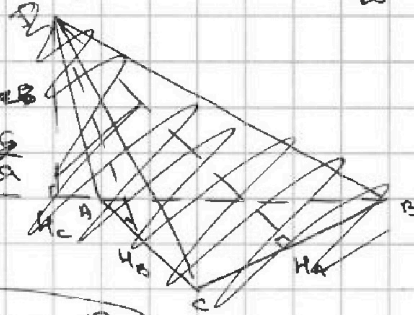
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1. В основании равнобокого ~~прямоугольного~~ ~~треугольника~~ ~~с~~ ~~сторонами~~ ~~a~~ $\Rightarrow S_{осн} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4} = 1 \Rightarrow a^2 = \frac{4}{\sqrt{3}}$

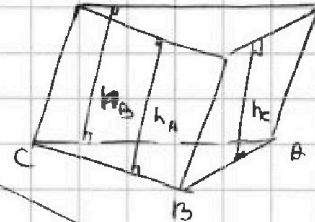
$$S_{бок\ гр\ ан} = \frac{1}{2} a h_i$$

$$3 = \frac{1}{2} h_A a = \frac{1}{2} h_B a = \frac{1}{2} h_C a$$

$$2 = \frac{h_C}{a} \Rightarrow S_{H_C} = \frac{1}{2} a$$



2. Проекция S на ABC - это O
 $(SH_A) \perp (BC)$ - макс. $\Rightarrow (OH_A) \perp (BC)$
 (OH_A) - проекция
 высоты $(OH_A) \perp (AB)$
 $(OH_B) \perp (AC)$



Также заметим, что $(SO) \perp (ABC) \Rightarrow (SO) \perp (HO)$ $\Rightarrow (SH_i)^2 = (OH_i)^2 + (OS)^2$

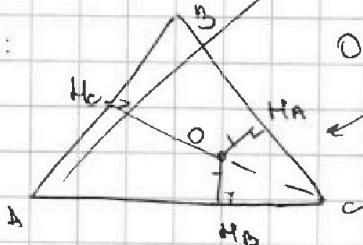
$$\Rightarrow (OH_A)^2 + (OS)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{36\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$$

$$(OH_B)^2 + (OS)^2 = 9\sqrt{3}$$

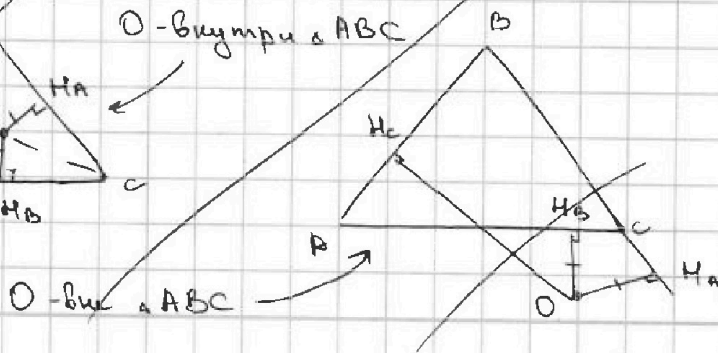
$$OS^2 + (OH_C)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{16\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow OH_A = OH_B = OH_C$$

3. (ABC):



O - внутри $\triangle ABC$



O - вне $\triangle ABC$

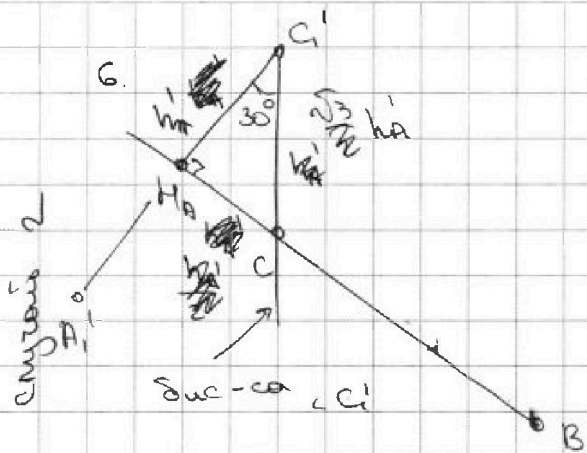


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
4 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\triangle CC'B: B^2 = h^2 + (\sqrt{3} h_a')^2 = \sqrt{3}$$

$$h^2 + h_a'^2 = h_a^2 = \frac{9\sqrt{3}}{4}$$

$$2h^2 = \frac{27 - 4\sqrt{3}}{4}$$

$$h^2 = \frac{23\sqrt{3}}{8}$$

$$V = 4h S_{ABC} = \sqrt{\frac{23}{8}} \sqrt[4]{3}$$

Ответ: $V \in \left\{ \sqrt{\frac{23}{8}} \sqrt[4]{3}; \frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{31}} \right\}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5. O - вне $\triangle ABC$, $\angle OCB = \angle ABB + \angle OCA =$
 $= \angle ACB + 180^\circ - \angle ACB = 180^\circ + \angle ACB = 90^\circ + 30^\circ$
 \hookrightarrow м.к. бис-са внеш. угла

$\angle OCB + \angle ABC = 90^\circ + 60^\circ = 180^\circ$

(м.к. $\triangle ABC$ - р.б.)

$\Rightarrow OC \parallel AB \Rightarrow OK_c = p(AB; OC) = h_c$

$OK_c = \frac{\sqrt{3}a}{2} = \sqrt{3}$

Высота $\triangle ABC$
из м.к.

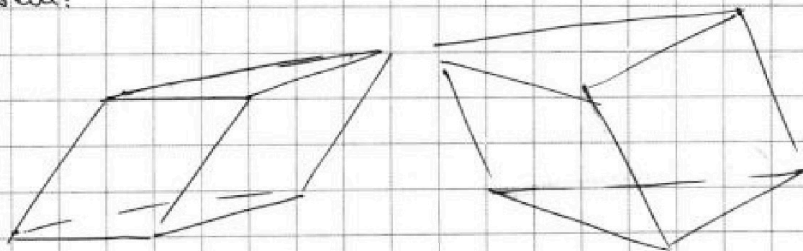
$\Rightarrow OS^2 + \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

~~OS~~ $OS^2 = 3\sqrt{3}$

$OS = \sqrt{3}\sqrt{3}$

$V = \frac{1}{3} OS \cdot S_{ABC} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$

Ответ:



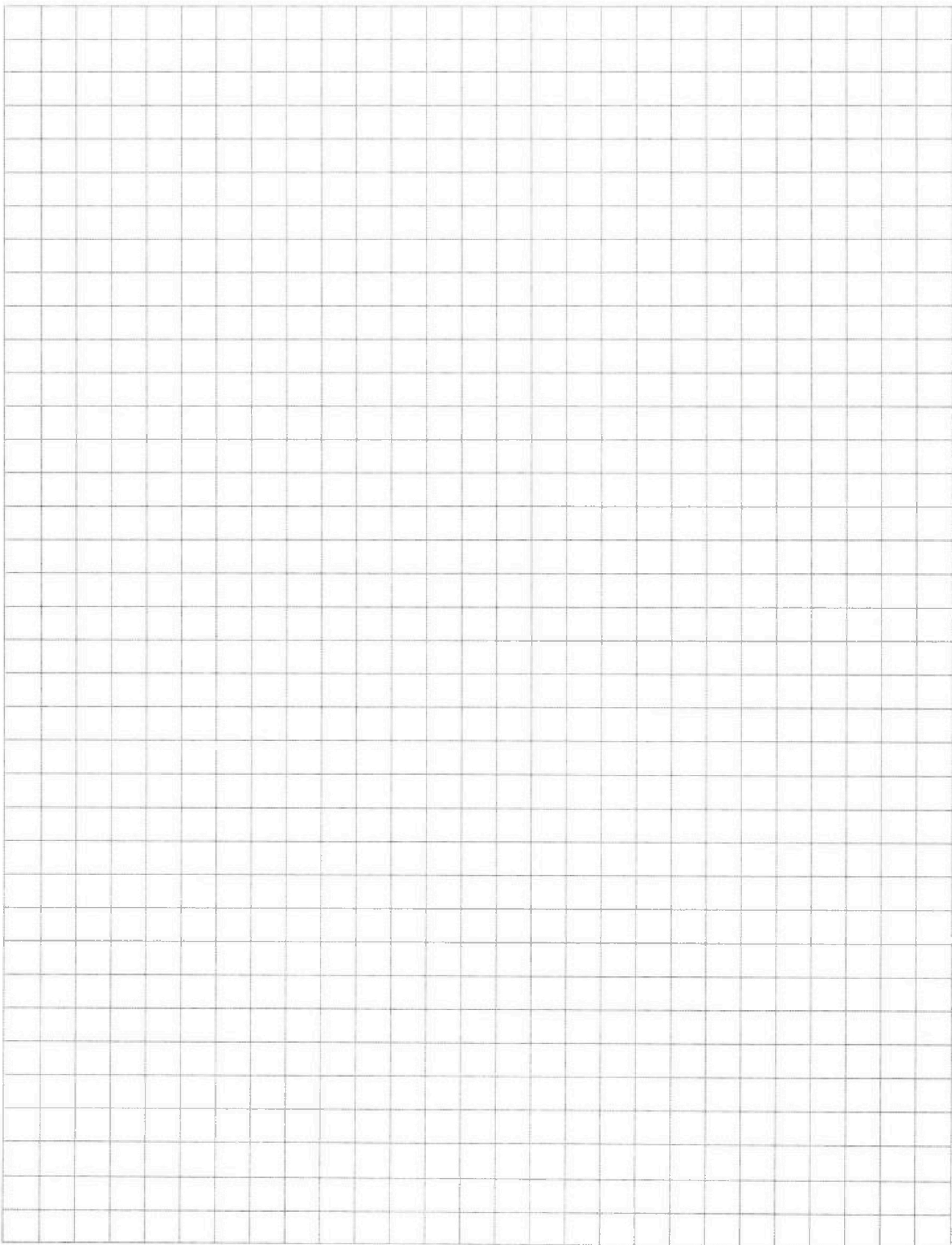


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3. Заметим, что т.к. $OM_A = OM_B$

$\Rightarrow OC$ - бис-са $\angle C$ (если O внут. Δ , то внут., иначе внешне).

1) OC - внут. бис-са

т.к. $OM_C \perp AB$, ΔABC - равн $\Rightarrow CM_C \perp AB$
 $O \in (CM_C)$

2) $\angle H_A C O = \frac{\angle B A C A}{2} = 30^\circ$ (т.к. ABC - равн.)

$\Rightarrow CO = 2 OM_A$

$OM_C = CO - OM_A = CM_C - OM_A = \frac{\sqrt{3}a}{2} - 2OM_A$
 \hookrightarrow высота равн. ΔABC

3) $(OM_A)^2 + (OS)^2 = 9\sqrt{3}$

$\Rightarrow OM_A = \sqrt{9\sqrt{3} - OS^2}$

$\left(\frac{\sqrt{3}a}{2} - 2OM_A\right)^2 + (OS)^2 = 4\sqrt{3}$

$(\sqrt{3} - 2\sqrt{9\sqrt{3} - OS^2})^2 + (OS)^2 = 4\sqrt{3}$

$\sqrt{3} + 4(9\sqrt{3} - OS^2) - 4\sqrt{27 - \sqrt{3}(OS)^2} + (OS)^2 = 4\sqrt{3}$

$-36OS^2 + 36\sqrt{3} + \sqrt{3} - 4\sqrt{3} - 4\sqrt{27 - \sqrt{3}(OS)^2} = 0$

$3(11\sqrt{3} - (OS)^2) = 4\sqrt{27 - \sqrt{3}(OS)^2} \quad | OS^2 < 11\sqrt{3}$

$9(11\sqrt{3})^2 - 22\sqrt{3}(OS)^2 + (OS)^4 = 16 \cdot 27 - 16\sqrt{3}(OS)^2$

///

32.1



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4 - вынуть $\triangle ABC$

$OH_c \perp AB$ \Rightarrow ~~OH_c~~ CH_c - выс-са, высота $\triangle ABC$
 OC - выс-са
 $\triangle ABC$ - равностор.

т.к. OC - выс-са $\Rightarrow \triangle COH_c$: $\angle C = 30^\circ$
 $\angle H_c = 90^\circ$

$$\Rightarrow OC = 2H_cO$$

$$(OH_c)^2 + (OS)^2 = (OC)^2 + (OS)^2 = 9\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow OH_c = 2\sqrt{9\sqrt{3} - OS^2}$$

$$OH_c = \sqrt{4\sqrt{3} - OS^2}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{9\sqrt{3} - OS^2} + \sqrt{4\sqrt{3} - OS^2} = CH_c = \frac{\sqrt{3} \cdot 2}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$4(9\sqrt{3} - OS^2) + 4\sqrt{3} - OS^2 +$$

$$+ 2\sqrt{(9\sqrt{3} - OS^2)(4\sqrt{3} - OS^2)} = \sqrt{3}$$

$$40\sqrt{3} - 2OS^2 + 2\sqrt{36\sqrt{3} - 13\sqrt{3}OS^2 + OS^4} = \sqrt{3}$$

$$4(36\sqrt{3} - 13\sqrt{3}OS^2 + OS^4) = 4OS^2 - 39 \cdot 4OS\sqrt{3} + (39\sqrt{3})^2$$

$$OS^2 \cdot 4 \cdot 13(13 - \sqrt{3}) = 39^2 \cdot 3 - 36\sqrt{3} \cdot 4$$

$$OS^2 = \frac{39^2 \cdot 3 - 36\sqrt{3} \cdot 4}{4 \cdot 13(13 - \sqrt{3})} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{39 - 16\sqrt{3}}{13(13 - \sqrt{3})}}$$

$$V = \frac{1}{3} OS \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \sqrt{\frac{39 - 16\sqrt{3}}{13(13 - \sqrt{3})}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{39 - 16\sqrt{3}}{13(13 - \sqrt{3})}}$$