



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^8 3^{14} 5^{12}$ ,  $bc$  делится на  $2^{12} 3^{20} 5^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 5 : 2$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-16;80)$ ,  $Q(2;80)$  и  $R(18;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 100,  $SA = BC = 16$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BSC$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a, b, c : 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$ ,  $a, b, c : 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$ ,  $a, b, c : 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{33}$

н.о.ч.  $a, b, c$

Пусть  $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5$  - степени в каноническом разложении  $a$ ;  
 $\beta_2, \beta_3, \beta_5$  - степени в каноническом разложении  $b$ ;  
 $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_5$  - степени в каноническом разложении  $c$

из (1):  $\alpha_2 + \beta_2 \geq 8$

$\alpha_3 + \beta_3 \geq 14$

(2):  $\beta_2 + \gamma_2 \geq 12$

$\beta_3 + \gamma_3 \geq 20$

(3):  $\alpha_2 + \gamma_2 \geq 14$

$\gamma_3 + \alpha_3 \geq 21$

$\alpha_2 + \gamma_2 + \beta_2 \geq \frac{34}{2} = 17$

$\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 2 \cdot \frac{35}{2} = 35$  (т.к.  $\sum \leq 40$ )

напр.:  $\beta_2 = 3, \alpha_2 = 5, \gamma_2 = 9$

напр.:  $\alpha_3 = 8, \beta_3 = 6, \gamma_3 = 14$

из (1):  $\alpha_5 + \beta_5 \geq 12$

(2):  $\beta_5 + \gamma_5 \geq 17$

$\alpha_5 + \beta_5 + \gamma_5 \geq 35$

(3):  $\gamma_5 + \alpha_5 \geq 39$

возьмем  $\alpha_5 = 19, \gamma_5 = 20$ , тогда

$\alpha_5 + \beta_5 \geq 19$  и  $\beta_5 + \gamma_5 \geq 20$  - ОК

~~Можно было бы...~~

$a, b, c \geq 2^{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2} \cdot 3^{\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3} \cdot 5^{\alpha_5 + \beta_5 + \gamma_5} = 2^{17} \cdot 3^{35} \cdot 5^{39}$

Пример:  $a = 2^5 \cdot 3^8 \cdot 5^{19}$

$b = 2^3 \cdot 3^6 \cdot 5^0$

$c = 2^9 \cdot 3^{14} \cdot 5^{20}$

Ответ:  $2^{17} \cdot 3^{35} \cdot 5^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

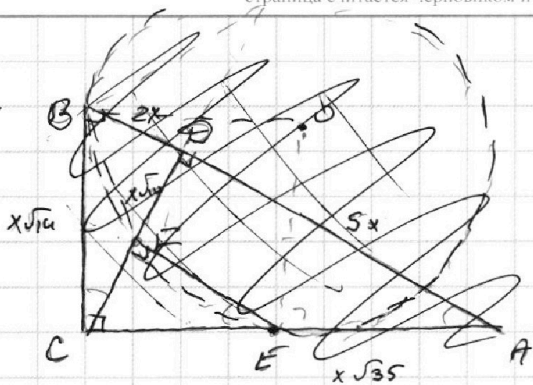
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2.



Пусть  $AD = 5x$ , тогда  $BD = 2x$   
 $CD$  по формуле высоты из прямого угла —  $x\sqrt{6}$

т.е.  $FE \parallel AD \angle CFE = 30^\circ$

По т.т. Пифагора  $BC = x\sqrt{6}$

$$AC = x\sqrt{5}$$

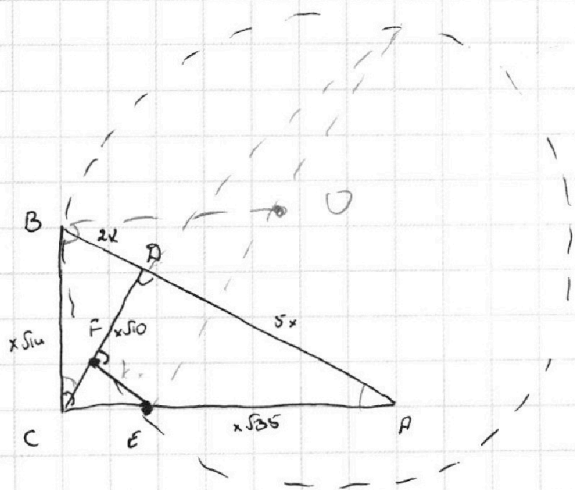
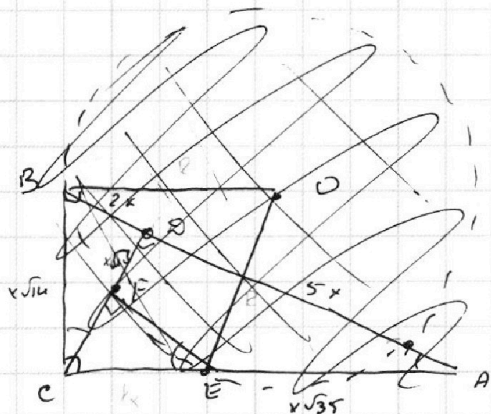
$F$  лежит на окружности и  $\angle EPD = 90^\circ \rightarrow \angle EPD$  опр. на диаметр

$$S_{ABC} = \frac{7}{5} \cdot S_{AED} \text{ по высоте } \text{и} \text{ } \text{или} \text{ } \text{площадей}$$

$$\frac{S_{CEF}}{S_{AED}} = \left(\frac{FE}{5x}\right)^2 \rightarrow S_{AED} = S_{CEF} \cdot \left(\frac{5x}{FE}\right)^2$$

$$S_{ABC} = \frac{7}{5} \cdot S_{CEF} \left(\frac{5x}{FE}\right)^2$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{7}{5} \cdot \left(\frac{5x}{FE}\right)^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

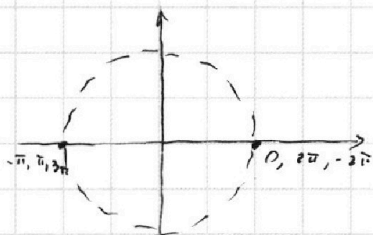
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} 3. \quad 10 a z e \sin(\cos x) &= \pi - 2x \\ 10 \left( \frac{\pi}{2} - a z e \cos(\cos x) \right) &= \pi - 2x \\ 5\pi - 10 a z e \cos(\cos x) &= \pi - 2x \\ 4\pi + 2x &= 10 a z e \cos(\cos x) \\ 2\pi + x &= 5 a z e \cos(\cos x) \\ 0 \leq \frac{2\pi + x}{5} &\leq \pi \quad 0 \leq \frac{a z e \cos(\cos x)}{1} \leq \pi \end{aligned}$$

$$x \in [-2\pi; 3\pi]$$



$$x \in [0; \pi] : a z e \cos(\cos x) = x$$

$$2\pi + x = 5x ; 2\pi = 4x ; x = \frac{\pi}{2} - 0k$$

$$x \in [\pi; 2\pi] : a z e \cos(\cos x) = 2\pi - x$$

$$2\pi + x = 10\pi - 5x$$

$$8\pi = 6x ; x = \frac{8\pi}{6} = \frac{4\pi}{3} - 0k$$

$$x \in [2\pi; 3\pi] : a z e \cos(\cos(x)) = x - 2\pi$$

$$2\pi + x = 5x - 10\pi ;$$

$$12\pi = 4x ; x = 3\pi - 0k$$

$$x \in [-\pi; 0] : a z e \cos(\cos x) = -x ; 2\pi + x = -5x ; 2\pi = -6x ; x = -\frac{\pi}{3} - 0k$$

$$x \in [-2\pi; -\pi] : a z e \cos(\cos x) = x + 2\pi ; 2\pi + x = 5(x + 2\pi) ; x = -2\pi - 0k$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{2}; \frac{4\pi}{3}; 3\pi; -\frac{\pi}{3}; -2\pi$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

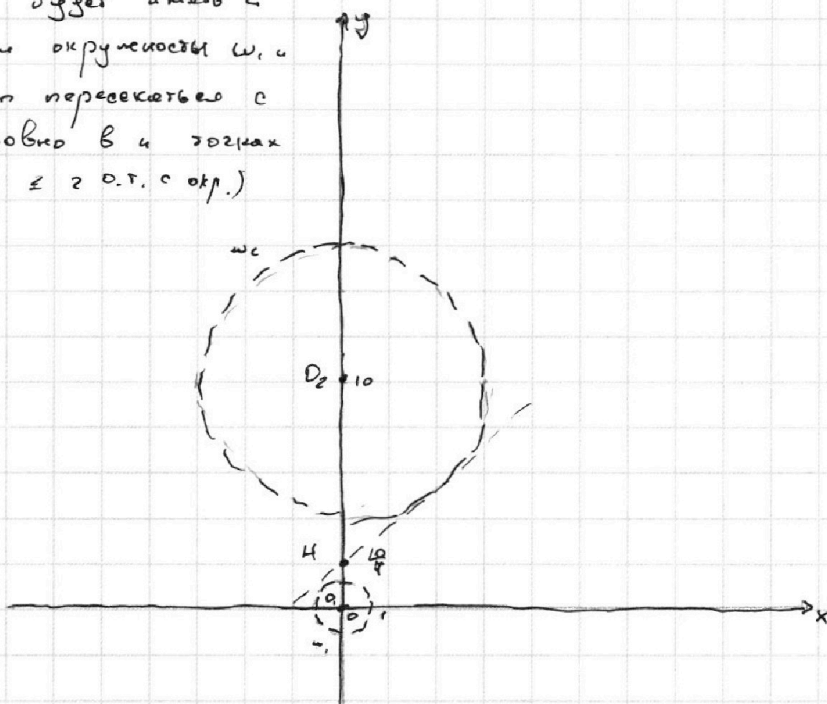


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$4. \begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 & (1) \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 2ay + 64) = 0 & (2) \end{cases}$$

В системе координат  $xOy$  (1) задает прямую, (2) - две окружности ( $\omega_1$  и  $\omega_2$ )  
 $\omega_1: x^2 + y^2 = 1$  - центр  $O(0;0)$   $R=1$   
 $\omega_2: x^2 + (y-10)^2 = 36$  - центр  $O_2(0;10)$   $R=6$

система будет иметь 4 реш., если окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  будут пересекаться с прямой ровно в 4 точках (у прямой  $\leq 2$  о.т. с окр.)



(1):  $y = \frac{a}{3}x + \frac{4b}{3}$ . Решим задачу для положительных  $a$ , получим также найденные  $a$ , но отрицательные (в силу симметрии картинки относительно  $Oz$ )  
 Практически,  $\frac{4b}{3}$  отвечает за паралл. перенос прямой (1) вдоль  $Oz$ . Заметим, что при достаточно больших  $a$  у прямой только будут 4 точки общие с окружностями. Найдем максимальное такое  $a$ , при котором будет не больше 3 о.т. с окружностями  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Проведем  $H$  - центр заготовки окр-тей и через него любую касательную к крив.  $\omega_1$ . При  $\frac{a}{3} > \frac{1}{\sqrt{3}}$  мы всегда сможем || перенести окружность в центр заготовки и будет 4 точки (при  $\leq \frac{a}{3}$  будет не более 2-х общих точек  $\omega_1$  и  $\omega_2$  - видно графически)  
 $O_1H: O_2H = 1:6; O_1H = x; O_2H = 6x$   
 $O_1H + O_2H = 10; \sqrt{x^2} = 10; x = \frac{10}{\sqrt{3}}$   
 $\rightarrow$  координ. т.  $H = \frac{10}{\sqrt{3}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(продолжение)

$y$  координат. т.к.  $\frac{a}{3} > \frac{10}{7}$  прямая, проходящая через  $\omega_1$  имеет 1 общую точку с  $\omega$ , (с  $\omega_2$  совп.)

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 1 \\ y &= kx + \frac{10}{7}\end{aligned}$$

$$x^2 + k^2 x^2 + \frac{20k}{7}x + \frac{100}{49} = 1$$

$$x^2(1+k^2) + \frac{20k}{7}x + \frac{51}{49} = 0$$

$$D = \frac{400k^2}{49} - 4 \left( \frac{51}{49} \right) \cdot (1+k^2) = 0$$

$$\frac{400k^2}{49} - \frac{204}{49}k^2 - \frac{204}{49} = 0$$

$$196k^2 = 204; \quad k^2 = \frac{51}{49} \quad k = \pm \frac{\sqrt{51}}{7}$$

Так, при  $\frac{a}{3} > \frac{\sqrt{51}}{7}$   $\exists \frac{1}{2}$  в, где кот. (1) имеет 1 общую точку  
при  $\frac{a}{3} \leq \frac{\sqrt{51}}{7}$  (1) имеет  $\leq 2$  общие точек  $\forall b$ .

(строго это обосновать можно так: // перенесем прямую (1) в центр тяжести. При перемещении её вниз общие точки могут быть только с  $\omega$ , выше — только с  $\omega_2$ )

Полюс. а:  $\frac{a}{3} > \frac{\sqrt{51}}{7}; \quad a > \frac{3\sqrt{51}}{7}$  (вкл. также случаи на отрезке  $z$  касания)

Итак, ответ:  $a \in (-\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{7}) \cup (\frac{3\sqrt{51}}{7}; +\infty)$



1     2     3     4     5     6     7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5.  $\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{2x} 3 \sqrt[4]{25} - 3;$  ОДЗ:  $x > 0$ ;  $x \neq \frac{1}{2}$   
у > 0; у ≠ 1

$$\log_5^4 y - 4 \log_y 5 = \frac{\log_{y^3} \frac{5}{2}}{-\frac{1}{3} \log_y 5} - 3;$$

$$\underbrace{\log_5^4(2x)}_{\text{возр. на } \mathbb{D}} = \frac{13}{3} \log_{2x} 5 - 3 = \frac{13}{3 \log_5(2x)} - 3 \quad \text{убыв на } \mathbb{D}$$

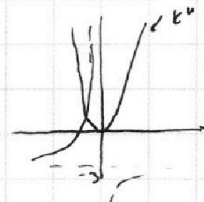
если решение и существует, то оно единственно.

Пусть  $\log_5(2x) = t$ ;  $3t^5 + 9t - 13 = 0$

проверим вычисл. что  $k \neq 3$ !

$\log_5^4 y = -\frac{13}{3} \log_3 5 - 3 = -\frac{13}{3 \log_3 y} - 3$ ;  $k^4 = -\frac{13}{3k} - 3$   
 Пусть  $\log_5 y = k$   $3k^5 + 9k + 13 = 0$

$3t^5 + 9t - 13 = 0$   
 $+ 3t^5 + 9t + 13 = 0$



$t^5 + k^5 + 3(t+k) = 0$ ;  $(t+k)(t^4 - t^3k + t^2k^2 - tk^3 + k^4 + 3) = 0$

$t+k = 0$

$t^4 - t^3k + t^2k^2 - tk^3 + k^4 + 3 = 0$

$\log_5 2xy = 0$   
 $xy = \frac{1}{2}$

Относ.  $k$  и  $t$ , как доказано выше, могут иметь ровно 1 действительное решение, значит, в силу монотонного возрастания логарифма, существует только одно значение  $xy$ .

Проверим, что  $xy = \frac{1}{2}$  - поук.  $t = -k$ ;  $\overbrace{3t^5 + 9t - 13 = 0}^{f(t)}$   
 $-3t^5 - 9t + 13 = 0$

Если относ.  $t$  ур-е решено, то относ.  $k$  и  $-t$  тоже

$f(t) = 3t^5 + 9t - 13 > 0 \rightarrow$  роль функции перем. на  $(t; 2) - t_6$

найдем  $x^*$ -корень ~~на~~  
 $\log_5 2x = x_0$   $x = \frac{1}{2}$  - не корень т.к.  $x_0 \geq 1$

$\log_5 2x = -\log_5 y$  (подст. корень  $x^*$  в ур-е и найдем  $y^*$ )  
 поук.  $x^* = \frac{1}{2}$ ,  $y^* = 1$

Ответ:  $\frac{1}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

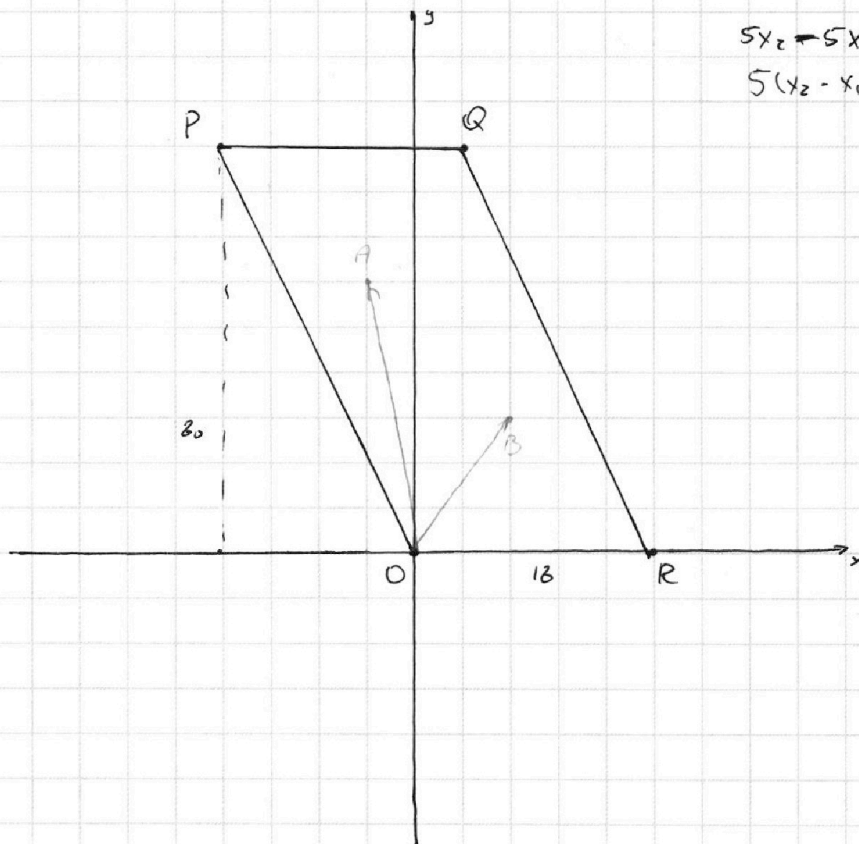
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6.



$$5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$$
$$5(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 45$$

$$-60 \leq y_2 - y_1 \leq 60$$

$$x_2 - x_1 = \frac{45 - (y_2 - y_1)}{5}$$
$$-18 \leq x_2 - x_1 \leq 18$$

$$-90 \leq 45 - (y_2 - y_1) \leq 90$$
$$-135 \leq y_1 - y_2 \leq 45$$





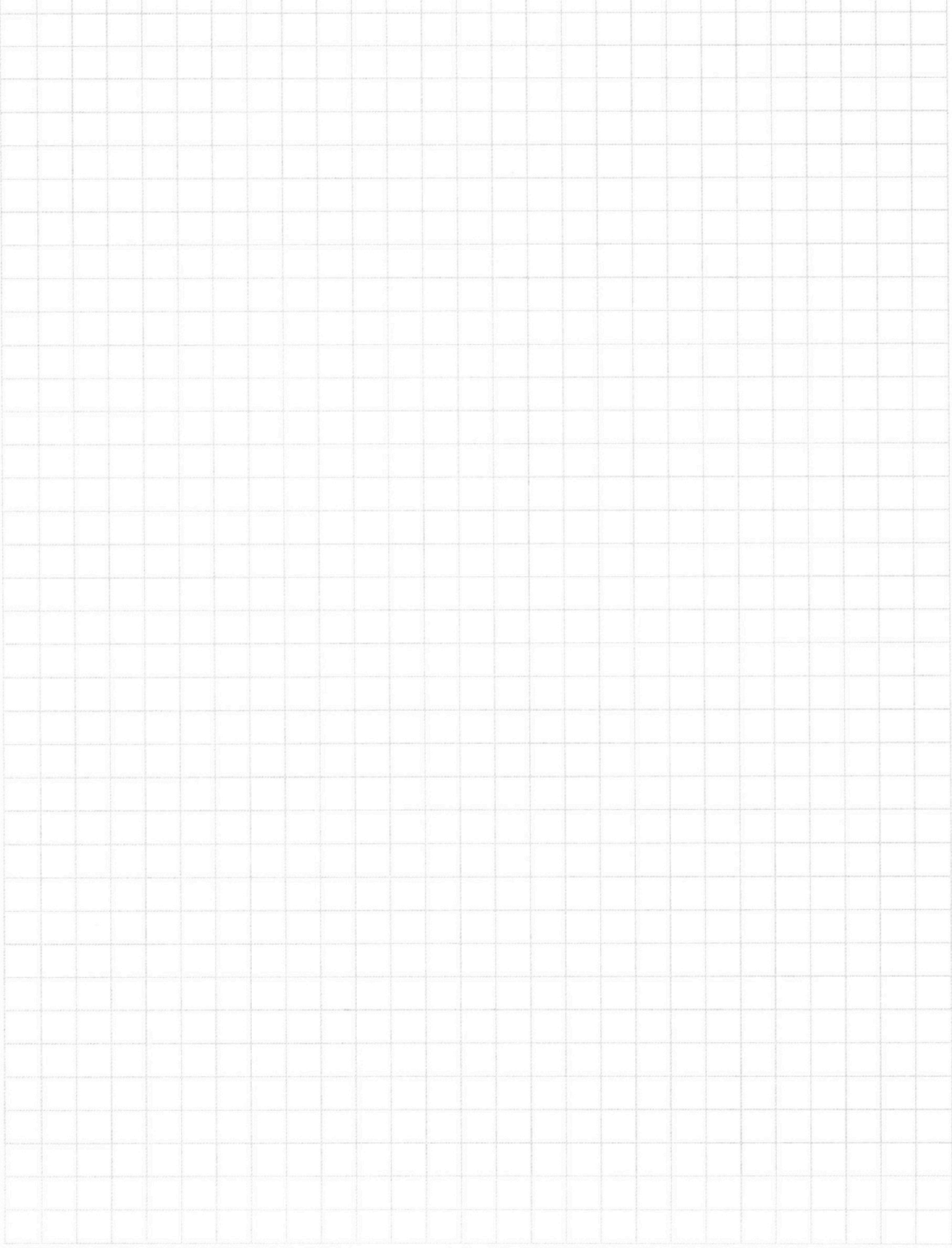
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





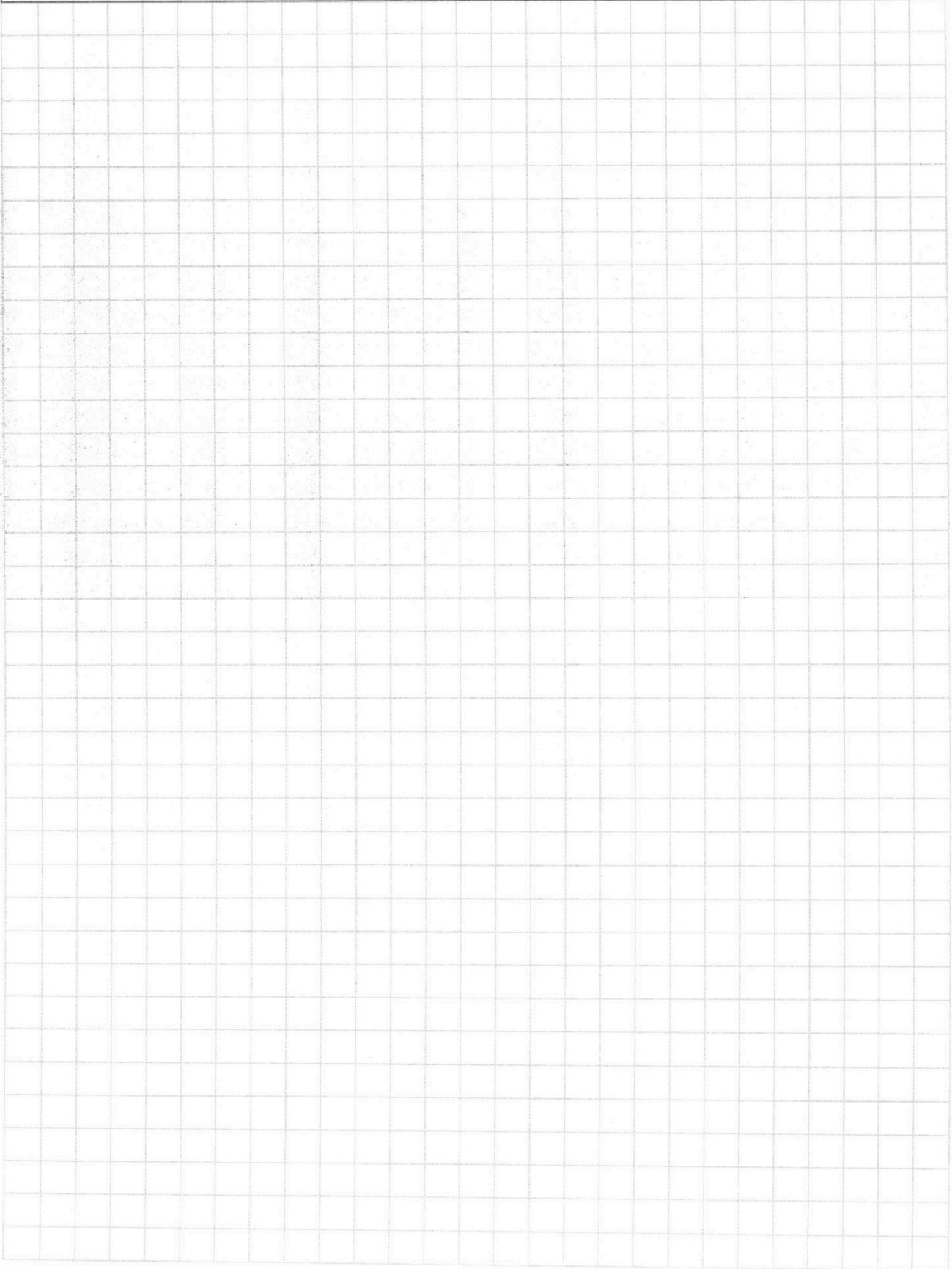
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

