



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^9 3^{10} 5^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{13} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{19} 3^{18} 5^{30}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 3 : 1$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-14; 42)$ ,  $Q(6; 42)$  и  $R(20; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 90,  $SA = BC = 12$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BSC$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 & \forall 1 \quad a, b, c \in \mathbb{N} \\
 ab &:: 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \\
 bc &:: 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \\
 ca &:: 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow (abc)^2 &:: 2^{9+14+19} \cdot 3^{10+13+18} \cdot 5^{10+13+30} \\
 (abc)^2 &:: 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}
 \end{aligned}$$

⊗ Для  $x, p, l \in \mathbb{N}$ , если  $x^2 = p^l$ , то  
 $x = p^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor}$ , иначе если  $l = 2n+1$ ,  
~~то  $x = p^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor}$ , то  $x^2 = p^{2\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} = p^{2n}$  и  $\deg_p(x^2) = 2n < 2n+1$~~   
 а  $\deg_p(x) \leq n$ , то  $\deg_p(x^2) \leq 2n < 2n+1$

$$\Rightarrow abc :: 2^{\lfloor \frac{42}{2} \rfloor} \cdot 3^{\lfloor \frac{41}{2} \rfloor} \cdot 5^{\lfloor \frac{53}{2} \rfloor} = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$$

Заметим, что  $ac = 5^{30} \Rightarrow abc = 5^{30}$

$$\Rightarrow abc :: 2^{27} \cdot 3^{27} \cdot 5^{30} \Rightarrow abc \geq 2^{27} \cdot 3^{27} \cdot 5^{30}$$

Тогда пусть

$$\begin{aligned}
 a &= 2^4 \cdot 3^8 \cdot 5^{75} \\
 b &= 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^0 \\
 c &= 2^{12} \cdot 3^{10} \cdot 5^{15}
 \end{aligned}$$

$$abc = 2^{27} \cdot 3^{27} \cdot 5^{30}$$

Ответ:  $abc \geq 2^{27} \cdot 3^{27} \cdot 5^{30}$

⊗ Здесь  $\lfloor \frac{l}{2} \rfloor$  округление вверх до целого  
 $\deg_p(x)$  - степень в разложении числа  $p$  в  $x$   
 $n \in \mathbb{N}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

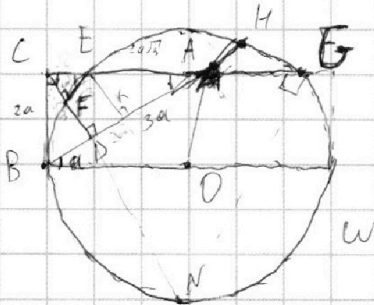
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N 2

Путь W - дуга в условиях окружности  
CD проведена к гипотенузе  
⇒ AB - катет



Дано:

$$AB \parallel EF$$

$$\frac{AD}{DB} = \frac{3}{1}$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = ?$$

OB радиус BC в B ⇒  $OB \perp BC$   
(O - центр окружности W)

1)  $\frac{AD}{BD} = \frac{3}{1} \Rightarrow$  Пусть  $BD = a$ ; тогда  $AD = 3a$

2)  $\angle ACB = 90^\circ \Rightarrow CD^2 = BD \cdot AD = a \cdot 3a$   
 $CD = a\sqrt{3}$

3) в  $\triangle ACD$ :  $\angle ADC = 90^\circ \Rightarrow$  т. Пифагора:  $AC = \sqrt{CD^2 + AD^2} = 2a\sqrt{3}$

4) аналогично в  $\triangle BCD$ :  $BC = \sqrt{BD^2 + CD^2} = 2a$

5) заметим, что в  $\triangle ABC$  катет  $AB = 4a$   
катет  $BC = 2a$

⇒  $\angle BAC = 30^\circ \Rightarrow \angle ABC = 60^\circ$

6)  $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 2a\sqrt{3} \cdot 2a = 2a^2\sqrt{3}$

4)  $OB \perp BC \Rightarrow \angle OBC = 90^\circ$ ;  $\angle ABC = 60^\circ \Rightarrow \angle ABO = \angle OBC - \angle ABC = 30^\circ$   
Тогда  $\angle BAC = \angle ABO = 30^\circ \Rightarrow AC \parallel BO$

8) Продлим CA до пересечения с окружностью, получим G  
BA до пересечения с окружностью получим H

9)  $EF \parallel BA \Rightarrow EF \parallel BH$ ; B, F, E, H лежат на одной окружности

⇒ BFEH - равнобедренная трапеция

⇒ если опустить высоту EK ⊥ BH, то KH = BD = a

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N 2

10)  $CB^2 = CE \cdot CG = (2a)^2 = 4a^2$  (свойства точки  $C$  относительно  $\omega$ )

$EA \cdot AG = BA \cdot AH$  (пересекающиеся хорды)

11)  $EF \parallel AB \Rightarrow EF \parallel AD \Rightarrow \triangle CEF \sim \triangle CAD$

12)  $EF \parallel AD \Rightarrow \angle CEF = \angle CAB = 30^\circ$   
 $\angle CFE = \angle CDA = 90^\circ \Rightarrow \frac{CF}{CE} = \frac{1}{2} \Rightarrow CF = \frac{1}{2} CE$

13) Проведем  $CD$  до пересечения с  $\omega$  - получим  $N$

тогда  $CN \cdot CF = CE \cdot CG$

~~$CF \cdot CN = CE \cdot CG$~~

$\frac{1}{2} CE \cdot CN = CE \cdot CG$

$\frac{1}{2} CN = CG$

14) в  $\triangle CNB$ :  $\angle NCB = 60^\circ$

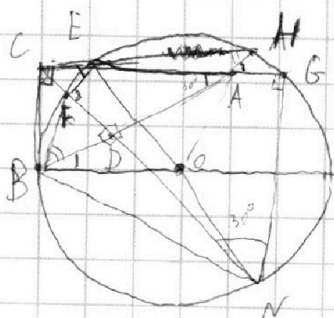
$CN = 2 \cdot CG \Rightarrow NB^2 = CG^2 + CN^2 - 2 \cos 60^\circ \cdot CG \cdot CN$

$NB^2 = CG^2 + 4CG^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot CG \cdot 2 \cdot CG =$   
 $= 5CG^2 - 2CG^2 = 3CG^2 =$

$\Rightarrow CN^2 = 4CG^2 = CG^2 + NB^2 \Rightarrow \angle CGN = 90^\circ$

$\angle EGN$

$EN$  - диаметр  $\omega$



15)  $S_{CEF} = \frac{1}{2} \cdot CF \cdot FE$

тогда  $CF = b$ ;

тогда  $CE = 2b$

$FE = b\sqrt{3}$

$S_{CEF} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot b\sqrt{3} = \frac{b^2 \sqrt{3}}{2}$

тогда  $\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{2a^2 \sqrt{3}}{\frac{b^2 \sqrt{3}}{2}} = 4 \cdot \frac{a^2}{b^2} = \left(\frac{2a}{b}\right)^2 = X^2$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

 МФТИ



1  2  3  4  5  6  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

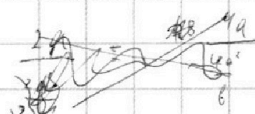
N 2

$$16) CE \cdot CG = 4a^2 \quad (из 10))$$

$$26) CG = 4a^2$$

$$CG = \frac{2a^2}{b} ; \quad CN = 2 \cdot CG = \frac{4a^2}{b}$$

$$14) \triangle ABC \sim \triangle CNB \Rightarrow \frac{BC}{CG} = \frac{AB}{CN} = \frac{2a}{\frac{2a^2}{b}} = \frac{b}{a}$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CNB}} = \frac{b^2}{a^2} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{2}{x}\right)^2$$


$$\frac{S_{CEF}}{S_{CNB}} = \frac{\frac{S_{CEF}}{S_{ABC}}}{\frac{S_{CNB}}{S_{ABC}}} = \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{4}} = \frac{4}{x^4} = \left(\frac{2}{x^2}\right)^2 \Rightarrow \frac{CN}{CE} = \frac{x^2}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N3

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

~~арксинус косинуса~~

$$\arcsin(t) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\Rightarrow 5 \arcsin(t) \in \left[-\frac{5}{2}\pi; \frac{5}{2}\pi\right]$$

$$\arcsin(\cos x) = \Rightarrow x + \frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{5}{2}\pi; \frac{5}{2}\pi\right]$$

$$x \in [-3\pi; \pi]$$

$$\arcsin(\cos x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x, & \text{если } x \in [0; \pi] \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} + x, & \text{если } x \in [-\pi; 0] \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} - (x + 2\pi), & \text{если } x \in [-2\pi; -\pi] \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} + (x + 2\pi), & \text{если } x \in [-3\pi; -2\pi] \end{cases} \quad (4)$$

Это следует из того, что  $\arcsin(t) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  и из (1))

(1)  $x \in [0; \pi]$

$$5 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$4 \cdot \frac{\pi}{2} - 5x = x + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{5}{2}\pi - 5x = x + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{4}{2}\pi = 6x \Rightarrow x = \frac{4}{12}\pi = \frac{\pi}{3}$$

(2)  $x \in [-\pi; 0]$

$$5 \cdot \left(\frac{\pi}{2} + x\right) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{5}{2}\pi + 5x = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{4}{2}\pi = -4x \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2}$$

Ответ:  $x = \frac{\pi}{3}$   
 $x = -\frac{\pi}{2}$   
 $x = -\frac{4}{3}\pi$   
 $x = -3\pi$

(3)  $x \in [-2\pi; -\pi]$

$$5 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 2\pi - x\right) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5 \cdot \left(-\frac{3}{2}\pi\right) - 5x = x + \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{15}{2}\pi - \frac{\pi}{2} = 6x$$

$$-\frac{16}{2}\pi = 6x \Rightarrow x = -\frac{16}{12}\pi = -\frac{4}{3}\pi$$

(4)  $x \in [-3\pi; -2\pi]$

$$5 \cdot \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi + x\right) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5 \cdot \frac{5}{2}\pi + 5x = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{25}{2}\pi - \frac{\pi}{2} = -4x$$

$$-4x = \frac{24}{2}\pi \Rightarrow x = -3\pi$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

нч стр. 1  
все  $a \mid \exists b$ , система имеет ровно 4 реш.

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 & (1) \end{cases}$$

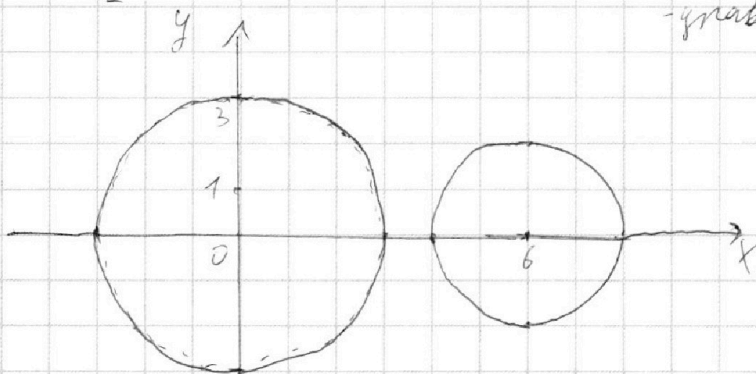
$$\begin{cases} (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 & (2) \end{cases}$$

(2): произведение = 0  $\Leftrightarrow$  хотя бы 1 из  
множителей равен 0

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 9 = 0 \\ x^2 + y^2 - 12x + 32 = 0 \\ x^2 + y^2 = 3^2 \\ (x^2 - 12x + 36) + y^2 = 2^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 3^2 \\ (x-6)^2 + y^2 = 2^2 \end{cases}$$

- уравнения двух окружностей



окружности не пересекаются, т.к. в первом уравнении  $|x| \leq 3$

во втором

$$\begin{aligned} &\Rightarrow -3 \leq x \leq 3 \\ &\|x-6| \leq 2 \\ &-2 \leq x-6 \leq 2 \\ &4 \leq x \leq 8 \end{aligned}$$

уравнение (1) - это прямая

если  $a=0$ :  $0x + 2y - 3b = 0$

$$y = \frac{3}{2}b$$

очевидно, что

$\rightarrow$  горизонтальная прямая

система 4 решения при  $b=0$

$\Rightarrow$  ~~не~~  $a=0$  подходит



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2) <sup>№ 4 стр. 2</sup>  $a_1 \neq 0$ :

$$ax + 2y - 3b = 0$$

$$2y = -ax + 3b$$

$$y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b \rightarrow \text{прямая}$$

коэффициент  $\frac{3}{2}b$  позволяет || перенести на нашу прямую ~~выражение~~

Тогда для каждой  $a_0 \neq 0; b_0$

существует прямая  $y = -\frac{a_0}{2} + \frac{3}{2}b_0$  пересекает окружность

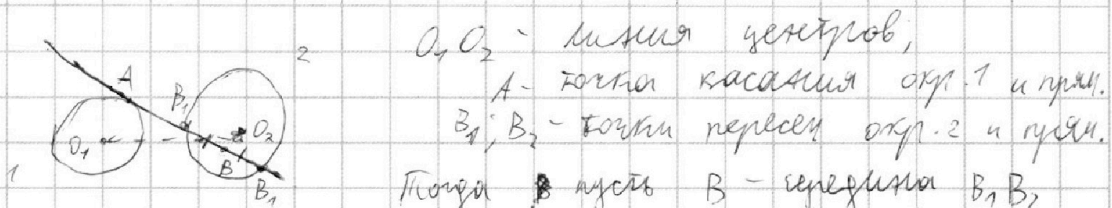
хотя бы по трём точкам, то найдётся  $b_1$  такая,

что прямая  $y = -\frac{a_0}{2} + \frac{3}{2}b_1$  пересекает окружность по 4 точкам

□ Док-во: если точек пересечения хотя бы 4, то  $b_1 = b_0$

если их ровно 3: прямая и окружность имеют не более 2 общих точек

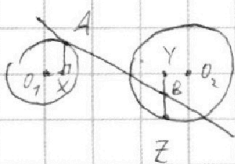
⇒ такая прямая касалась одной окружности и пересекает по 2 точкам другую:



Тогда пусть B - середина  $B_1 B_2$

опустим перпендикуляр из A на  $O_1 O_2$ ; (X)

из B на  $O_1 O_2$  (Y) и продолжим его за точку  $B_2$  до пересечения с окр. 2 (Z)



пусть  $\Delta B$  - длина отрезка

тогда для  $b_1 = b_0 + \frac{1}{10} \Delta b$

или  $b_1 = b_0 - \frac{1}{10} \Delta b$

прямая сместится вверх или вниз на  $\frac{3}{20} \Delta b < \Delta b$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 4 стр. 3

Зам-ба линии (продолжение): при сдвиге  
прямой на  $\pm \frac{3}{20} \Delta b$  пересечение прямой и окруж.  
все еще 2 точки; пересек. с  $O_1$  - либо 2, либо 0

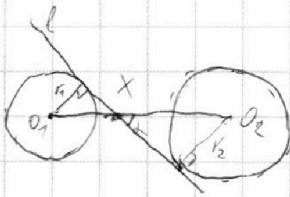
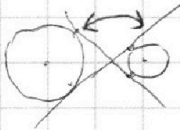
~~точки~~ (если  $A$  выше  $X$ , то окруж. на  $-\frac{3}{20} \Delta b$ ,  
иначе на  $+\frac{3}{20} \Delta b$ )  
тогда пересек. прямой  $-\frac{3}{2} \Delta b + \frac{3}{2} \Delta b = 2$  точки

$\Rightarrow$  всего 4 точки пересек.  $\Rightarrow$  ~~существует~~  $\Rightarrow$  существует решение в  $\Delta$

$\Rightarrow$  Подходят все точки  $a$ , что при касании с  
одной окружностью прямая пересекает другую

$\Rightarrow$  Не подходят те, у которых  $\angle$  <sup>касания</sup> либо совпадает  
с одной из внутр. касательных, либо лежит между  
ними:

Где внешние касательные  
действуют по алгоритму, отсан-  
канию в линии:



$l$  - прямая  
 $O_1, O_2$  - центры окруж.  
 $r_1, r_2$  - радиусы соотв. окруж.  
 $X = l \cap O_1 O_2$

Если  $\alpha$  - угол наклона, то  $O_1 X \cdot \sin \alpha = r_1$

$$O_2 X \cdot \sin \alpha = r_2$$

$$\Rightarrow (O_1 X + O_2 X) \cdot \sin \alpha = r_1 + r_2$$

$$O_1 O_2 \cdot \sin \alpha = r_1 + r_2$$

$$\sin \alpha = \frac{r_1 + r_2}{O_1 O_2}$$

$l$   $\perp$   $O_1 O_2$  по свойству го-  
зонала

Тогда подставляя числа:  $\sin \alpha = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{25}{36}} = \sqrt{\frac{11}{36}} = \frac{\sqrt{11}}{6} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{5}{\sqrt{11}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N4 стр.4

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{5}{\sqrt{11}} ; \operatorname{tg} \alpha_2 = -\frac{5}{\sqrt{11}}$$

$$\Rightarrow \text{"невозможные"} \quad -\frac{\alpha}{2} \in \left[ \frac{5}{\sqrt{11}} ; +\infty \right) \cup \left( -\infty ; -\frac{5}{\sqrt{11}} \right]$$

$$\text{тогда} \quad \alpha \in \left( -\infty ; -\frac{10}{\sqrt{11}} \right] \cup \left[ \frac{10}{\sqrt{11}} ; +\infty \right)$$

$$4) \text{ ответ: } \alpha \in \left( -\frac{10}{\sqrt{11}} ; \frac{10}{\sqrt{11}} \right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N5

Ответ:  $\frac{1}{5}$

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_x 243 - 8$$

$$\log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8$$

$$O.A.3: x > 0; x \neq 1$$

$$y > 0; y \neq \frac{1}{5}$$

Заменим:  $\log_3 x = a$  ;  $a \neq 0$

$\log_3 5y = b$  ;  $b \neq 0$

$$a^4 + \frac{6}{a} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \log_x 3 - 8 = \frac{5}{2a} - 8 \quad (1)$$

$$b^4 + \frac{2}{b} = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot \log_{5y} 3 - 8 = \frac{11}{2b} - 8 \quad (2)$$

$$\log_3 x + \log_3 5y = \log_3 5yx = a+b$$

$$5xy = 3^{a+b}$$

$$xy = \frac{3^{a+b}}{5}$$

$\Rightarrow$  все возможные  $xy$  заданы возможными  $(a+b)$

$$(1) - (2): a^4 - b^4 + \frac{6}{a} - \frac{2}{b} = \frac{5}{2a} - \frac{11}{2b}$$

$$(a^2+b^2)(a+b)(a-b) + \frac{6b-2a}{ab} = \frac{5b-11a}{2ab}$$

$$a^4 - b^4 = \frac{5b-11a}{2ab} - \frac{6b-2a}{2ab} = \frac{-4a-4b}{2ab} \Rightarrow a^4 - b^4 = \frac{-4}{2a} - \frac{4}{2b}$$

$$a^4 - b^4 = \frac{5b-11a-6b+2a}{2ab} = \frac{-4a-4b}{2ab}$$

$$(a^2+b^2)(a+b)(a-b) = -\frac{4}{2ab}(a+b)$$

$$(a+b) \left( (a^2+b^2)(a-b) + \frac{4}{2ab} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\left[ \begin{array}{l} a+b=0 \Rightarrow xy = \frac{3^0}{5} = \frac{1}{5} \\ (a^2+b^2)(a-b) + \frac{4}{2ab} = 0 \end{array} \right.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1    2    3    4    5    6    7  
                 

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} a^4 + b^4 + \frac{6}{a} + \frac{2}{b} = \frac{5}{2a} + \frac{11}{2b} - 16 \\ a^5 + 6 = \frac{5}{2} - 8a \\ b^5 + 2 = \frac{11}{2} - 8b \end{cases}$$

$$a^4 + b^4 + \frac{12}{2a} - \frac{5}{2a} + \frac{4}{2b} - \frac{11}{2b} + 16 = 0$$

$$a^4 + b^4 + \frac{4}{2a} - \frac{4}{2b} + 16 = 0$$

$$a^4 - b^4 + \frac{4}{2a} + \frac{7}{2b} = 0$$

$$\Rightarrow 2a^4 + \frac{4}{a} + 16 = 0$$

$$\begin{cases} a^4 + \frac{4}{2a} + 8 = 0 \\ b^4 - \frac{4}{2b} + 8 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a^5 + 4 + 16a = 0 \\ 2b^5 - 4 + 16b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow b^4 = \frac{4}{2b} - 8 \\ &b^4 = \frac{4}{2b} - 8 \\ &2b^5 = 4 - 16b \Rightarrow b^5 = \frac{4}{2} - 8b \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

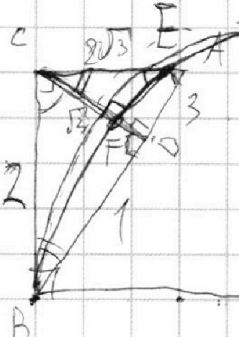


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N 2

Черновик



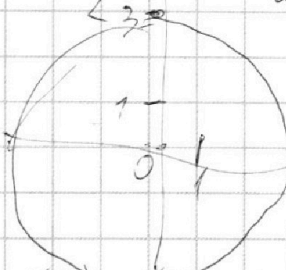
$\arcsin(\varphi) \in [0; \pi/2]$   
 $\forall \arcsin(\varphi) \in [0; \pi/2] \Rightarrow x + \frac{\pi}{2} \in [0; \frac{5\pi}{2}]$   
 $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$   
 $\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x$   
 $x=0 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$   
 $x=\pi \Rightarrow \cos x = -1 \Rightarrow \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \pi$   
 $\forall \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$   
 $\arcsin(\cos x) = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}$

$\cos x = \pm \sqrt{1 - \sin^2 x}$

$x^2 + y^2 - 12x + 32 = 0$

$x^2 - 12x + 36 + y^2 = 4$

$(x-6)^2 + y^2 = 2^2$



$\sin(\arcsin(\cos x)) = \sin(x/5 + \pi/10)$   
 $\cos x = \sin(x/5 + \pi/10)$

$\sin(2+B) = \sin 2 \cos B + \sin B \cos 2$

$\sin(0 + \frac{\pi}{2}) = \sin 0 \cdot \cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} \cdot \cos 0 = 1$   
 $0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$

$\arcsin(\cos x) = \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{\pi}{2} - x$

$\sin(x/5 + \pi/10) = \sin x/5 \cdot \cos \pi/10 + \sin \pi/10 \cdot \cos x/5$

$\arcsin(\cos x) = \varphi$

$\sin(\arcsin(\cos x)) = \sin \varphi$

$\cos x = \sin \varphi$

$\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x) \Rightarrow \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \sin \varphi$

$\frac{\pi}{2} - x = \varphi$

$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x$

$5(\frac{\pi}{2} - x) = x + \frac{\pi}{2}$

$\frac{5}{2}\pi - 5x = x + \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2\pi = 6x \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$

