



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^8 3^{14} 5^{12}$ ,  $bc$  делится на  $2^{12} 3^{20} 5^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 5 : 2$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .

3. [4 балла] Решите уравнение  $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$ .

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-16;80)$ ,  $Q(2;80)$  и  $R(18;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$ .

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 100,  $SA = BC = 16$ .

а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .

б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\min(a \cdot b \cdot c)$  достигается там ~~где~~ <sup>на каком</sup>  $a, b, c$  —  
 составят ~~только~~ <sup>только</sup>  $a, b, c \in \mathbb{N}$  ~~из~~ <sup>из</sup> чисел, на  
 которые ~~делится~~ <sup>делится</sup>, но ~~есть~~ <sup>есть</sup>.

$$a \cdot b \stackrel{a}{=} 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$$

$$b \cdot c \stackrel{b}{=} 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$$

$$a \cdot c \stackrel{c}{=} 2^{14} \cdot 3^{22} \cdot 5^{39}$$

Итого:

~~Если  $a, b, c \in \mathbb{N}$ , то  
 $a, b, c$  должны делиться на  
 $2, 3, 5$ .~~

если  $a, c = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$   
 $b \notin \mathbb{N}$ .

$$\Rightarrow a = \frac{2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{c}{b} \cdot 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} = 2^{14} \cdot 3^{22} \cdot 5^{39}$$

$$\Rightarrow c = b \cdot 2^6 \cdot 3^8 \cdot 5^{27}$$

$$\Rightarrow b^2 \cdot 2^6 \cdot 3^8 \cdot 5^{27} = 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$$

$$\Rightarrow b^2 = \frac{2^6 \cdot 3^{12}}{5^{10}} \quad \# \Rightarrow b = \frac{2^3 \cdot 3^6}{5^5}$$

$$\Rightarrow c = \frac{2^3 \cdot 3^6}{5^5}$$

~~$a, b, c \in \mathbb{N}$  — не так!~~

$$\left[ a_5 + b_5 = 12 \right] \Rightarrow \left[ a_5 - \text{это остаток } 5 \text{ от } a, \text{ на которое делится число } a \right]$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



аналогично для  $b_5, c_5, a_3, b_3, c_3, a_2, b_2, c_2$  коротко.

$$\begin{cases} b_5 + c_5 = 14 \\ a_5 + c_5 = 39 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_5 + b_5 + c_5 = 39 \Rightarrow \begin{cases} a_5 = 12 \\ b_5 = 0 \\ c_5 = 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_3 + b_3 = 14 \\ b_3 + c_3 = 20 \\ a_3 + c_3 = 22 \end{cases} \Rightarrow a_3 + b_3 + c_3 = 28 \Rightarrow \begin{cases} a_3 = 8 \\ b_3 = 6 \\ c_3 = 14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2 + b_2 = 8 \\ b_2 + c_2 = 12 \\ a_2 + c_2 = 14 \end{cases} \Rightarrow a_2 + b_2 + c_2 = 17 \Rightarrow \begin{cases} a_2 = 5 \\ b_2 = 3 \\ c_2 = 9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_2 = 5 \\ b_2 = 3 \\ c_2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} a &: 2^5 \cdot 3^8 \cdot 5^{12} \\ b &: 2^3 \cdot 3^6 \\ c &: 2^9 \cdot 3^{14} \cdot 5^{17} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a \cdot b \cdot c : 2^{3+5+9} \cdot 3^{14+6+8} \cdot 5^{12+14} = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$$

$\min(a \cdot b \cdot c) = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$  Ответ:  $2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



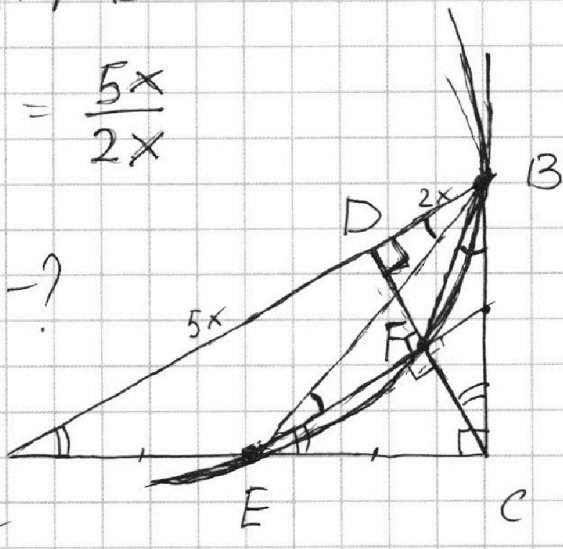
начало

Решение:

$$EF \parallel AB$$

$$\frac{AD}{BD} = \frac{5x}{2x}$$

$$\frac{S_{ABE}}{S_{CEF}} \rightarrow ?$$



AB - гип.  $\triangle ABC$

$$\rightarrow \angle ACB = 90^\circ$$

$$AD = 5x \Rightarrow BD = 2x$$

$$\Rightarrow AB = 7x$$

$$\begin{array}{l} CD \perp AB \\ AB \parallel EF \end{array} \Rightarrow EF \perp CD$$

$$AB \parallel EF \Rightarrow \angle BAC = \angle FEC$$

$\Rightarrow$  к  $\triangle ABC \sim \triangle FEC$   
(по 2 углам)

$$k = \left[ \frac{CE}{AB} = \frac{CF}{BC} \right] \quad (1)$$

$$\angle CBF = \angle BEF \quad (\text{сб-во касательной и впис. угла})$$

$$AB \parallel EF \Rightarrow \angle BEF = \angle ABE \quad (\text{накрестные})$$

$$\Rightarrow \angle ABE = \angle CBF$$

$$\Rightarrow \triangle CFB \sim \triangle AEB$$

(по 2 углам)

$$\angle CDB = \angle ACB = 90^\circ$$

$\triangle ABC$  - острый  
( $\triangle ABC$  и  $\triangle BCD$ )

$$\Rightarrow \angle BCD = \angle BAC$$

$$\Rightarrow \frac{CF}{AE} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow CF = AE \cdot \frac{BC}{AB}$$

$$(1): CE = AB \cdot \frac{CF}{BC}$$

$$\Rightarrow CE = AB \cdot \frac{AE \cdot BC}{AB \cdot BC} = AE$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

котус.

$$\Delta ABC: AC = \sqrt{AD \cdot AB} = \sqrt{5x \cdot 4x} = x\sqrt{35}$$

$$AE = CE \Rightarrow CE = \frac{x\sqrt{35}}{2}$$

$$\Rightarrow K = \frac{CE}{AB} = \frac{x \cdot \frac{\sqrt{35}}{2}}{7x} = \frac{\sqrt{35}}{14} = \sqrt{\frac{5}{28}}$$

$$K^2 = \frac{S_{CEF}}{S_{ABC}} = \frac{5}{28} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{28}{5} = 5,6$$

Ответ: 5,6.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

$$10 \left( \frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x) \right) = \pi - 2x$$

~~Второй вариант~~

$$5\pi - 10 \arccos(\cos x) = \pi - 2x$$

$$10 \arccos(\cos x) - 2x = 4\pi$$

$$\arccos(\cos x) = x \quad \text{при } x \in [0; \pi]$$

$$10x - 2x = 4\pi$$

$$x = \frac{\pi}{2} \quad \text{— подходит } \checkmark$$

~~Решение:~~

$$\arcsin(\cos x) \in \left[ -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi - 2x}{10} \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow -5\pi \leq \pi - 2x \leq 5\pi$$

$$-6\pi \leq -2x \leq 4\pi$$

$$\text{рассмотрим все возможные случаи: } -2\pi \leq x \leq 3\pi$$

$$x \in [\pi; 2\pi] \Rightarrow \arccos(\cos x) = 2\pi - x$$

$$\Rightarrow 10(2\pi - x) - 2x = 4\pi$$

$$20\pi - 10x - 2x = 4\pi$$

$$12x = 16\pi \quad x = \frac{4\pi}{3} \quad \text{— подходит } \checkmark$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x \in [2\pi; 3\pi] \Rightarrow \arccos(\cos x) = \overset{\text{конца}}{x - 2\pi}$$

$$\Rightarrow 10(x - 2\pi) - 2x = 4\pi$$

$$10x - 20\pi - 2x = 4\pi$$

$$8x = 24\pi$$

$$x = 3\pi \quad \text{— подходит } \checkmark$$

$$x \in [-\pi; 0] \Rightarrow \arccos(\cos x) = -x$$

$$\Rightarrow 10(-x) - 2x = 4\pi$$

$$-12x = 4\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{3} \quad \text{— подходит } \checkmark$$

$$x \in [-2\pi; -\pi] \Rightarrow \arccos(\cos x) = x + 2\pi$$

$$\Rightarrow 10(x + 2\pi) - 2x = 4\pi$$

$$10x - 2x + 20\pi = 4\pi$$

$$8x = -16\pi$$

$$x = -2\pi \quad \text{— подходит } \checkmark$$

$$\text{Ответ: } x \in \left\{ -2\pi; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{4\pi}{3}; 3\pi \right\}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

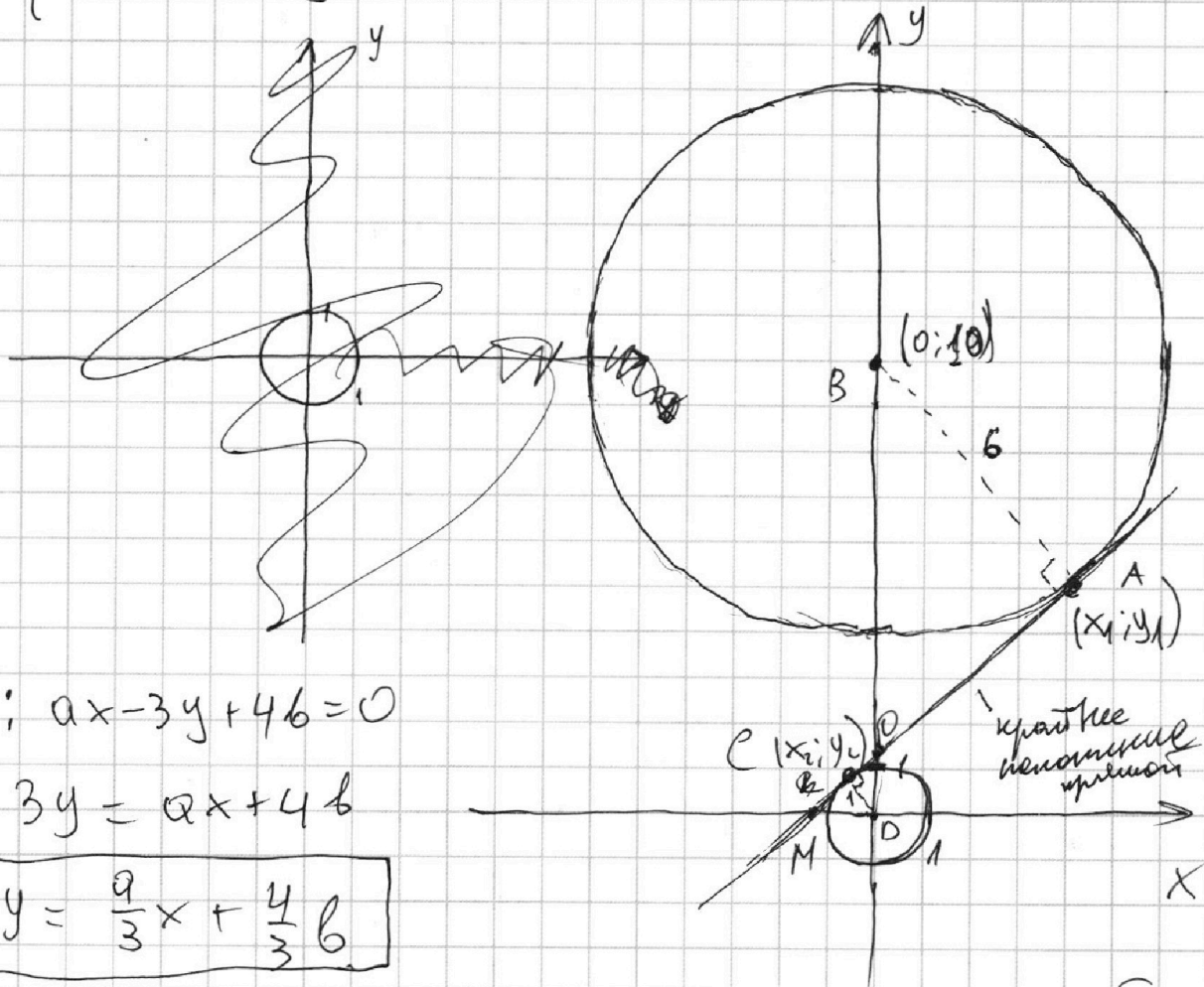
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



начало

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 10)^2 - 36) = 0 \\ ax - 3y + 4b = 0 \quad (1) \end{cases}$$



$$(1): ax - 3y + 4b = 0$$

$$3y = ax + 4b$$

$$y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$$

а вышет на уаи нормали прямой,  
в - на ~~но~~ ~~прямой~~ ~~на~~ ~~на~~  
~~(0, 4/3 b)~~ ~~теп~~ ~~но~~, поскольку прямая  
будет поднорми.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

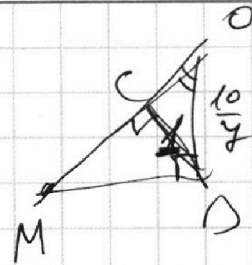
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



продолжение

~~$\vec{AB} \{x_1; y_1 - 10\}$~~

~~$\vec{AC} \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$~~



~~$\Rightarrow x_1(x_2 - x_1) + (y_1 - 10)(y_2 - y_1) = 0$~~

~~$\Rightarrow x_1x_2 - x_1^2 + y_1y_2 - 10y_2 + 10y_1 = 0$~~

~~$\sqrt{x_1^2 + (y_1 - 10)^2} = 36 \Rightarrow x_1^2 + y_1^2 - 20y_1 + 100 = 36$~~

~~$\Rightarrow x_1x_2 + y_1y_2 - 10y_2 + 10y_1 - 20y_1 + 100 = 36$~~

~~$\vec{DC} \{x_2; y_2\}$~~

~~$x_1x_2 + y_1y_2 - 10y_2 - 10y_1 + 64 = 0$~~

~~$\Rightarrow (x_2 - x_1)x_2 + (y_2 - y_1)y_2 = 0$~~

~~$x_2^2 - x_1x_2 + y_2^2 - y_1y_2 = 0$~~

~~$x_2^2 + y_2^2 = 1$~~

~~$1 - x_1x_2 - y_1y_2 = 0$~~

~~$x_1x_2 + y_1y_2 = 1$~~

~~$\Rightarrow -10y_2 - 10y_1 + 100 + 64 = 0$~~

~~$y_1 + y_2 = 6,5$~~

$\triangle CDO \sim \triangle ABO$  ( ~~$AB \parallel CD$~~ )  
( $CD \perp AO, AB \perp AO$ )

$\Rightarrow \frac{DO}{BO} = \frac{1}{6} \Rightarrow OD = \frac{1}{6} BO = \frac{10}{6}$

$CO = \sqrt{\frac{100}{48} - \frac{49}{48}} = \frac{\sqrt{51}}{4}$   
( $\triangle COO$ )

$\angle MOO$  - острый ( $\triangle MOO$  и  $\triangle COO$ )  
 $\angle COO = \angle MAO = 90^\circ$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\Rightarrow \triangle OCD \sim \triangle ODM$  (по 2 углам) | касаясь.

$$\Rightarrow \frac{DM}{OD} = \frac{DO}{CO} \Rightarrow DM = 1 \cdot \frac{10}{\frac{10}{\sqrt{51}}} = \frac{10}{\sqrt{51}}$$

уравнение касательной AC (точки O и M)

$$\Rightarrow \frac{y - OD}{0 - OD} = \frac{x - 0}{-DM - 0}$$

$$\frac{y - \frac{10}{4}}{-\frac{10}{4}} = \frac{x}{-\frac{10}{\sqrt{51}}} \Rightarrow \left( y - \frac{10}{4} \right) \sqrt{51} =$$

$$\Rightarrow y - \frac{10}{4} = \frac{\sqrt{51}}{4} x$$

в этом случае не будет 2х корней!

$$\Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{\sqrt{51}}{4} \Rightarrow a = 3 \cdot \frac{\sqrt{51}}{4} \quad \text{— крайнее положительное касательная.}$$

~~$a \in \left( -\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{4} \right) \cup \left( \frac{3\sqrt{51}}{4}; +\infty \right)$~~  ~~Аналогично~~

чуть больше — появятся ситуации с 4-мя корнями, чуть меньше — их не будет. положительный случай по модулю симметричен отрицательному.

$$\Rightarrow a \in \left( -\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{4} \right) \cup \left( \frac{3\sqrt{51}}{4}; +\infty \right)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3$$

$$\log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} \frac{1}{5} - 3$$

$xy = ?$

Решение:

$$x \neq 1$$

~~$$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5(2x)} = \frac{1}{\log_5(2x)} - 3$$~~

~~$$\log_5^4(2x) - \frac{4}{\log_5(2x)} + 3 = 0$$~~

~~$$\log_5^5(2x) + 3 \log_5(2x) - 4 = 0$$~~

~~$$\log_5(2x) = 1$$~~

~~$$t^4 + t^3 + t^2 + t + 4 = 0 \quad (-K/M)$$~~

~~$$\Rightarrow x = 2,5$$~~

~~$$\log_5^4 y + \frac{4}{\log_5 y} = -\frac{1}{3 \log_5 y} - 3$$~~

~~$$3 \log_5^4 y + 11 \log_5 y + 9 = 0$$~~

$$\log_5(2x) \neq 0$$
$$x \neq \frac{1}{2}$$

$$\log_5 y \neq 0$$
$$y \neq 1$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5(2x)} = \frac{4}{3\log_5(2x)} - 3$$

$$3 \log_5^4(2x) + 9 \log_5(2x) - 13 = 0.$$

$$\log_5^4 y + \frac{4}{\log_5 y} = -\frac{1}{3\log_5 y} - 3$$

$$\log_5 2x \neq 0$$

~~$\log_5 2x = 0$~~

$$x \neq \frac{1}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \log_5^4 y + 9 \log_5 y + 13 = 0 \\ 3 \log_5^4(2x) + 9 \log_5(2x) - 13 = 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \log_5^5(2x) + \log_5^5 y + 3 \log_5 2x + 3 \log_5 y = 0$$

$$\Rightarrow \log_5^5 2x = -\log_5^5 y$$

$$2x = \frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow xy = \frac{1}{2}$$

Ответ: ~~0,5~~ 0,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

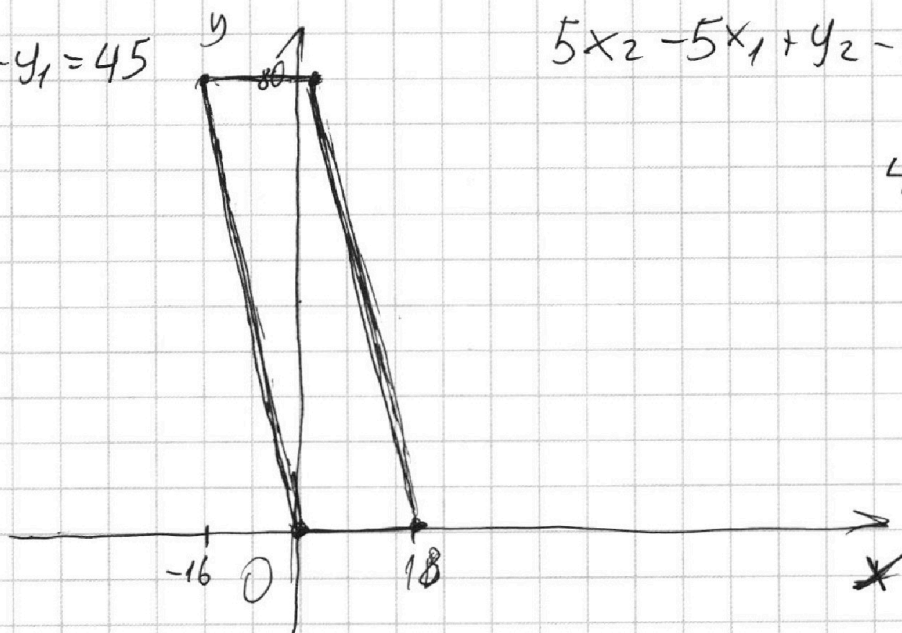
- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 45$$

$$\Rightarrow y_2 - y_1 = 45$$



$$5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1$$
$$\parallel$$
$$45$$

$$0 \leq y_2 \leq 80$$

$$0 \leq y_1 \leq 80$$

$$-80 \leq -y_1 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad -80 \leq y_2 - y_1 \leq 80$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$S_{ABC} = 100$$

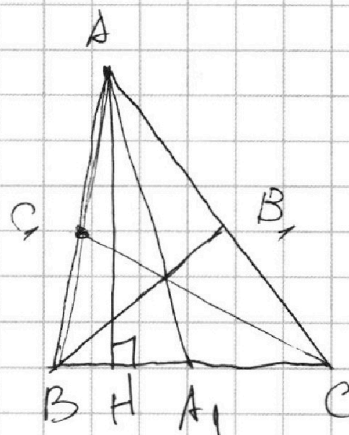
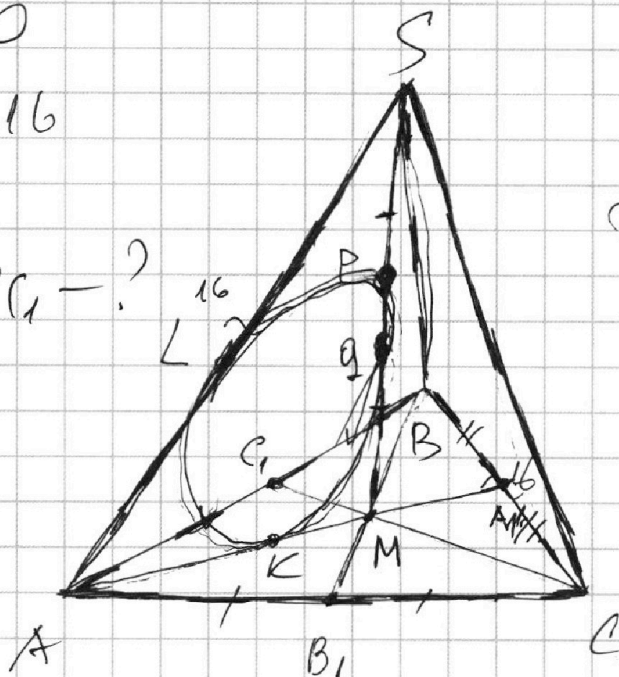
$$SA = BC = 16$$

||  
AS

$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = ?$$

$$SN = 4$$

$$R = 5$$

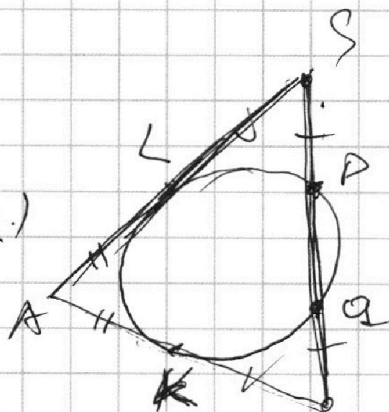


$\triangle ASM$ :

$$SP = MQ \Rightarrow SQ = PM$$

(PQ - диаметр)

$$\Rightarrow SL^2 = SP \cdot SQ = MQ \cdot PM = KM^2$$



$$\Rightarrow SL = KM$$

$$AL = AK$$

(об-во касания из точки.)

$$\Rightarrow AS = AM = 16$$

$$\Rightarrow AA_1 = \frac{3}{2} AM = 24$$

$$\text{AH} \perp BC; \text{AH} = \frac{2S_{ABC}}{BC} = \frac{2 \cdot 100}{16} = \frac{25}{2}$$

$$\Rightarrow A_1M = \sqrt{24^2 - \left(\frac{25}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{1152 - 625}}{2} = \frac{\sqrt{527}}{2}$$

16A(AH)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1    2    3    4    5    6    7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow CH = A_1C + A_1H = \frac{\sqrt{524}}{2} + \cancel{8}$$

||  
 $\frac{1}{2}BC$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{AH^2 + CH^2} = \sqrt{\frac{625}{4} + \frac{524}{4} + 64 + 8\sqrt{524}} =$$

=



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_5 2x = 625 - 3$$

$$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5 2x} = \frac{4}{3 \log_5 2x} - 3$$

$$3 \log_5^4(2x) - \cancel{3 \log_5^4(2x)} - 9 - 4 + 3 \log_5 2x = 0$$

$$3 \log_5^4(2x) + 3 \log_5 2x - 13 = 0$$

$$\log_5^4(2x) (3 \log_5 2x + 1) = - \log_5^4(2x) / (3 \log_5 2x + 1)$$



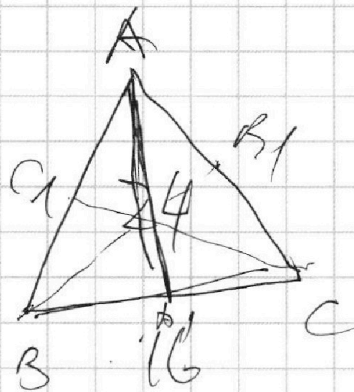
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1    2    3    4    5    6    7  
                 



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$AA_1, BB_1, CC_1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{\cancel{x_2 - x_1}}$$

$$y - y_1 = (x - x_1) \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\begin{array}{r} 3x^5 + 9x + 11 \mid x - 1 \\ \underline{3x^5} \phantom{+ 9x + 11} \\ 3x^4 + 3x^3 + \phantom{9x + 11} \\ \underline{3x^4} \phantom{+ 3x^3} \\ 3x^3 \phantom{+ 9x + 11} \\ \underline{- 3x^3 + 9x} \phantom{+ 11} \\ 3x^2 - 3x \phantom{+ 11} \end{array}$$

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3$$

$$x^5 + 3x - 4$$

$$t^4 + t^3 + t^2 + t + 4 = 0$$

$$t^2 + t + 1 + \frac{1}{t} + \frac{4}{t^2} = 0$$

$$t + \frac{1}{t} = x$$

$$x^2 = t^2 + 2 + \frac{1}{t^2}$$

$$4t^3 + 3t^2 + 2t + 1 = 0$$

$$12t^2 + 6t + 2 = 0 \quad \text{всегда возрастает}$$

→ нет корней

$$\begin{array}{r} x^5 + 3x - 4 \mid x - 1 \\ \underline{x^5 - x^4} \phantom{+ 3x - 4} \\ 3x^4 - x^3 \phantom{+ 3x - 4} \\ \underline{3x^4 - 3x^3} \phantom{+ 3x - 4} \\ x^3 \phantom{+ 3x - 4} \\ \underline{x^3 + x^2} \phantom{+ 3x - 4} \\ x^2 + 3x \phantom{+ 3x - 4} \\ \underline{x^2 - x} \phantom{+ 3x - 4} \\ 4x - 4 \end{array}$$

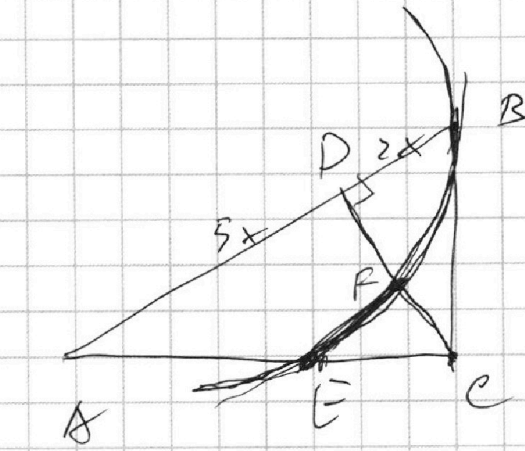
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

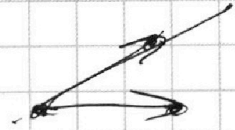
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$CE = AB \cdot \frac{CF}{BC} = AB \cdot \frac{AE \cdot BC}{AB \cdot BC} =$$

$$= AE$$

$$AE = CE$$



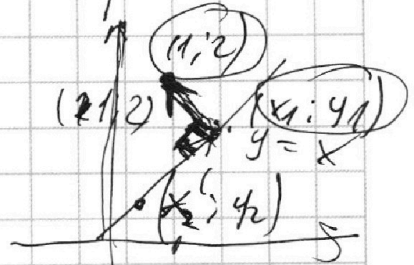
$$\begin{cases} 2x - 3y + 46 = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

$$2x + 6y + c = 0$$

$$6 = \frac{\dots}{\sqrt{\dots}}$$

$$\cos \alpha = \frac{1a + 2b}{\sqrt{\dots}}$$

$$y = x$$



$$0 =$$

$$\frac{1}{6}$$

$\{a; b\}$  - иерр. ~~профессор~~

$$\{(1-x_1); (2-y_1)\}$$

$$\{x_1 - x_2; y_1 - y_2\}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

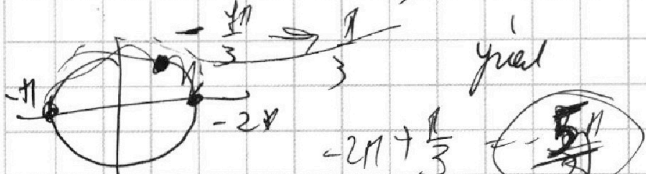


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\arccos(\cos x) = x$$

$$x \in$$



$$5x - x = 2\pi$$

$$+2\pi$$

$$4x = 2\pi$$

$$x = \frac{\pi}{2}$$

$$\arccos(\cos(4\pi/3)) = \arccos(-1/2)$$

$$x \in [2\pi, 4\pi]$$

$$-\frac{1}{2}$$

$$10x + 20\pi - 2x = 4\pi$$

$$8x = -16\pi$$

$$x = -2\pi$$



$$10\sqrt{1-x^2} = \pi - 2x$$

$$\frac{1152}{625} = \frac{11}{527}$$

$$\pi - 2x \geq 0$$

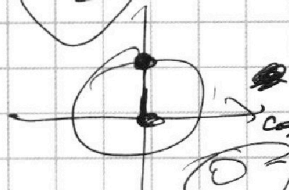
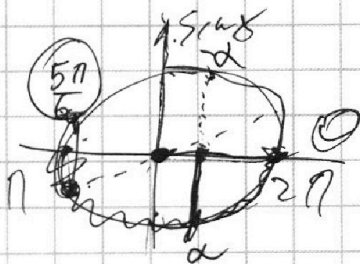
$$x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$100 - 100x^2 = \pi^2 + 4x^2 - 4\pi x$$

$$\arccos(\cos x) = 2$$

$$-\frac{\pi}{2}$$

$$x = -\frac{3\pi}{2}$$



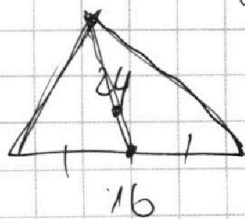
$$\frac{4\pi}{6}$$

$$\frac{5\pi}{6}$$

$$(x + \pi)$$

$$\frac{11}{546}$$

$$+ \frac{625}{527}$$



$$2\pi - \pi$$

$$10 \arccos(\cos x) - 2x = 4\pi$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a, b, c \quad a \cdot b : 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$$

$$b \cdot c : 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{14}$$

$$a \cdot c : 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$$

$$a = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$$

$$\Rightarrow b = 2^{8-x} \cdot 3^{14-y} \cdot 5^{12-z}$$

$$a = \frac{2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{c}{b} \cdot 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$$

$$\begin{array}{r} 1152 \\ 6 \overline{) 1280} \\ \underline{1280} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1280 \overline{) 14} \\ \underline{12} \\ 8 \end{array} \quad \begin{array}{r} 14 \\ 8 \overline{) 320} \\ \underline{320} \end{array}$$

$$370 + 8 \sqrt{524}$$

$$a + b + c = 24$$

$$12 + 14 = 39$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} a : 5^{12} \\ c : 5^{14} \end{array}$$

$$14 = a + b$$

$$20 = b + c$$

$$22 = a + c$$

$$\begin{array}{r} 64 \\ + 4 \\ \hline 268 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1152 \\ + 256 \\ \hline 1408 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1408 \overline{) 4} \\ \underline{18} \\ 20 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4 \\ 20 \overline{) 352} \\ \underline{352} \end{array}$$