МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4 (0{,}5y) + \log_{0{,}5y} 11 = \log_{0{,}125y^3} \left(11^{-13}\right) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

© МФТИ, 2023

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
X						

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1.

~~Разложим а, в, с на простые множители~~

Пусть в разложении на простые множители числа a: двойка имеет степень α_1, тройка – α_2, пятёрка – α_3; в разложении числа b: двойка – ~~в разложении~~ β_1, тройка – β_2, пятёрка – β_3; в разложении числа c: двойка – γ_1, тройка – γ_2, пятёрка – γ_3. Т.е.:

$a = 2^{\alpha_1}\cdot 3^{\alpha_2}\cdot 5^{\alpha_3}\cdot p$, где $p \in \mathbb{N}$, $p \not\vdots\, 2,3,5$

$b = 2^{\beta_1}\cdot 3^{\beta_2}\cdot 5^{\beta_3}\cdot q$, где $q \in \mathbb{N}$, $q \not\vdots\, 2,3,5$

$c = 2^{\gamma_1}\cdot 3^{\gamma_2}\cdot 5^{\gamma_3}\cdot w$, где $w \in \mathbb{N}$, $w \not\vdots\, 2,3,5$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2$ и $\gamma_3 \in \mathbb{Z}$; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \geq 0$

$a\cdot b = 2^{\alpha_1+\beta_1}\cdot 3^{\alpha_2+\beta_2}\cdot 5^{\alpha_3+\beta_3}\cdot p\cdot q \;\vdots\; (2^6\cdot 3^{13}\cdot 5^{11})$ $\left(\begin{matrix} p \not\vdots\, 2,3,5 \\ q \not\vdots\, 2,3,5\end{matrix}\right)$

Значит, $\begin{cases} \alpha_1+\beta_1 \geq 6 & (1) \\ \alpha_2+\beta_2 \geq 13 & (2) \\ \alpha_3+\beta_3 \geq 11 & (3)\end{cases}$

$b\cdot c = 2^{\beta_1+\gamma_1}\cdot 3^{\beta_2+\gamma_2}\cdot 5^{\beta_3+\gamma_3}\cdot q\cdot w \;\vdots\; (2^{14}\cdot 3^{21}\cdot 5^{13})$ $\left(\begin{matrix} q \not\vdots\, 2,3,5 \\ w \not\vdots\, 2,3,5\end{matrix}\right)$

Значит, $\begin{cases} \beta_1+\gamma_1 \geq 14 & (4) \\ \beta_2+\gamma_2 \geq 21 & (5) \\ \beta_3+\gamma_3 \geq 13 & (6)\end{cases}$

$a\cdot c = 2^{\alpha_1+\gamma_1}\cdot 3^{\alpha_2+\gamma_2}\cdot 5^{\alpha_3+\gamma_3}\cdot p\cdot w \;\vdots\; (2^{16}\cdot 3^{25}\cdot 5^{28})$ $\left(\begin{matrix} p \not\vdots\, 2,3,5 \\ w \not\vdots\, 2,3,5\end{matrix}\right)$

Значит, $\begin{cases} \alpha_1+\gamma_1 \geq 16 & (7) \\ \alpha_2+\gamma_2 \geq 25 & (8) \\ \alpha_3+\gamma_3 \geq 28 & (9)\end{cases}$

(1), (4) и (7):

$\begin{cases} \alpha_1+\beta_1 \geq 6 \\ \beta_1+\gamma_1 \geq 14 \\ \alpha_1+\gamma_1 \geq 16\end{cases}$; $2(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1) \geq 36$; $\alpha_1+\beta_1+\gamma_1 \geq 18$

(2), (5) и (8):

$\begin{cases} \alpha_2+\beta_2 \geq 13 \\ \beta_2+\gamma_2 \geq 21 \\ \alpha_2+\gamma_2 \geq 25\end{cases}$; $2(\alpha_2+\beta_2+\gamma_2) \geq 59$; $\alpha_2+\beta_2+\gamma_3 \geq 29\frac{1}{2}$

(3), (6) и (9):

$\begin{cases} \alpha_3+\beta_3 \geq 11 \\ \beta_3+\gamma_3 \geq 13 \\ \alpha_3+\gamma_3 \geq 28\end{cases}$; $2(\alpha_3+\beta_3+\gamma_3) \geq 52$; $\alpha_3+\beta_3+\gamma_3 \geq 26$

$a\cdot b\cdot c = 2^{\alpha_1+\beta_1+\gamma_1}\cdot 3^{\alpha_2+\beta_2+\gamma_2}\cdot 5^{\alpha_3+\beta_3+\gamma_3}\cdot p\cdot q\cdot w \geq 2^{\alpha_1+\beta_1+\gamma_1}\cdot 3^{\alpha_2+\beta_2+\gamma_2}\cdot 5^{\alpha_3+\beta_3+\gamma_3}$

$\cancel{\alpha_1+\beta_1+\gamma_1}$ Миним. значение $(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1) = 18$; $(\alpha_2+\beta_2+\gamma_2) = 30$ ($\alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \in \mathbb{Z}$, сумма $\in \mathbb{Z}$) ~~; $(\alpha_3+\beta_3+\gamma_3) = 26$~~

~~Тогда минимальное возможное~~ значение $a\cdot b\cdot c$ равно $2^{18}\cdot 5^{30}\cdot 5^{26}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~Пример: $a = 2^{9} \cdot 3 \cdot 5$~~

Т.к. $\begin{cases} (\alpha_3+\beta_3+\gamma_3) \geq 26 \\ \alpha_3+\gamma_3 \geq 28 \end{cases}$ то минимальное знач $(\alpha_3+\beta_3+\gamma_3) = 28$ $(\beta_3 \in \mathbb{Z}, \beta_3 \geq 0)$

~~Пример: $a = 2^{4} \cdot 3^{8}$~~

~~$b = 2^{2} \cdot 3^{5}$~~

~~$c = 2^{12} \cdot 3^{17}$~~

Тогда минимально возможное значение $abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

Пример: $a = 2^{4} \cdot 3^{8} \cdot 5^{14}$

$b = 2^{2} \cdot 3^{5} \cdot 5^{0} = 2^{2} \cdot 3^{5}$

$c = 2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{14}$

$a \cdot bc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

$a \cdot b = 2^{6} \cdot 3^{13} \cdot 5^{14} \;\vdots\; (2^{6} \cdot 3^{13} \cdot 5^{11})$

$b \cdot c = 2^{14} \cdot 3^{22} \cdot 5^{14} \;\vdots\; (2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13})$

$a c = 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28} \;\vdots\; (2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28})$

Ответ: $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

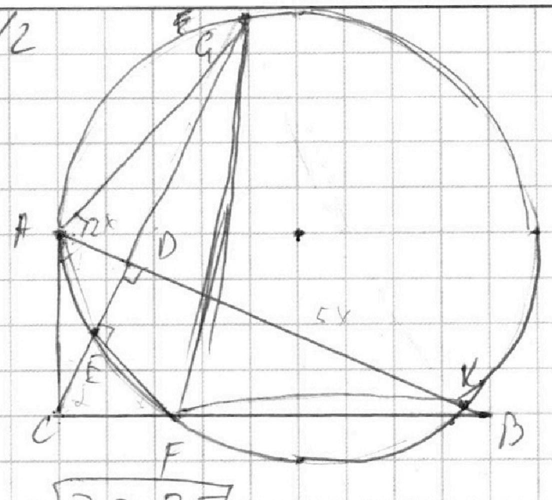
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№2



1. $AB : BD = 1,4$

$\frac{AB}{BD} = 1,4$; $\frac{AD+DB}{BD} = 1,4$

$\frac{AD}{BD} + 1 = 1,4$

$\frac{AD}{BD} = 0,4 = \frac{2}{5}$

Пусть $AD = 2x$; $BD = 5x$

Тогда $AC = \sqrt{AD \cdot AB} = \sqrt{14}\,x$

$BC = \sqrt{BD \cdot AB} = \sqrt{35}\,x$

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC$

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} CD \cdot AB$

$AC \cdot BC = CD \cdot AB$

$CD = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{\sqrt{14}x \cdot \sqrt{35}x}{7x} =$

$= \frac{\sqrt{7 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 5}}{7} x = \sqrt{10}\,x$

2. Т.к. $AB \parallel EF$, то $\angle EDB = \angle CEF = 90^\circ$

$S_{\Delta ADC} = \frac{1}{2} CD \cdot AD = \frac{1}{2}\sqrt{10}x \cdot 2x = \sqrt{10}x^2$

$S_{\Delta CEF} = \frac{1}{2} CE \cdot EF =$

3. $\Delta CEF \sim \Delta CDB$ (по двум углам):

1) $\angle C$ - общ.

2) $\angle CEF = \angle CDB = 90^\circ$

Значит $\frac{EF}{BD} = \frac{CE}{CD} = k$, где k - коэф. подобия

Тогда $CE = CD \cdot k$, $EF = BD \cdot k$

$S_{\Delta CEF} = \frac{1}{2}\sqrt{10}x \cdot k$; $EF = 5x \cdot k$ $= \frac{5\sqrt{10}x^2k^2}{2}$

4. $D.и.$ $ED \cap$ окр$(O;R) = G$; GF; AG; $K = AB \cap$ окр$(O;R)$; FK

~~5. Т.к. $\angle GEF = 90^\circ$, то GF = диаметр окр$(O;R)$~~

~~$GF = 2R$~~

~~$AC^2 = CE$~~

~~6. $\Delta ADC \sim \Delta CEF$ (по двум углам)~~

~~1) $\angle ADC = \angle CEF = 90^\circ$~~

~~2) $\angle DAC = 90^\circ - \angle ACD = \angle ECF$~~

~~Тогда $\frac{AD}{CE} = \frac{CD}{EF} = \frac{AC}{CF}$~~

~~$\frac{2x}{\sqrt{10}xk} = \frac{\sqrt{10}x}{5x \cdot k} = \frac{\sqrt{14}x}{CF}$; $CF = \frac{5x \cdot \sqrt{14}xk}{\sqrt{10}x} = \sqrt{35}kx$~~

~~5. $\angle DAC = 90$~~ 5. $EF \parallel AB$; $AKFE$ - впис., значит $AKFE$ - равнобедр. трапеция.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

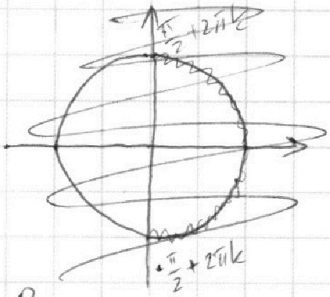
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3

$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$

~~Рассмотрим случаи:~~ $\cancel{x \in \left[-\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{\pi}{2}+2\pi k\right], k\in\mathbb{Z}}$



Заметим, что $\arccos(\sin x) \in [0;\pi]$

Тогда $10\cdot\arccos(\sin x) \in [0;10\pi]$

Значит, $9\pi - 2x \in [0;10\pi]$

$0 \le 9\pi - 2x \le 10\pi$

$-9\pi \le -2x \le \pi$

$\frac{9\pi}{2} \ge x \ge -\frac{\pi}{2}$

Рассмотрим случаи:

1) $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$: $\arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - x$

$10\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 9\pi - 2x$

$5\pi - 10x = 9\pi - 2x$

$8x = -4\pi$

$x = -\frac{\pi}{2}$ $\left(-\frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \text{ - явл. реш.}\right)$

2) $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$: $\arccos(\sin x) = x - \frac{\pi}{2}$

$10\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 9\pi - 2x$

$10x - 5\pi = 9\pi - 2x$

$12x = 14\pi$: $x = \frac{7}{6}\pi$ $\left(\frac{7\pi}{6} \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right] \text{ - явл. реш.}\right)$

3) $x \in \left(\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$: ~~$\arccos(\sin x) = x - \frac{\pi}{2} - 2\pi = x - \frac{5\pi}{2}$~~ $\frac{\pi}{2} - x - 2\pi =$

~~$10\left(x - \frac{5\pi}{2}\right) = 9\pi - 2x$~~

$10x - 25\pi = 9\pi - 2x$

$\arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - (x - 2\pi) = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi = \frac{5\pi}{2} - x$

$10\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) = 9\pi - 2x$

$25\pi - 10x = 9\pi - 2x$

$16\pi = 8x$

$x = 2\pi$ $\left(2\pi \in \left(\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right] \text{ - явл. реш.}\right)$

4) $x \in \left(\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$: $\arccos(\sin x) = (x - 2\pi) - \frac{\pi}{2} = x - \frac{5\pi}{2}$

$10\left(x - \frac{5\pi}{2}\right) = 9\pi - 2x$

$10x - 25\pi = 9\pi - 2x$

$12x = 34\pi$

$x = \frac{17\pi}{6}$ $\left(\frac{17\pi}{6} \in \left(\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right] \text{ - явл. реш.}\right)$

5) $x \in \left(\frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right]$: $\arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - (x - 4\pi) = \frac{9\pi}{2} - x$

$10\left(\frac{9\pi}{2} - x\right) = 9\pi - 2x$

$45\pi - 10x = 9\pi - 2x$

$8x = 36\pi$

$x = \frac{9\pi}{2}$ $\left(\frac{9\pi}{2} \in \left(\frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right] \text{ - явл. реш.}\right)$

Ответ: $-\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}; 2\pi; \frac{17\pi}{6}; \frac{9\pi}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4.

$\begin{cases} 5x+6ay-b=0 \\ (x^2+y^2-25)(x^2+y^2+18y+77)=0 \end{cases}$

$(x^2+y^2-25)(x^2+y^2+18y+77)=0$

$\left[\begin{array}{l} x^2+y^2-25=0 \\ x^2+y^2+18y+77=0 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x^2+y^2=5^2 \\ x^2+y^2+18y+81=4 \end{array}\right.$;

$\left[\begin{array}{l} x^2+y^2=5^2 \\ x^2+(y+9)^2=2^2 \end{array}\right.$

$x^2+y^2=5^2$ — ур-ие окр. с центром в $(0;0)$ и радиусом 5

$D(y)$ $x\in[-5;5]$

$E(y)$ $y\in[-5;5]$

$x^2+(y+9)^2=2^2$ — ур-ие окр. с центром в $(0;-9)$ и радиусом 2

$D(y)$ $x\in[-2;2]$

$E(y)$ $y\in[-7;-11]$

$5x+6ay-b=0$; $ay=-\frac{5x}{6}+\frac{b}{6}$

Если $a=0$, то $x=b/5$ (ур-ие прямой $\parallel Oy$) — при изменении b может принимать все действ. значения

Если $a\neq 0$, то $y=-\frac{5x}{6a}+\frac{b}{6a}$ (лин. функция) — a задаёт угол наклона прямой, при изменении $\frac{b}{6a}$ прямая смещается вверх или вниз ($\frac{b}{6a}$ может принимать все действ. значения)

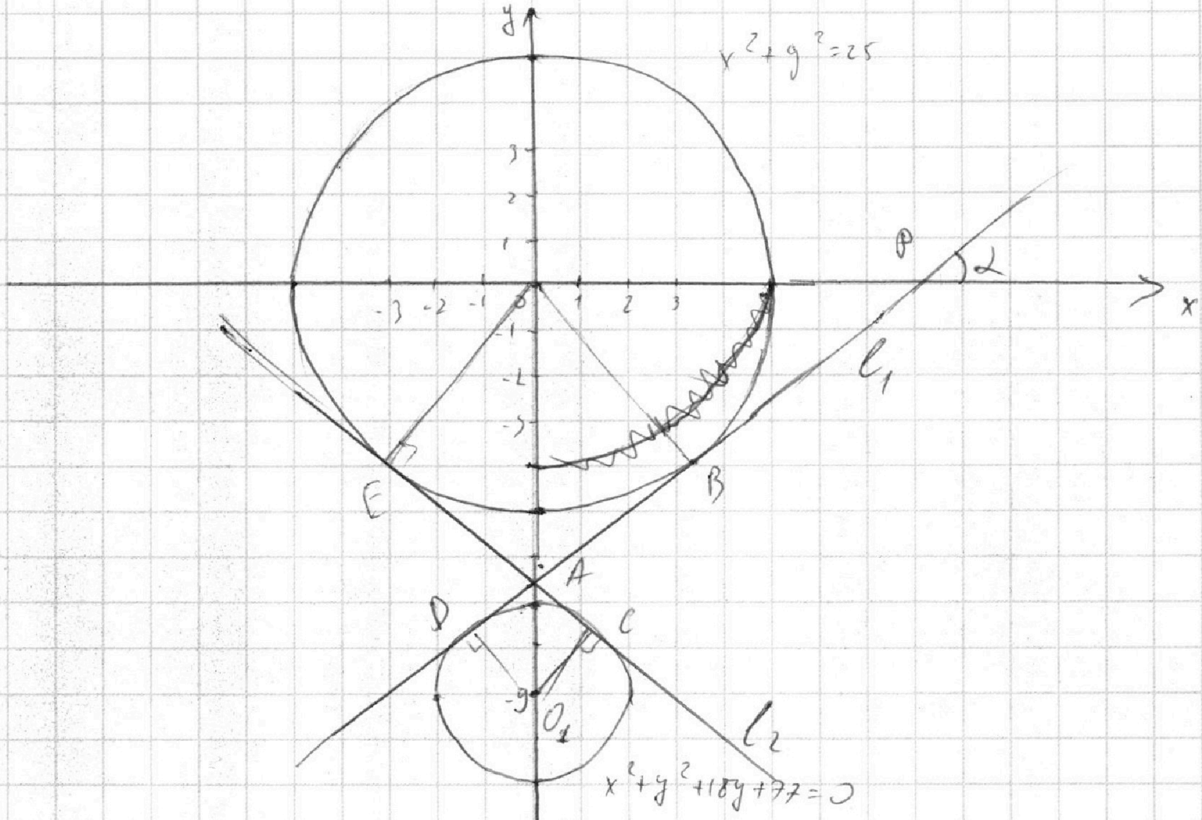
См. график на другой стороне листа.
См. продолжение решения на другой стороне листа.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Решением системы явл. точки пересеч. прямой $5x+6ay-b=0$ и любой из окр.

Заметим, что т.к. прямая $y=-\frac{5x}{6a}+\frac{b}{6a}$ может перемещаться вверх и вниз за счёт изм. параметра b при фикс. параметре a, то мы можем проверять существует ли прямая с ~~наклоно~~ коэф. наклона $-\frac{5}{6a}$, которая пересекает каждую окр. дважды.

При $a=0$ можно найти такой b, что система имеет 4 решения, например $b=0$

Обозначим l_1 и l_2 - общие внутр. касательные (коэф. наклона $l_1>0$, коэф. наклона $l_2<0$)

Тогда можно заметить, что прямые с коэф. наклона ~~меньше~~ $\leq$ чем у l_1, но $\geq$ чем у l_2 не могут пересеч. обе окр. дважды. Т.е. при этих ~~д~~ коэф. наклона a не подходит.

Найдём коэф. наклона l_1 и l_2:

1. Из О. и. опустим $OB\perp l_1$ и $OE\perp l_2$; $O_1D\perp l_1$; $O_1C\perp l_2$ (O_1 - центр меньшей окружности); $l_1\cap OX=P$

Продолжение на следующем листе

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
			X			

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№4 (продолжение)

2. $\triangle OBA \sim \triangle O_1DA$ (по двум углам)

1) $\angle OBA = \angle O_1DA = 90°$

2) $\angle O_1AD = \angle OAB$ – вертик.

Значит, $\frac{OA}{O_1A} = \frac{OB}{O_1D} = \frac{5}{2}$; $OA = \frac{5}{2} OA_1$

3. $OA_1 + OA = OO_1 = 9$

$\frac{7}{2} OA_1 = 9$

$OA_1 = \frac{18}{7}$

4. $\sin\angle O_1AD = \frac{O_1D}{O_1A} = \frac{2\cdot 7}{18} = \frac{14}{18} = \frac{7}{9}$

Тогда $\cos\angle O_1AD = \sqrt{1-\sin^2\angle O_1AD} = \sqrt{1-\frac{63}{81}} = \frac{\sqrt{18}}{9} = \frac{3\sqrt{2}}{9} = \frac{\sqrt{2}}{3}$

5. $\angle OAP = \angle O_1AD$ – вертик

$\angle OPA = 90° - \angle OAP$ (сумма острых углов пр. тр.)

$\alpha = \angle OPA$ (α – см. на графике)

$\alpha = \angle OPA = 90° - \angle OAP$

Тогда $\cos\alpha = \cos(90° - \angle OAP) = \sin\angle OAP = \sin\angle O_1AD = \frac{7}{9}$

$\sin\alpha = \sin(90° - \angle OAP) = \cos\angle OAP = \cos\angle O_1AD = \frac{\sqrt{2}}{3}$

Коэф. наклона $l_1 = tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{2}\cdot 9}{3\cdot 7} = \frac{3\sqrt{2}}{7}$

В силу симметрии коэф. наклона $l_2 = -\frac{3\sqrt{2}}{7}$

Тогда $-\frac{5x}{6a} \in \left[-\frac{3\sqrt{2}}{7}; \frac{3\sqrt{2}}{7}\right]$ – не явл. реш.

$\begin{cases} -\frac{5}{6a} \geq -\frac{3\sqrt{2}}{7} \\ -\frac{5}{6a} \leq \frac{3\sqrt{2}}{7} \end{cases}$ $\begin{matrix} |\cdot\left(-\frac{6}{5}\right) \\ |\cdot\left(-\frac{6}{5}\right) \end{matrix}$; $\begin{cases} \frac{1}{a} \leq \frac{18\sqrt{2}}{35} \\ \frac{1}{a} \geq -\frac{18\sqrt{2}}{35} \end{cases}$

1) $a > 0$

$\begin{cases} \frac{1}{a} \leq \frac{18\sqrt{2}}{35} & |\cdot a \\ \frac{1}{a} \geq -\frac{18\sqrt{2}}{35} & |\cdot a \end{cases}$; $\begin{cases} 1 \leq \frac{18\sqrt{2}}{35} a \\ 1 \geq -\frac{18\sqrt{2}}{35} a \end{cases}$; $\begin{cases} a \geq \frac{35}{18\sqrt{2}} \\ a \geq -\frac{35}{18\sqrt{2}} \end{cases}$

$a \geq \frac{35}{18\sqrt{2}}$

2) $a < 0$:

$\begin{cases} \frac{1}{a} \leq \frac{18\sqrt{2}}{35} & |\cdot a \\ \frac{1}{a} \geq -\frac{18\sqrt{2}}{35} & |\cdot a \end{cases}$; $\begin{cases} 1 \geq \frac{18\sqrt{2}}{35}\cdot a \\ 1 \leq -\frac{18\sqrt{2}}{35} a \end{cases}$; $\begin{cases} a \leq \frac{35}{18\sqrt{2}} \\ a \leq -\frac{35}{18\sqrt{2}} \end{cases}$; $a \leq -\frac{35}{18\sqrt{2}}$

Т.к. при $a \in \left(-\infty; -\frac{35}{18\sqrt{2}}\right] \cup \left[\frac{35}{18\sqrt{2}}; +\infty\right)$ система не может иметь 4 реш. при любых b и т.к. при всех остальных a такое b най дётся то $a \in \left(-\frac{35}{18\sqrt{2}}; \frac{35}{18\sqrt{2}}\right)$ или $a \in \left(-\frac{35\sqrt{2}}{36}; \frac{35\sqrt{2}}{36}\right)$

Ответ: $a \in \left(-\frac{35\sqrt{2}}{36}; \frac{35\sqrt{2}}{36}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№5.

$$\begin{cases} \log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = \log_{x^3}\frac{1}{121} - 5 \\ \log_{11}^4 (0{,}5y) + \log_{0{,}5y} 11 = \log_{0{,}125y^3}(11^{-13}) - 5 \end{cases}$$

ОДЗ: $\begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \\ 0{,}5y\neq 1 \\ 0{,}5y>0 \end{cases}$; $\begin{cases} x\in(0;1)\cup(1;+\infty) \\ y\in(0;2)\cup(2;+\infty) \end{cases}$

С уч. ОДЗ:

$$\log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = \log_{x^3} 11^{-2} - 5 \Leftrightarrow \log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = -\frac{2}{3}\log_x 11 - 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} + \frac{2}{3\log_{11} x} + 5 = 0 \Leftrightarrow \log_{11}^4 x - \frac{16}{3\log_{11} x} + 5 = 0$$

С уч. ОДЗ:

$$\log_{11}^4(0{,}5y) + \log_{0{,}5y} 11 = \log_{0{,}125y^3}(11^{-13}) - 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{11}^4(0{,}5y) + \frac{1}{\log_{11}(0{,}5y)} = -\frac{13}{3\log_{11}(0{,}5y)} - 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{11}^4(0{,}5y) + \frac{16}{3\log_{11}(0{,}5y)} - 5$$

$$\begin{cases} \log_{11}^4 x - \frac{16}{3\log_{11} x} + 5 = 0 & \big| \cdot \log_{11} x \ (\neq 0, \text{ т.к. } x\neq 1) \\ \log_{11}^4 (0{,}5y) + \frac{16}{3\log_{11}(0{,}5y)} + 5 = 0 & \big| \cdot \log_{11}(0{,}5y) \ (\neq 0, \text{ т.к. } y\neq 2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_{11}^5 x - \frac{16}{3} + 5\log_{11} x = 0 \\ \log_{11}^5(0{,}5y) + \frac{16}{3} + 5\log_{11}(0{,}5y) = 0 \end{cases}$$

Пусть $\log_{11} x = a$, $\log_{11}(0{,}5y) = b$ $(a, b\neq 0)$

$$\begin{cases} a^5 + 5a - \frac{16}{3} = 0 \\ b^5 + 5b + \frac{16}{3} = 0 \end{cases}$$

. Пусть $f(t) = t^5 + 5t$ $D(f)$ $t\in\mathbb{R}$

Заметим что $f(t)$ - нечётная: $f(-t) = -t^5 - 5t = -f(t)$

Т.к. $f(a) = \frac{16}{3}$ и $f(b) = -\frac{16}{3}$, то $a = -b$

Обратная замена: $\log_{11} x = -\log_{11}(0{,}5y)$

$\log_{11} x = \log_{11}\frac{2}{y}$

Ф. $f(p) = \log_{11} p$ $D(p)$ $p>0$ — возрастающая

Значит $x = \frac{2}{y}$ $\big| \cdot y$ $(\neq 0$ по ОДЗ$)$

$xy = 2$

Ответ: $xy = 2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7.

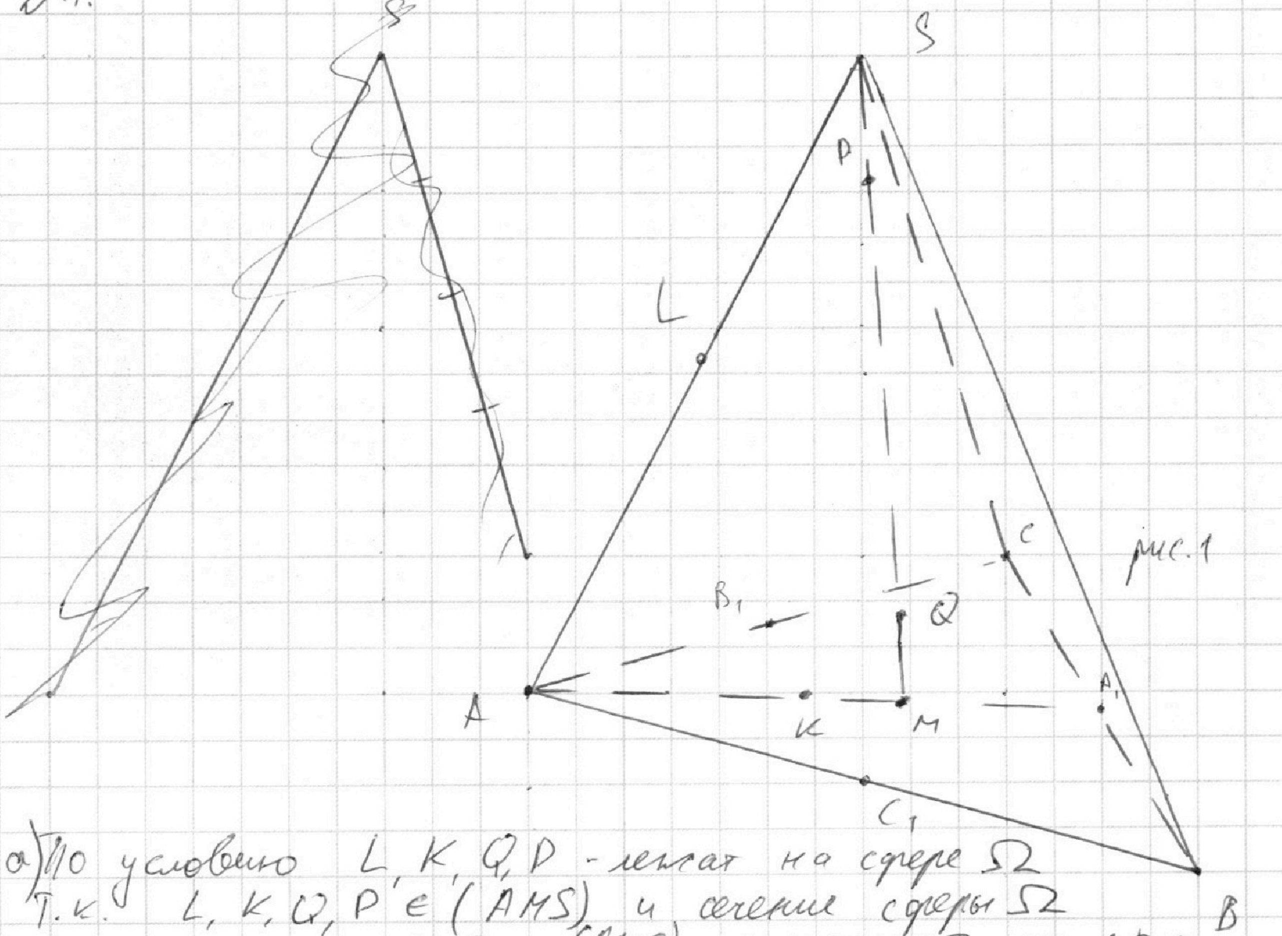


рис.1

а) По условию L, K, Q, P - лежат на сфере Ω
Т.к. $L, K, Q, P \in (AMS)$ и сечение сферы Ω ~~окружностью~~ плоскостью (AMS) - окружность, то $LPQK$ - вписанный четырёх-уг. (ASM).

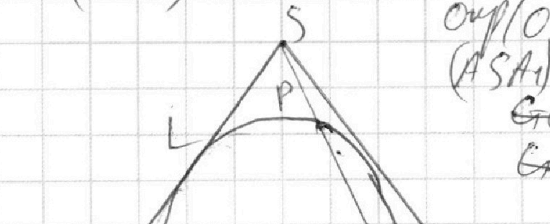


рис. 2

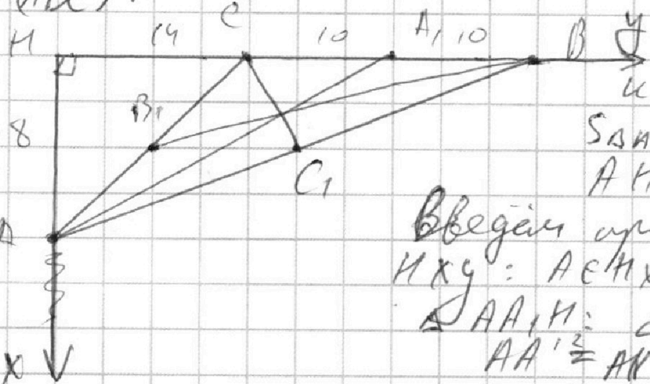
Окр$(O; R)$ на рис 2 - сечение сферы плоск. (ASA_1)
~~Степень точки S: $SP \cdot SQ = SP \cdot (SP+PQ)$~~
~~Степень точки~~
$SL^2 = SP \cdot SQ$; $MK^2 = MQ \cdot MP$
(SL, MK - касат. к окр; SQ, MP - сек.)
Т.к. $SP \cdot SQ = MQ \cdot (SP+PQ) = MQ \cdot (MQ + PQ) = MQ \cdot MP$, то степени точек S и M равны, и, след., $SL^2 = MK^2$
$SL = MK$.
Т.к. AL и AK - касат. из одной точки к окр, то $AL = AK$. $AL + SL = AK + KM \rightarrow AS = AM = 20$
Т.к. M делит медиану в соотн. $2:1$, то $AA_1 = \frac{3}{2} AM = 30$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(ABC):



Проведём высоту AH к BC.

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC$

$AH = \frac{2 S_{\triangle ABC}}{BC} = \frac{2 \cdot 180}{20} = 18$

Введём прямоуг. систему коорд. Hxy: $A \in Hx$, $B \in Hy$

$\triangle AA_1H$: $\angle H = 90^\circ$

$AA_1^2 = AH^2 + A_1H^2$ (т. Пиф.)

$A_1H^2 = AA_1^2 - AH^2 = 900 - 324 = 576 = 24^2$; $A_1H = 24$; $HC = A_1H - A_1C = A_1H - \frac{1}{2}BC = 24 - 10 = 14$

Тогда $A(18; 0)$; $C(0; 14)$; $B(0; 34)$

$B_1\left(\frac{x_a + x_c}{2}; \frac{y_a + y_b}{2}\right)$; $B_1(9; 7)$

$C_1\left(\frac{x_b + x_a}{2}; \frac{y_b + y_a}{2}\right)$; $C_1(9; 17)$

$CC_1 = \sqrt{(x_{c_1} - x_c)^2 + (y_{c_1} - y_c)^2} = \sqrt{81 + 9} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$

$BB_1 = \sqrt{(x_{b_1} - x_b)^2 + (y_{b_1} - y_b)^2} = \sqrt{81 + 729} = \sqrt{810} = 9\sqrt{10}$

Тогда $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 30 \cdot 3\sqrt{10} \cdot 9\sqrt{10} = 90 \cdot 10 \cdot 9 = 8100$

Ответ: а) 8100

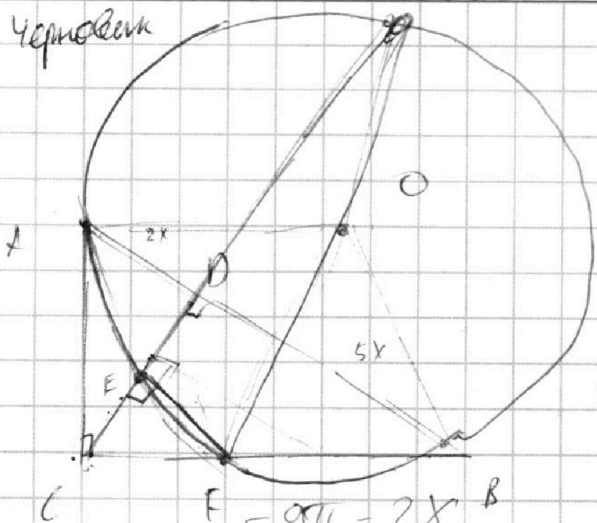
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черновик



$EF \parallel AB$

$AB : BD = 1{,}4$

$\frac{AD}{BD} = 0{,}4 = \frac{2}{5}$

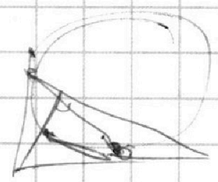
$\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle CEF}}$

$\triangle CEF \sim \triangle CDB$

$\frac{CE}{CD} = \frac{EF}{BD}$

$S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot h$

$S_{\triangle CEF} = \frac{1}{2} \cdot CE \cdot EF$



$\frac{90\pi}{2(90-18)} \pi - 10x = 9\pi - 2x$

$= 8x$

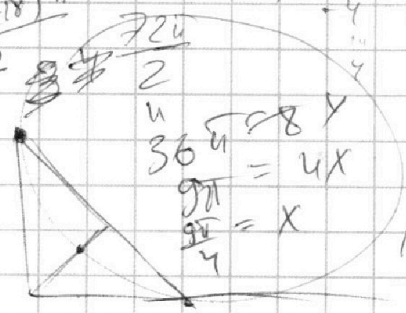
$\frac{72\pi}{2}$

$36\pi = 8x$

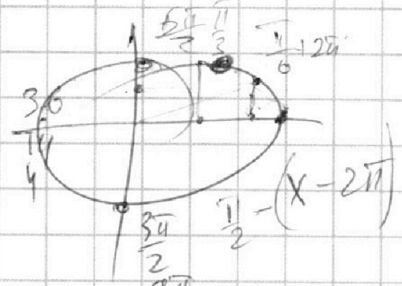
$36\pi = 4x$

$9\pi = x$

$\frac{9\pi}{4} = x$



$16 \quad 36$



$10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 9\pi - \frac{9\pi}{2}$

$10 \arccos(-1) = 9\pi + \pi$

$10\pi \quad 10\pi$

N 3

$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$

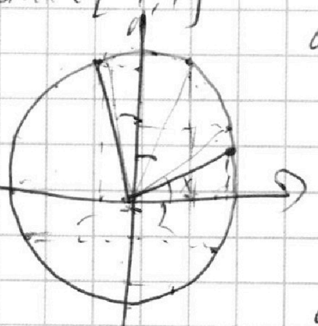
$\sin x \in [-1; 1]$

I

$\arccos(\sin x)$ при $x \in [0, \frac{\pi}{2})$

$\frac{\pi}{2} - x$

$\sin \frac{\pi}{2} = 1$

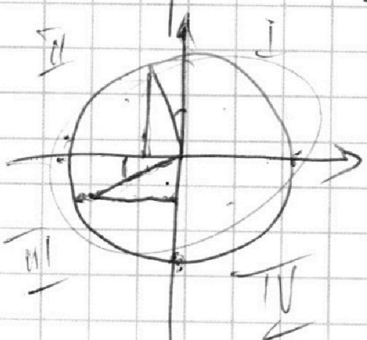


IV

$\arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - x \qquad x \in [-\frac{\pi}{2}; 0]$

$\arccos(\sin x) = \cancel{\frac{\pi}{2}}\, x - \frac{\pi}{2} \qquad x \in$ II

$\arccos(\sin x) = x - \frac{\pi}{2} \qquad x \in$ III



$x \in$ I или III

$10(\frac{\pi}{2} - x) = 9\pi - 2x$

$5\pi - 10x = 9\pi - 2x$

$-4\pi = 8x$

$\boxed{x = -\frac{\pi}{2}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

черновик.

№1 a, b, c $ab : 2^6 3^{13} 5^{11}$

$bc : 2^{14} 3^{21} 5^{13}$

$ac : 2^{16} 3^{25} 5^{28}$

$a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3}$

$b = 2^{\beta_1} 3^{\beta_2} 5^{\beta_3}$

$c = 2^{\gamma_1} 3^{\gamma_2} 5^{\gamma_3}$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 6 \\ \alpha_2 + \beta_2 \geq 13 \\ \alpha_3 + \beta_3 \geq 11 \\ \alpha_1 + \gamma_1 \geq 16 \end{cases}$$

$$abc = 2^{\alpha_1+\beta_1+\gamma_1} 3^{\alpha_2+\beta_2+\gamma_2} 5^{\alpha_3+\beta_3+\gamma_3}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 6 \\ \alpha_1 + \gamma_1 \geq 16 \\ \beta_1 + \gamma_1 \geq 14 \end{cases}$$

$2(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) \geq 36$

$\boxed{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 18}$

$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 18$

4 2 12

$$\begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 \geq 13 \\ \alpha_2 + \gamma_2 \geq 25 \\ \beta_2 + \gamma_2 \geq 21 \end{cases}$$

$2(\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2) \geq 59$

$\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 29\frac{1}{2}$

$\boxed{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 30}$

8 5 17

$$\begin{cases} \alpha_3 + \beta_3 \geq 11 \\ \alpha_3 + \gamma_3 \geq 28 \\ \beta_3 + \gamma_3 \geq 13 \end{cases}$$ 39, 52

$2(\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3) \geq 52$

$\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 26$

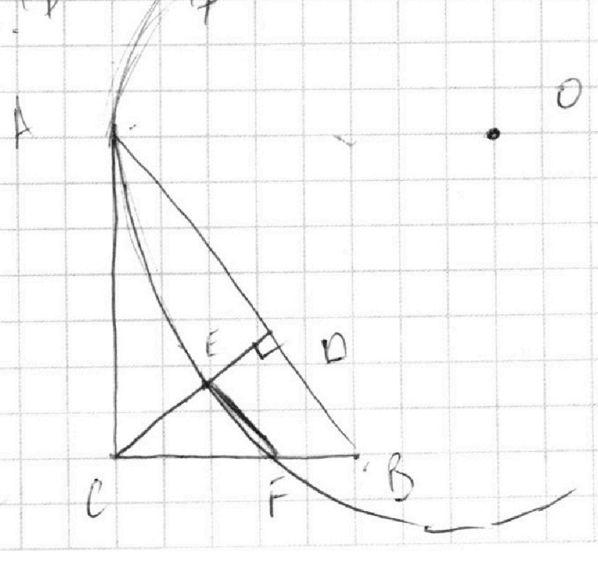
$\boxed{\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 = 26}$

$\min abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$

$\frac{AB}{BD} = \frac{AD + DB}{BD} = \frac{AD}{BD} + 1 = 1{,}4$

$\frac{AD}{BD} = 0{,}4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

№2.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

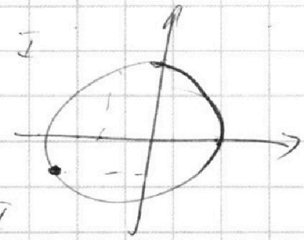
№3

$10\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = 9\pi - 2x$ II, III

$10x - 5\pi = 9\pi - 2x$

$12x = 14\pi$

$\boxed{x = \frac{14\pi}{12} = \frac{7\pi}{6}} = \pi + \frac{\pi}{6}$



$10 \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = 9\pi - 2\pi - \frac{\pi}{3}$

$10 \cdot \frac{2\pi}{3} = 7\pi - \frac{\pi}{3}$

$\frac{20\pi}{3} = \frac{20\pi}{3}$

№5

$$\begin{cases} \log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = \log_{x^3}\frac{1}{121} - 5 \\ \log_{11}^4 (0,5x) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3}(11^{-13}) - 5 \end{cases}$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ 0,5y > 0 \\ 0,5y \neq 1 \end{cases}$$

$x \in (0;1) \cup (1;+\infty)$

$y \in (0;2) \cup (2;+\infty)$

$\frac{2}{3a} - \frac{6}{a} = \frac{2-18}{3a} = -\frac{16}{3a}$

$\frac{3+13}{3b} = \frac{16}{3b}$

С уч. ОДЗ:

$\log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = -\frac{2}{3}\log_x 11 - 5$

$\log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = -\frac{2}{3\log_{11} x} - 5$

$\log_{11}^4 (0,5y) + \frac{1}{\log_{11}(0,5y)} = -\frac{13}{3}\log_{0,5y} 11 - 5$

$\log_{11}^4 (0,5y) + \frac{1}{\log_{11}(0,5y)} = -\frac{13}{3\log_{11}(0,5y)} - 5$

$\log_{11} x = a$, $\log_{11}(0,5y) = b$; $a, b \neq 0$

$$\begin{cases} a^4 - \frac{6}{a} = -\frac{2}{3a} - 5 \\ b^4 + \frac{1}{b} = -\frac{13}{3b} - 5 \end{cases}; \quad \begin{cases} a^4 - \frac{6}{a} + \frac{2}{3a} + 5 = 0 \\ b^4 + \frac{1}{b} + \frac{13}{3b} + 5 = 0 \end{cases}$$

$\cancel{a^4 - \frac{6}{a} + \frac{2}{3a} + 5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

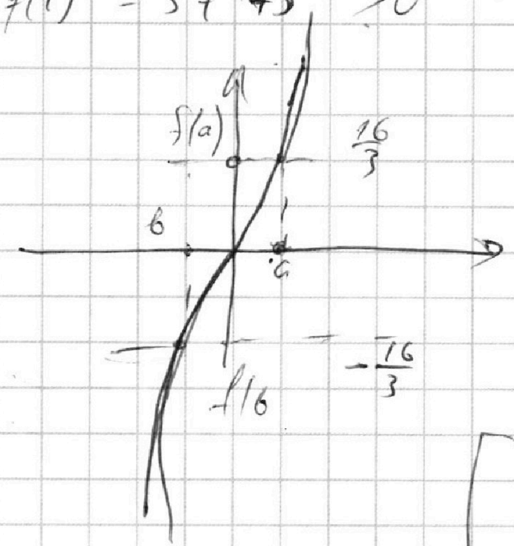
МФТИ

$$\begin{cases} a^4 - \frac{16}{3a} + 5 = 0 \\ b^4 + \frac{16}{3b} + 5 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a^5 + 5a - \frac{16}{3} = 0 \\ b^5 + 5b + \frac{16}{3} = 0 \end{cases}$$

$f(t) = t^5 + 5t$ $\qquad D(f)\ t \in R$

$f(-t) = -t^5 - 5t = -f(t)$ - неч.

$f(t)' = 5t^4 + 5 > 0$ возраст.



$a^5 + 5a = -b^5 - 5b$

$a^5 + b^5 + 5(a+b) = 0$

$(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 + 5) = 0$

$a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b \ldots)$

$$\left[\begin{array}{l} a = -b \\ a^4 + a^2b^2 + b^4 + 5 = a^3b + ab^3 = ab(a^2+b^2) \end{array}\right.$$

$a = -b$

$\log_4 x = -\log_4 (0{,}5y)$

$\log_4 x = \log_4 (0{,}5y)^{-1}$

$x = \frac{1}{0{,}5y}$

$x = \frac{2}{y}$

$\boxed{xy = 2}$

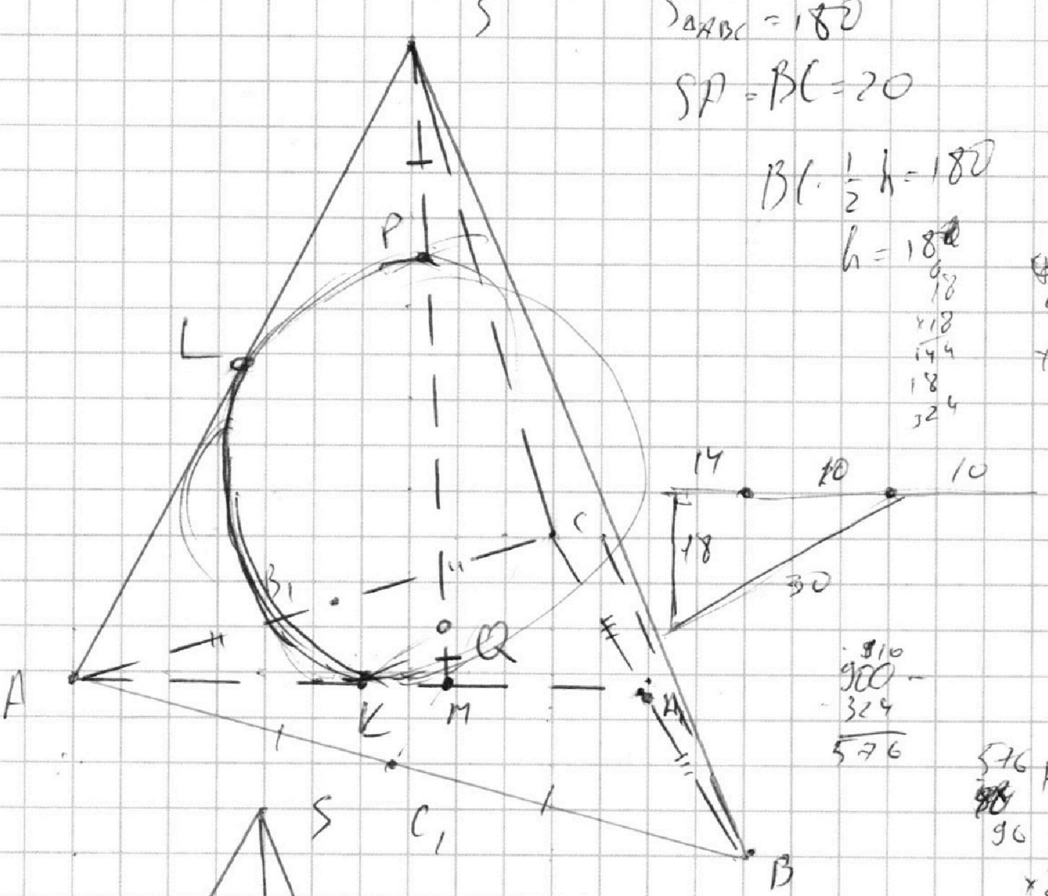
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1 черновик

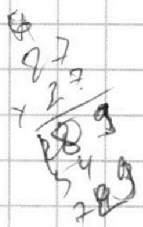


$S_{\triangle ABC} = 180$

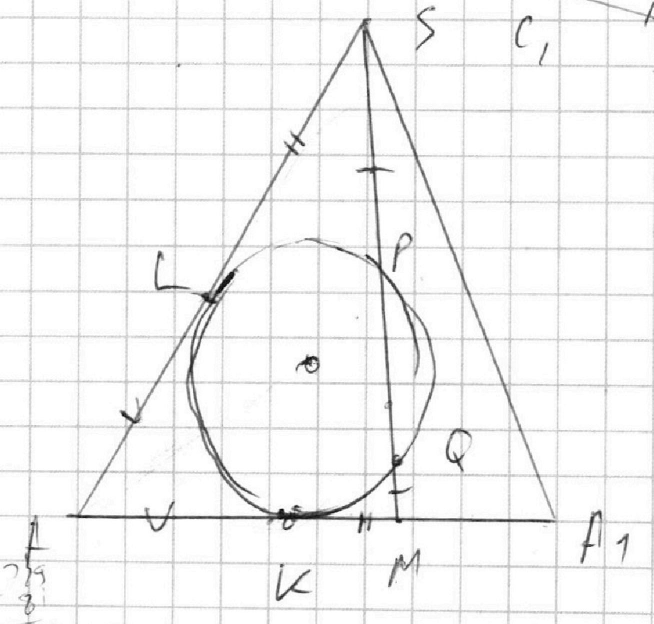
$SP = BC = 20$

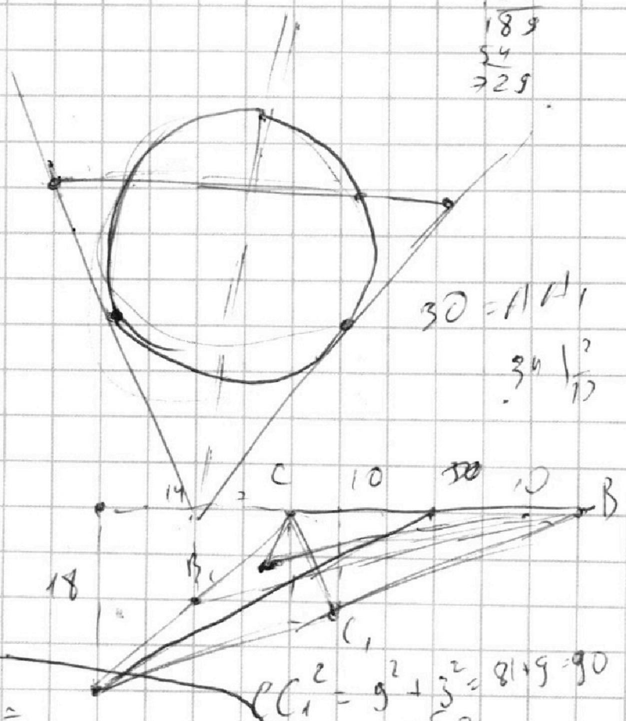
$BC \cdot \frac{1}{2} h = 180$

$h = 18$



$30 = AA_1$





$AS = AM = 20$; $AA_1 = 30$

$BB_1^2 = 9^2 + 27^2 = 729 + 81 = 810$

$BB_1 = 9\sqrt{10}$

$\sqrt{BB_1 \cdot AA_1 \cdot CC_1} = 9\sqrt{10} \cdot 3\sqrt{10} \cdot 30 = 270 \cdot 30 = 8100$

$CC_1^2 = 9^2 + 3^2 = 81 + 9 = 90$

$CC_1 = 3\sqrt{10}$

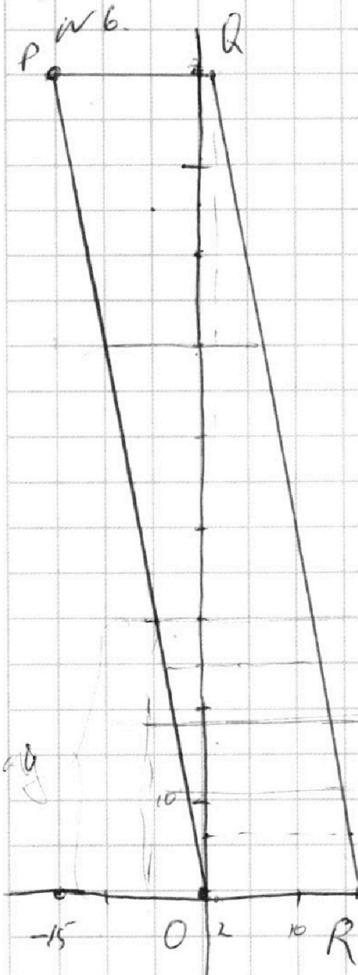
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

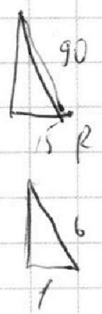
1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

черновик.

№ 6.





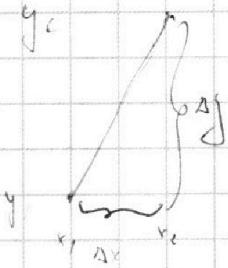
A, B $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$

$6(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 48$

$6\Delta x + \Delta y = 48$

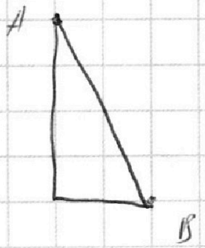
$\Delta x_{max} = 32$ $\Delta y\ max = 90$

$\Delta x_{min} = -32$ $\Delta y_{min} = -90$



$\Delta y = -24$

$\Delta x = 12$



$6\Delta x + \Delta y = 48$

$\Delta y = -90,\ [-24, -18, -12, 6, 0, 6, 12, 18, \dots 54, 90$

32

$\Delta y = 90 \to \Delta x$

$\Delta y = a$

16 - по 18
75 - по 17

91 - 16 = 75

$\Delta y = a$

$\Delta x_{max} = 17 + \frac{47}{6}$ $\Delta x_{min} = -17 + \frac{\Delta y}{6}$

$\Delta y = 48$

$\Delta x \in [-25; 25]$

$-102 \le 6\Delta x + \Delta y \le 102 + 2a$

$48 \le 102 + 2a$

$-54 \le 2a$ $-27 \le a$

$-102 - a \le 6\Delta x + \Delta y \le 102 + a$

48

$\begin{cases} 48 \le 102 + a \\ -102 - a \le 48 \end{cases}$

$\begin{cases} a \ge 54 \\ a \ge -150 \end{cases}$

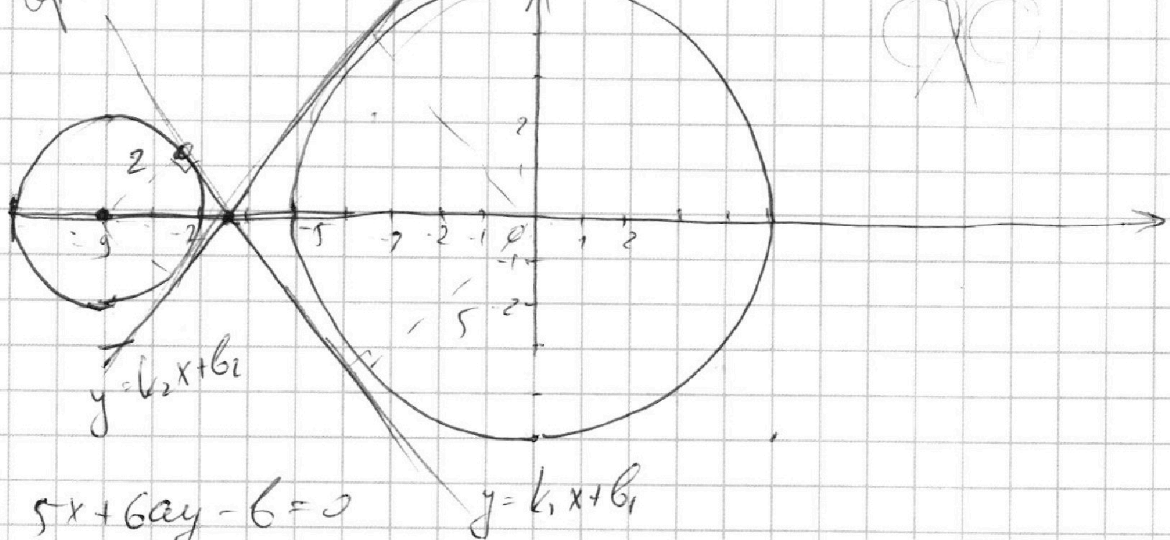
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черн.



$5x + 6ay - b = 0$

$6ay = -5x + b$

$y = -\frac{5x}{6a} + \frac{b}{6a}$

Параметр a задаёт наклон

Прямая $y = -\frac{5x}{6a} + \frac{b}{6a}$ при каком a не будет иметь такой b, что 4 реш.

$d + \frac{d}{2} \cdot 5 = 9$

$\frac{7}{2} d = 9$

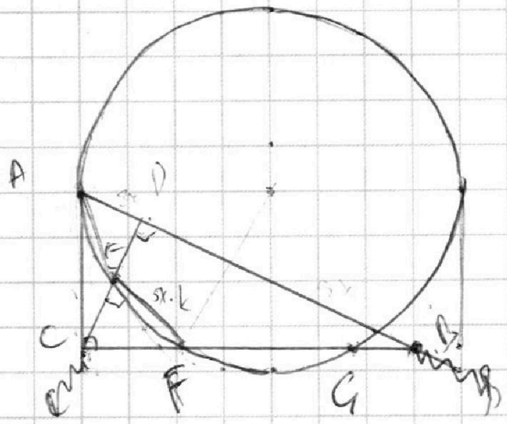
$d = \frac{18}{7}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 2. Черновик.



$\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$

$14x^2 = AC^2$

$\sqrt{14}x = AC$

$\frac{BD}{BC} = \frac{BC}{AB}$

$35x^2 = BC$

$BC = \sqrt{35}x$

$S_{\Delta ACD} = \frac{1}{2} h \cdot 2x$

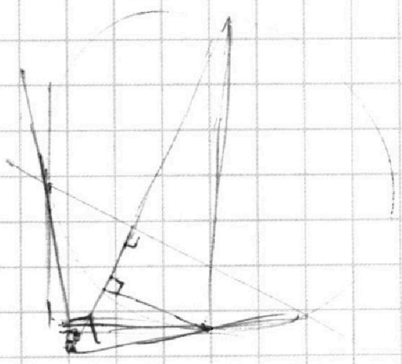
$S_{\Delta CEF} = \frac{1}{2} k^2 h \cdot 5x$

$k = \frac{CF}{CB} = \frac{CF}{\sqrt{35}x}$

$AC^2 = CF \cdot CG$

$BC = \sqrt{35}x$

$CF = k\sqrt{35}x$



$y^2 + 2 \cdot 9 \cdot y + 81 = 4$

№ 4

$$\begin{cases} 5x + 6ay - 6 = 0 \\ (x^2+y^2-25)(x^2+y^2+18y+77) = 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2+y^2 = 25 \\ x^2+y^2+18y+77 = 0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2+y^2 = 25 \\ x^2+(y+9)^2 = 4 \end{array}\right.$$