МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

# 11 КЛАСС. Вариант 2

1. [4 балла] Натуральные числа $a$, $b$, $c$ таковы, что $ab$ делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, $bc$ делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, $ac$ делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения $abc$.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник $ABC$. Окружность, касающаяся прямой $AC$ в точке $A$, пересекает высоту $CD$, проведённую к гипотенузе, в точке $E$, а катет $BC$ – в точке $F$. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}3$. Найдите отношение площади треугольника $ACD$ к площади треугольника $CEF$.

3. [4 балла] Решите уравнение $5\arccos(\sin x) = \dfrac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра $a$, для каждого из которых найдётся значение параметра $b$, при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ \left(x^2 + 14x + y^2 + 45\right)\left(x^2 + y^2 - 9\right) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа $x$ и $y$ удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}\left(7^5\right) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения $xy$.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ треугольника $ABC$ пересекаются в точке $M$. Сфера $\Omega$ касается ребра $AS$ в точке $L$ и касается плоскости основания пирамиды в точке $K$, лежащей на отрезке $AM$. Сфера $\Omega$ пересекает отрезок $SM$ в точках $P$ и $Q$. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника $ABC$ равна 60, $SA = BC = 10$.

а) Найдите произведение длин медиан $AA_1, BB_1$ и $CC_1$.

б) Найдите двугранный угол при ребре $BC$ пирамиды, если дополнительно известно, что $\Omega$ касается грани $BCS$ в точке $N$, $SN = 3$, а радиус сферы $\Omega$ равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| X | | | | | | |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 1. $ab \vdots 2^7 3^{11} 5^{14}$, $bc \vdots 2^{13} 3^{15} 5^{18}$, $ac \vdots 2^{14} 3^{17} 5^{43}$

Оценка:

Пусть $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ – степени вхождения 2 в числа $a, b, c$

$\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ – —"— 3 —"—

$\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ – —"— 5 —"—

Т.к. $ab \vdots 2^7 3^{11} 5^{14} \Rightarrow \alpha_1 + \beta_1 \geqslant 7$ $\quad \alpha_2 + \beta_2 \geqslant 11$

$bc \vdots 2^{13} 3^{15} 5^{18}$ $\quad \beta_1 + \gamma_1 \geqslant 13$ $\quad \beta_2 + \gamma_2 \geqslant 15$

$ac \vdots 2^{14} 3^{17} 5^{43}$ $\quad \alpha_1 + \beta_1 \geqslant 14$ $\quad \alpha_2 + \gamma_2 \geqslant 17$ $\quad \alpha_3 + \gamma_3 \geqslant 43$

$\Downarrow$ $\quad \Downarrow$

$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geqslant 17$ $\quad \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geqslant 22$

$\Rightarrow abc \geqslant 2^{17} 3^{22} 5^{43}$, т.к. степень вхожд 2 в произв $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1$, а 3: $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2$, причем, $\vdots 5^{43}$, т.к. степень вхожд $5 = \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geqslant \beta_3 + \gamma_3 \geqslant 43$.

Пример:

$a = 2^4 3^7 5^{20}$

$b = 2^3 3^4 5^0$

$c = 2^{10} 3^{11} 5^{23}$

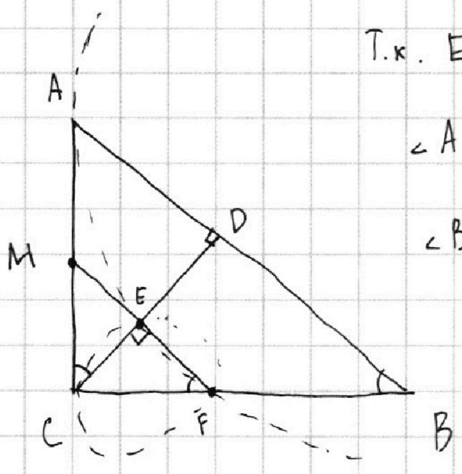
Ответ: $2^{17} 3^{22} 5^{43}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2.




Т.к. $EF \parallel DB \Rightarrow \angle B = \angle EFC = \beta$

$\angle ACD = \beta$, т.к. также как и $\angle B$ дополняет $\angle A$ до $90^\circ$

Т.к. $\angle ACE = \angle CFE \Rightarrow$ $AC$ – кас к окр $CEF$

$EF$ – рад ось окр $CEF$ и $AEF$

$M = AC \cap EF$, т.к. $M \in$ рад оси окр $AEF$ и $CEF$ ($\in EF$) и лежит на пр $AC$ явл кас к этим окр $\Rightarrow$

$$\deg M(AEF) = MA^2 = \deg M(EFC) = MC^2$$
$$\Rightarrow MA = MC$$

Т.к. $EF \parallel AB \Rightarrow \frac{EF}{DB} = \frac{CE}{CD} = \frac{CM}{CA} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ ~~$EF = \frac{1}{2} DB$~~ $CE = \frac{1}{2} CD$

Т.к. $\frac{AB}{DB} = 1{,}3 \Rightarrow \frac{DB}{AD} = \frac{10}{3}$, пусть $DB = 10x$, $AD = 3x$

Т.к. $ACB$ – прямоуг треуг и $CD$ – его высота $\Rightarrow CD^2 = AD \cdot DB = 30x^2$

$\triangle CEF \sim \triangle ADC$ ($\angle CDA = \angle CEF$, $\angle ACD = \angle CFE$)

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle CEF}} = \left(\frac{AD}{CE}\right)^2 = \left(\frac{3x}{\frac{1}{2}\sqrt{30}\,x}\right)^2 = \frac{36}{30} = \frac{6}{5}.$$

Ответ: $\frac{6}{5}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3.

$5\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$

Пусть: $\alpha = \arccos(\sin x)$ $\quad \alpha \in [0;\pi]$

$\cos\alpha = \sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$

1 вар: $\alpha = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k, \; k \in Z$

$5(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k) = \frac{3\pi}{2} + x$

$6x = \pi + 10\pi k$

$x = \frac{\pi}{6} + \frac{5}{3}\pi k \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} + 2\pi k - \frac{5}{3}\pi k$ $\cancel{= \frac{\pi}{3} \in [0;\pi]}$

$= \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}k \in [0;\pi]$

$\Rightarrow k \in \{-1, 0, 1, 2\}$

$x_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{5}{3}\pi(-1) = -\frac{9}{6}\pi$ $\quad x_4 = \frac{21}{6}\pi$

$x_2 = \frac{\pi}{6}$ $\quad x_3 = \frac{11\pi}{6}$

2 вар: $\alpha = x - \frac{\pi}{2} + 2\pi t, \; t \in Z$

$5(x - \frac{\pi}{2} + 2\pi t) = \frac{3\pi}{2} + x$

$\cancel{4x = 4\pi}$

$\cancel{x = \pi \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} \in [0;\pi]}$

~~Ответ: $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \pi$~~

$4x = 4\pi - 10\pi t$

$x = \pi - \frac{5}{2}\pi t$

$\alpha = \pi - \frac{5}{2}\pi t - \frac{\pi}{2} + 2\pi t = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}t \in [0;\pi]$

$x_5 = -\frac{3\pi}{2}$ $\quad x_6 = \pi$ $\quad x_7 = \frac{7\pi}{2}$ $\quad \Rightarrow t \in \{1, 0, -1\}$

Ответ: $\frac{\pi}{6}$; $\frac{11\pi}{6}$; $\frac{7}{2}\pi$; $-\frac{3}{2}\pi$; $\pi$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

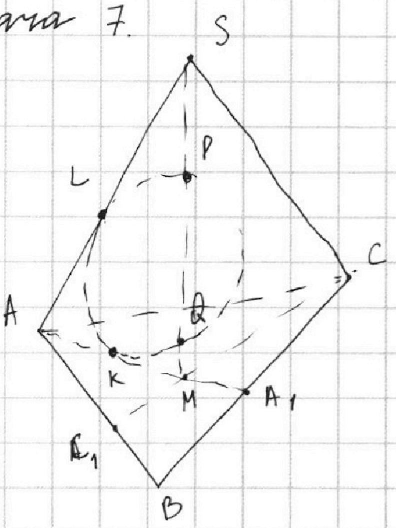
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 7.

а)




Так как $SP = MQ \Rightarrow$ ч у.о. P лежит между S и Q.

Т.к. $\Omega$ касается AS и AM $\Rightarrow$

$AL = AK$, как отрезки касательных к сфере

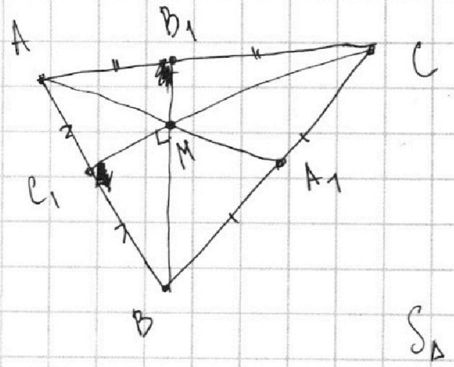
$SL^2 = SP \cdot SQ$ (степень точки S отн $\Omega$)

$MQ \cdot MP = SP \cdot SQ = MK^2$ (степень точки M отн $\Omega$)

$\Downarrow$

$SL = MK$

$AM = AK + KM = AL + SL = AS = 10 = BC. \Rightarrow AA_1 = 15$




Т.к. M - центроид $\triangle ABC \Rightarrow$

$MA_1 = \frac{AM}{2} = 5 = \frac{BC}{2}$

т.к. $MA_1 = BA_1 = A_1C \Rightarrow \triangle BMC$ - прямоуг.

$S_{\triangle ACC_1} = S_{\triangle CC_1B} = 30$ (т.к. $\frac{S_{\triangle ACC_1}}{S_{\triangle CC_1B}} = \frac{AC_1}{C_1B} = 1$).

$S_{\triangle CC_1B} = \frac{BM \cdot CC_1}{2} = 30$

$\Rightarrow BM \cdot CC_1 = 60$ т.к. $BB_1 = \frac{3}{2} BM \Rightarrow$

$BB_1 \cdot CC_1 = 90$

$\Rightarrow AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 15 \cdot 90 = 1350.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$x+3ay-7b=0$

$(\cancel{x^2}(x+7)^2+y^2-4)\;(x^2+y^2-9)=0.$

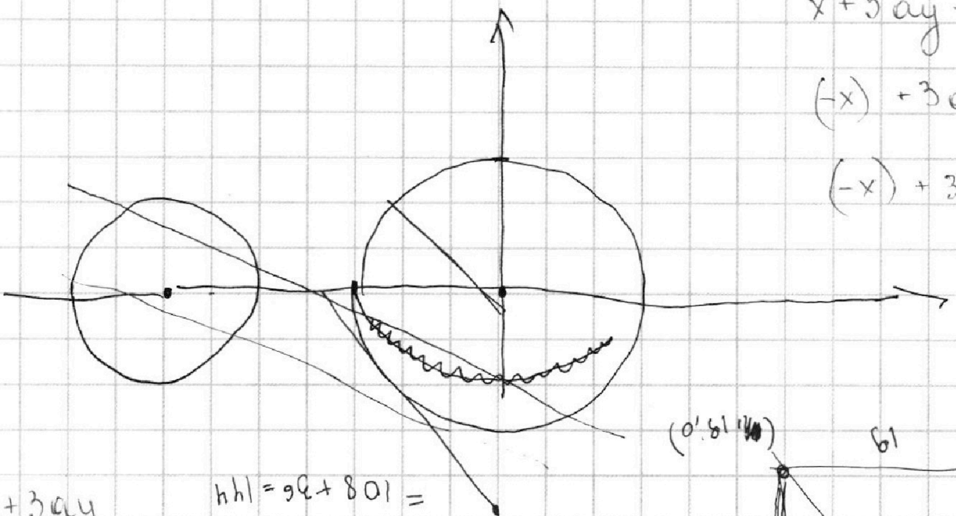
$x+3ay-7b=0$

$(-x)+3a(-y)=-7b$

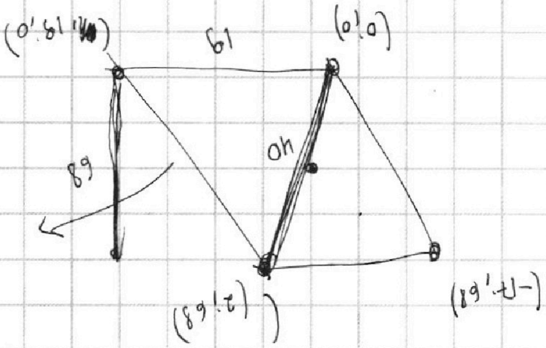
$(-x)+3a(-y)-7(-b)=0$

$x, y$

$-x, -y$

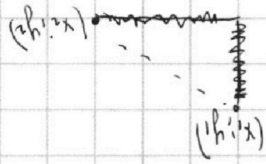


$x+3ay$




$68+4\cdot 19=68+40+36=$
$=108+36=144$

$\sqrt{(17)^2+68^2}$




$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$

$s^4+\frac{7}{2}s+4=0$

$t^4-\frac{7}{2}t+4=0$

$\cancel{(\log_7(6x))^4+2}$

$\cancel{\log_7 y+\log_7 6x=\log_7 6xy}$

$xy=k$

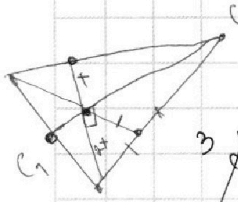
$(\log_7 y)^4-(\log_7 6x)^4+\frac{7}{2}(\log_y 7+\log_{6x}7)=0$

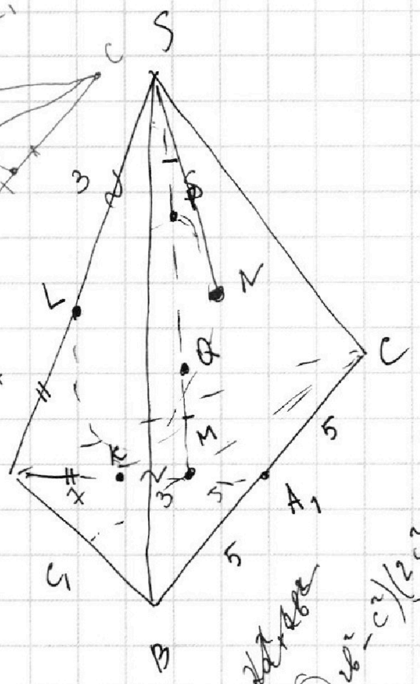
$(\log_7 6x)^4-\frac{7}{2}\log_{6x}7+4=0 \qquad (\log_7 y)^4+\frac{7}{2}\log_y 7+4=0$

$(\log_7(6x))^4-2\log_{6x}7=\frac{3}{2}\log_{6x}7-4$

7

$CL_1 \cdot 7x = 30$





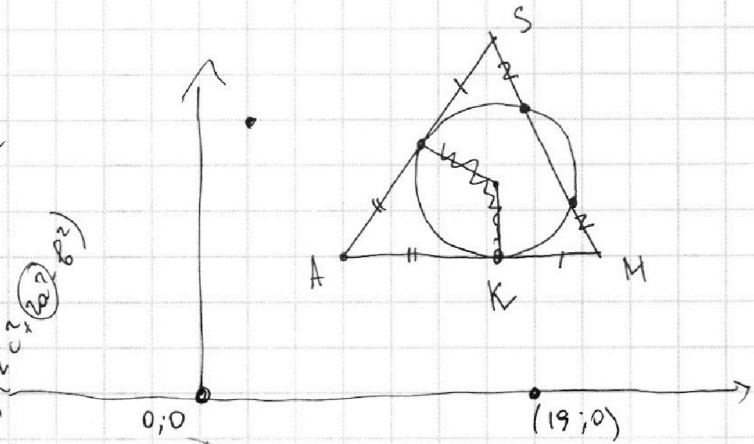

$SL^2 = SP \cdot SQ$

$MK^2 = MQ \cdot MP$

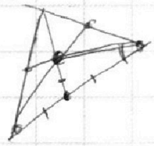
$S_{ABC} = 60$ хак

$SA = BC = 10$

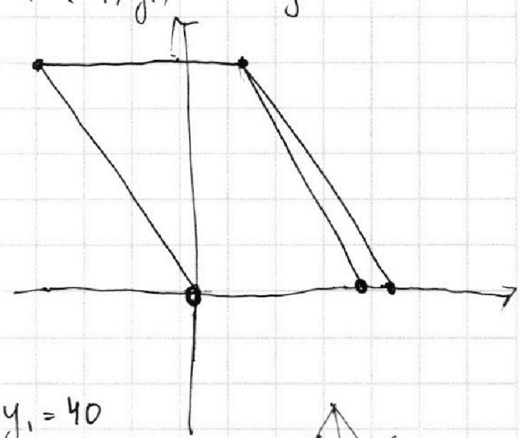
$SA = AM = 10$




$(2a^2+2b^2-c^2)(2c^2+2a^2-b^2)$



$A(x_1; y_1)$ $B(x_2; y_2)$



$$\left(\frac{1}{\log_{6x} 7}\right)^4 - 2\log_{6x} 7 = \frac{3}{2}\log_{6x} 7 - 4$$

$$\left(\frac{1}{\log_{y} 7}\right)^4 + 6\log_{y} 7 = \frac{5}{2}\log_{y} 7 - 4$$

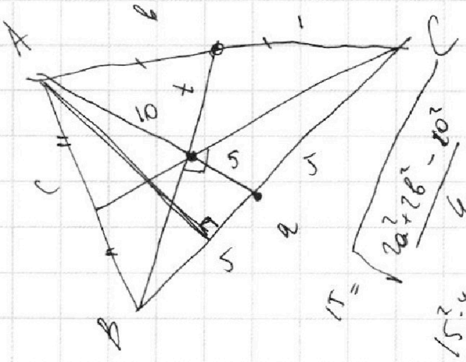
$15^2+5^2-2\cdot 15\cdot 5\cos\alpha = c^2$

$15^2+5^2+2\cdot 15\cdot 5\cos\alpha = b^2$

$c^2+b^2 = 15^2\cdot 2+$

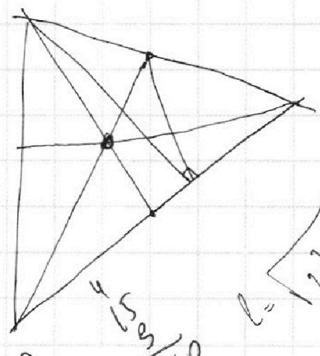
$t = \sqrt{\frac{2c^2+2b^2-a^2}{4}}$

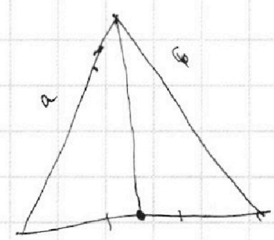
$4(x_2-x_1)+y_2-y_1=40$




$15 = \sqrt{\frac{2a^2+2b^2-10^2}{4}}$

$15^2\cdot 4+10^2 = 2a^2+2b^2$






$l = \sqrt{\frac{2a^2+2b^2-c^2}{4}}$

90

4
15
3
1350

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$ab: 2^7 3^1 5^{14}$
$bc: 2^{13} 3^{15} 5^{18}$
$ac: 2^{14} 3^{17} 5^{43}$

$5^{43}\ 3^{17}\ 2^{14}$

14 43 18

32 75

7 13 14 $11+15+17=43$

17, 22, 43

$a = 2^{\alpha_1} 3^{\alpha_2} 5^{\alpha_3}$

$b = 2^{\beta_1} 3^{\beta_2} 5^{\beta_3}$

$c = 2^{\gamma_1} 3^{\gamma_2} 5^{\gamma_3}$

$\alpha_1+\beta_1 \geq 7$ 11 14

$\beta_1+\gamma_1 \geq 13$ 15 $\alpha_1 = 4$ $\beta_1 = 3$

$\alpha_1+\gamma_1 \geq 14$ 17 43 $\gamma_1 = 10$

$\alpha_1+\beta_1+\gamma_1 \geq 17$

$\alpha_2 = 7$ $\alpha_3 = 20$

$\beta_2 = 4$

$\gamma_2 = 11$ $\gamma_1 = 23$

130

$\alpha_2+\beta_2 \geq 14$

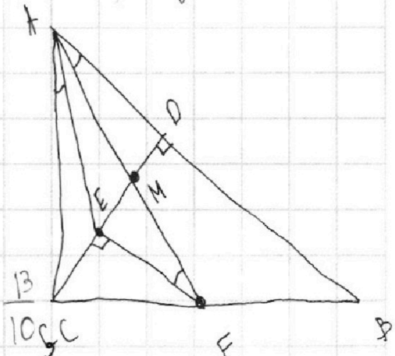
$\beta_2+\gamma_2 \geq 18$

$\alpha_2+\gamma_2 \geq 43$

$43+18-14=47$

24

$\frac{25}{130} = \frac{5}{26}$

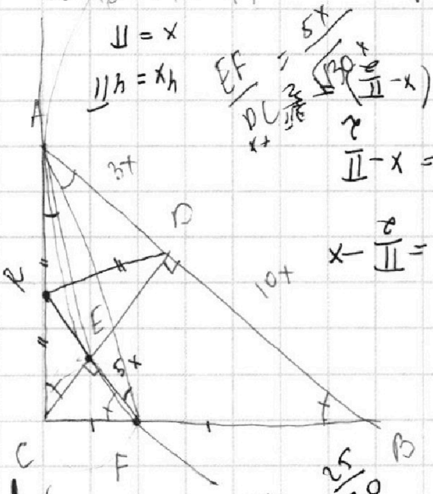


$\frac{BD+AD}{BD} = \frac{13}{10}$

$CD = x\sqrt{130}$

$\triangle MEF \sim \triangle$

$3x \cdot 5x = \frac{DC^2}{2} = \frac{130x^2}{2}$



$\frac{CD \cdot AD}{CE \cdot EF}$

$\frac{AD}{CE} = \frac{DC}{EF}$

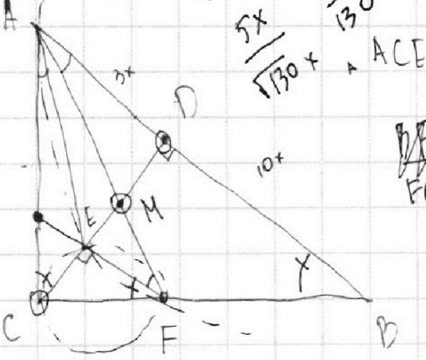
$\frac{5x}{\sqrt{130}x}$ $\frac{25}{130}$

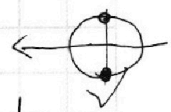
$\triangle ACE \sim \triangle ABF$

MF

$\frac{BF}{FC} \cdot \frac{CM}{MD} \cdot \frac{3}{13} = 1$

$\frac{10}{3} \cdot \frac{CM}{MF} \cdot \frac{FC}{CD} = 1$





$\frac{CE}{ED}$ $\sin\varphi = \frac{MD}{MC}$

$x\sqrt{130}$

$\triangle CEF \sim \triangle ADC$

$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x}(7) = \log_{36x^2} 343 - 4$

$xy$

$\log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}(7^5) - 4$

$6x > 0$ $\quad 36x^2 \ne 1$

$6x \ne 1$

$y > 0$

$y \ne 1$

$y \ne -1$

$(\log_7 6x)^4 - 2\frac{1}{\log_7 6x} =$ $\qquad \log_a b \cdot \log_b a = 1$

$7^3$ $\qquad 49 \cdot 7 = 343$

$\left(\frac{1}{\log_{6x} 7}\right)^4 - 2\log_{6x} 7 = \frac{3}{2}\log_{6x} 7 - 4$

$\left(\frac{1}{\log_y 7}\right)^4 + 6\log_y 7 = \frac{5}{2}\log_y 7 - 4$ $\qquad t^4 = \frac{7}{2}\frac{1}{t} - 4$

$\left(\frac{1}{\log_{6x} 7}\right)^4 = \frac{7}{2}\log_{6x} 7 - 4$ $\qquad \frac{1}{\log_{6x} 7}$ $\qquad s^4 = -\frac{7}{2s} - 4$

$\left(\frac{1}{\log_y 7}\right)^4 = -\frac{7}{2}\log_y 7 - 4$ $\qquad t^4 + 4 \ge 4t^2$

$a^2 + b^2 \ge 2ab$

$f(x) = \left(\frac{1}{\log_x 7}\right)^4 + \frac{7}{2}\log_x 7 + 4$ $\qquad \frac{7}{2}$

$t^4 - \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{t} + 4 = 0$